УДК 519.847

М.Х. Прилуцкий, М.С. Куликов

ОБ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается специальный класс задач квадратичного программирования, для решения которых разработан алгоритм с вычислительной сложностью $O(n^2)$.

Ключевые слова: специальная задача квадратичного программирования, аналитическое решение, оптимальность.

Введение

В работе рассматривается специальный класс задач квадратичного программирования, специфика которых заключается в том, что область допустимых решений задается совокупностью двусторонних ограничений на переменные, а критерии представляют собой суммы квадратов отклонений переменных и сумм переменных от заданных величин. Существует широкий класс прикладных задач, формализация которых приводит их в класс задач квадратичного программирования с указанной спецификой. Это задачи объемно-календарного планирования [1], задачи распределения мощностей каналов передачи данных провайдером сети ИНТЕРНЕТ [2]. В качестве примера такой задачи рассмотрим задачу распределения производительности купола по газовым скважинам [3].

Задача распределения производительности купола по газовым скважинам

Рассматривается сложная система, описывающая функционирование газового промысла. Газовый промысел обслуживает газовое месторождение, объекты добычи которого по геолого-техническим и территориальным признакам разделяются на несколько куполов. Каждый газовый купол состоит из ряда кустов газовых скважин. Газовые скважины одного купола обслуживаются установкой предварительной подготовки газа, и соединены между собой и установкой газопроводом. Процесс добычи газа описывается следующей схемой. Предполагается, что начальное пластовое давление (давление на забое любой скважины) купола известно. Объем добычи газа из скважины регулируется системой кранов-регуляторов, при этом очевидно, что при открытых кранах скважина дает максимальный объем добычи, но при этом устьевое давление скважины будет минимально, а при закрытых кранах – объем добычи газа минимален, а устьевое давление скважины максимально. В общем случае функция, определяющая устьевое давление газа скважины от объема добытого газа, является квадратичной монотонно невозрастающей функцией. Так как изменение пластового давления газа происходит достаточно медленно, то в данной работе предполагается, что на выбранном интервале планирования можно пренебречь квадратичной составляющей и считать, что функции, определяющие зависимость забойного давления скважины от объема добываемого газа на заданном интервале времени, линейные. Предполагается, что известен плановый объем газа, который должен поступать на установку предварительной подготовки газа, и заданы «эталонные» значения давления для каждой скважины. Под «эталонным» давлением здесь понимается устьевое давление скважины, которое способствует качественной работе скважины. Как правило, эталонные давления скважин одного купола близки друг другу. Требуется определить условия эффективного функционирования рассматриваемой системы, которые связаны с выполнением требований по плановому объему добываемого газа и стремлением получить устьевые давления скважин, близкие к эталонным.

Пусть $J=\{1,2,\ldots,n\}$ – множество скважин. Для каждой скважины заданы величины $P_j^+, P_j^-, Q_j^+, Q_j^-$, определяющие соответственно допустимые диапазоны изменения давлений и дебитов скважин, $j\in J$. Для установки предварительной подготовки газа заданы величины P^+, P^-, Q^+, Q^-, определяющие соответственно допустимые диапазоны изменения давления и объема газа, поступающего в единицу времени. Заданы линейные функции $f_j(x_j)=a_j x_j + b_j,\ j\in J,$ определяющие для каждой скважины зависимости величин объемов добываемого газа от давления. Предполагается, что задан π – плановый объем газа, который должен поступать на установку в единицу времени, и известны величины ρ_j, определяющие эталонные значения устьевого давления для скважин, $j\in J$.

