

---

## НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ

---

УДК 629.113

В.Н. Кравец, Р.А. Мусарский

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЧЛЕНЁННОГО АВТОТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Предлагается пространственная математическая модель сочленённого автотранспортного средства, разработанная на основе использования квазиординат, нашедших широкое применение для исследования неголономных систем.

*Ключевые слова:* математическая модель, квазиординаты, сочленённое транспортное средство, псевдоскольжение колеса, боковой увод.

Математическая модель предназначена для определения показателей управляемости и устойчивости специализированных автотранспортных средств, создаваемых на базе вне дорожных карьерных самосвалов особо большой грузоподъемности. Были разработаны математические модели для нескольких специализированных автотранспортных средств. Из всех рассмотренных моделей наибольшей общностью обладает модель буксировщика карьерных самосвалов, представляющего сочлененное транспортное средство, которое состоит из тягача-буксировщика и буксируемого им карьерного самосвала или любой другой транспортно-технологической машины, используемой при разработке полезных ископаемых открытым способом.

Пространственная шестиколесная механическая модель системы буксировщик – буксируемый автомобиль представлена на рис. 1 [3, 7]. В основу разработки пространственной модели положен метод квазиординат, развитый Н.А. Фуфаевым [8, 9].

Для описания качения эластичного колеса, нагруженного продольной и боковой силами, использованы обобщенные гипотезы продольного псевдоскольжения (крипа) и бокового увода [4, 12].

Количественной характеристикой продольного псевдоскольжения является величина

$$\varepsilon = (V - r_{k0}\omega) / V, \quad (1)$$

где  $V$  – скорость центра колеса;  $r_{k0}$  – радиус свободного колеса;  $\omega$  – угловая скорость вращения колеса.

При малых значениях крипа  $\varepsilon$  между ним и продольной силой  $F_x$  – силой сопротивления крипу имеет место линейная зависимость

$$F_x = -K_x \varepsilon, \quad (2)$$

где  $K_x$  – коэффициент сопротивления крипу.

Зависимость (2) справедлива при постоянной нормальной силе  $F_z$ , действующей на колесо. Изменение нормальной нагрузки на колесо оказывает влияние на радиус качения колеса, которое учитывают в обобщенной гипотезе крипа [4]:

$$F_x = -K_x(V - r_{k*}\omega)/V + K_x\lambda_z(z - z_*),$$

где  $r_{k*}$  – радиус свободного качения колеса при статической нагрузке;  $\lambda_z$  – коэффициент, учитывающий влияние на крив радиальной (нормальной) деформации упругого колеса;  $z - z_*$  – нормальная деформация упругого колеса.

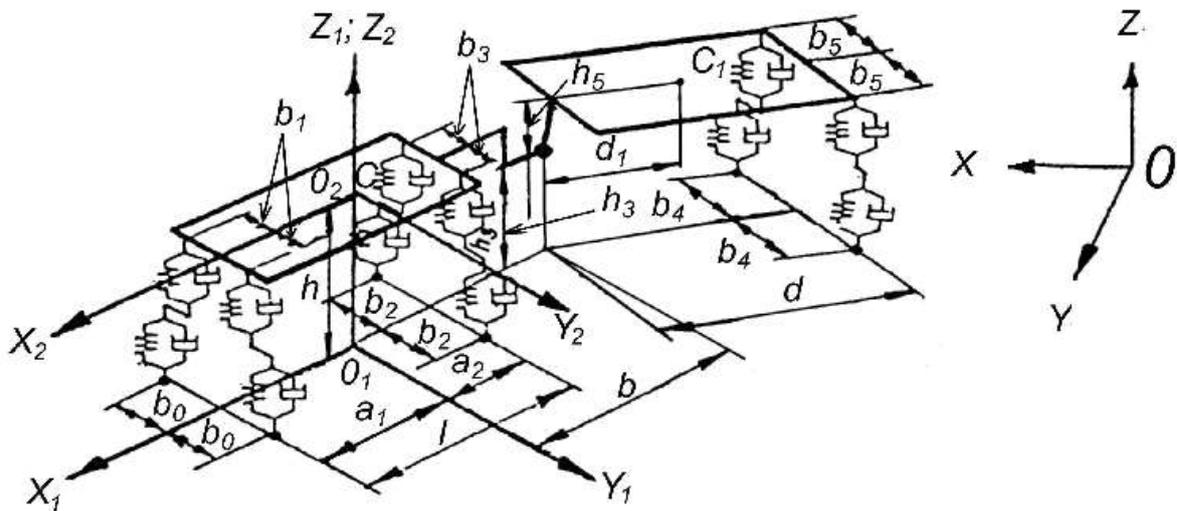


Рис. 1. Математическая модель системы буксировщик – буксируемый автомобиль

В простейшей гипотезе увода взаимосвязь между боковой силой  $F_y$  и вызываемым ею углом увода  $\delta$  выражается линейной зависимостью [4]

$$F_y = -K_y\delta,$$

где  $K_y$  – коэффициент сопротивления уводу.

Величину  $\delta$  определяют из соотношения

$$\operatorname{tg}\delta \approx \delta = V_y / V, \quad (3)$$

где  $V_y$  и  $V$  – поперечная и продольная составляющие скорости центра колеса соответственно.

Линейная зависимость между  $F_y$  и  $\delta$  справедлива для малых углов увода ( $\delta \leq 0,05$  рад). Нелинейная связь может быть аппроксимирована несколькими выражениями [1, 4, 5, 6]. В данной работе использована зависимость

$$F_y = -K_y\delta \frac{\