Требуется найти такой вектор $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где x_j – давление, которое должно быть установлено на скважине *j*, $j\in J$, для него выполняются ограничения:

$$P_j^- \le x_j \le P_j^+,\ j\in J, \tag{1}$$

$$Q_j^- \le f_j(x_j) \le Q_j^+,\ j\in J, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j\in J\cup\{0\}, \tag{3}$$

и достигает минимального значения критерий:

$$F(\vec{x})=\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j x_j + b_j)-\pi\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j-\rho_j)\right)^2 \to \min. \tag{4}$$

Здесь ограничения (1) определяют предельные значения давления на скважинах, а ограничения (2) – предельные объемы газа, добываемого со скважин, ограничения (3) являются естественными условиями на переменные.

После преобразований задача (1)-(4) может быть сведена к виду:

$$\Phi(\vec{x})=\min\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x_i-\alpha\right)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\rho_i)^2 \mid c_i\le x_i\le d_i, i=\overline{1,n},\right\}, \tag{5}$$

где $\alpha=\sum_{j=1}^{n}b_j-\pi,\ c_j=\max(P_j^-, P^-, f_j^-(Q_j^+)),\ d_j=\min(.P_j^-, P^-, f_j^-(Q_j^-))$.

Замечание 1

Давление на входе установки предварительной подготовки газа y зависит от объема поступившего газа как $f(y)=a_0 y+b_0$. Учитывая, что скважины и установка предварительной подготовки газа соединены общей трубой, то устьевые давления газа во всей системе будут выравниваться. Отсюда в качестве эталонных давлений, так как объем планируемой добычи равен π, могут быть выбраны величины $\rho_j=\dfrac{\pi-b_0}{a_0},\ j\in J$.

Алгоритм решения

Для решения задачи (5) могут быть применены классические методы решения задач квадратичного программирования (см., например, [4]). Однако специфика рассматриваемых задач – область допустимых решений задается совокупностью двусторонних ограничений на переменные, а критерии представляют собой суммы квадратов отклонений переменных и сумм переменных от заданных величин – позволила для их решения предложить эффективный алгоритм с вычислительной сложностью $O(n^2)$.

Рассмотрим выражение:

$$\frac{\partial\Phi(\vec{x})}{\partial x_i}=2a_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_j x_j-\alpha\right)+2(x_i-\rho_i)=0. \tag{6}$$

Домножим на a_i :

$$a_i^2(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \alpha) + (a_i x_i - a_i \rho_i) = 0.$$

Просуммируем по *i*:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \alpha) + (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \rho_i) = 0.$$

Отсюда получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1}\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i \rho_i\right). \quad (7)$$

Подставив (7) в (6), получим

$$x_i^* = \rho_i + a_i \alpha - \frac{a_i}{A\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + 1}\left(\alpha \sum_{j=1}^{n} a_i^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j \rho_j\right), \; i = \overline{1,n}. \quad (8)$$

Если вектор $\vec{x}^*$ удовлетворяет ограничениям задачи (5), то он определяет ее решение. Если нет, то переменные, которые вышли за пределы ограничений задачи (5), принимают соответствующие граничные значения, и исключаются из рассмотрения. Сокращенная задача решается заново. Алгоритм имеет вычислительную сложность $O(n^2)$.

Оптимальность алгоритма

Покажем, что найденное решение оптимально:

Из математического анализа известно (критерий Сильвестра), что для функции нескольких переменных необходимым и достаточным условием существования локального минимума является:

1) обращением в 0 частных производных первого порядка;
2) положительность главных миноров матрицы частных производных второго порядка.

Первое условие выполняется (по построению точек x_i^* проверим выполнение второго условия):

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_i^{2'}} = 2a_i^2 + 2, \; i = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_i' \partial x_j'} = 2a_i a_j, \; i \neq j.$$

Рассмотрим главный минор порядка *m:*

$$M^m = \begin{vmatrix} 2a_1^2 + 2 & 2a_1 a_2 & \dots & 2a_1 a_m \\ 2a_2 a_1 & 2a_2^2 + 2 & & 2a_2 a_m \\ \vdots & & & \\ 2a_m a_1 & 2a_m a_2 & \dots & 2a_m^2 + 2 \end{vmatrix} = (2)^m \begin{vmatrix} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_m \\ a_2 a_1 & a_2^2 + 1 & & a_2 a_m \\ \vdots & & & \\ a_m a_1 & a_m a_2 & \dots & a_m^2 + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)^m a_1 \begin{vmatrix} a_1 + \frac{1}{a_1} & a_2 & \dots & a_m \\ a_2 a_1 & a_2^2 + 1 & & a_2 a_m \\ \vdots & & & \\ a_m a_1 & a_m a_2 & \dots & a_m^2 + 1 \end{vmatrix} = (2)^m a_1^2 \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1^2} & a_2 & \dots & a_m \\ a_2 & a_2^2 + 1 & & a_2 a_m \\ \vdots & & & \\ a_m & a_m a_2 & \dots & a_m^2 + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)^m a_1^2 a_2^2 \dots a_m^2 \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1^2} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{a_2^2} & & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 + \frac{1}{a_m^2} \end{vmatrix}.$$

Эта матрица линейными преобразованиями сводится к диагональной, с диагональными элементами > 0:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1^2} & -\frac{1}{a_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & -\frac{1}{a_3^2} & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \dots & 1 + \frac{1}{a_m^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1^2} & -\frac{1}{a_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & -\frac{1}{a_3^2} & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 + \frac{a_1^2}{a_2^2} & & \dots & 1 + \frac{1}{a_m^2} \end{vmatrix} \dots \text{ и т.д.}$$

$\Rightarrow \det M^m > 0$, так как определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. Таким образом, второе условие выполнено, следовательно, точка $(x_1^*, x_2^* \dots x_i^* \dots x_n^*)$ является точкой локального минимума. По каждой из переменных функция является квадратичной и при удалении от точки минимума строго возрастает.

Таким образом, если точка $(x_1^*, x_2^* \dots x_i^* \dots x_n^*)$ попадает в область, определенную в (5), то это оптимальное решение. Если точка $(x_1^*, x_2^* \dots x_i^* \dots x_n^*)$ лежит за пределами области, то наилучшее значение следует искать на границе, наиболее близкой к точке минимума.

Замечание 2

Нетрудно показать, что для более общей задачи с положительными коэффициентами A, B и k_i:

$$\Phi(\vec{x}) = \min\left\{ A(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \alpha)^2 + B\sum_{i=1}^{n} k_i (x_i - \rho_i)^2 \mid c_i \le x_i \le d_i, i = \overline{1,n} \right\},$$

решение находится с помощью соотношений:

$$x_i^* = \frac{1}{B}\left(B\rho_i + A\alpha\frac{a_i}{k_i} - \frac{A\frac{a_i}{k_i}}{A\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{k_j} + B}\left(A\alpha\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{k_j} + B\sum_{j=1}^{n} a_j \rho_j \right)\right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Библиографический список

1. **Прилуцкий, М.Х.** Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования // Известия академии наук. Теория и системы управления. 2007. №1. С. 78–82.
2. **Прилуцкий, М.Х.** Многокритериальная задача распределения производительности купола по газовым скважинам / М.Х. Прилуцкий, Е.В. Васильев, В.Е. Костюков // Системы управления и информационные технологии. 2007. № 3.2(29). С. 291–296.
3. **Афраймович, Л.Г.** Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах / Л.Г. Афраймович, М.Х. Прилуцкий //Автоматика и телемеханика. 2006. №6. С. 194–205.
4. **Зуховицкий, С.И.** Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеев. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1967. – 460 с.

Дата поступления
в редакцию 02.02.2010

M.Kh. Prilutskii , M.S. Kulikov

ABOUT ONE SPECIAL TASK OF QUADRATIC PROGRAMMING

In this work is considered a special class of quadratic programming problems for the solving of which an algorithm with computation complexity O(n^2) was elaborated.

Key words: special task of quadratic programming, analytical solution, optimality.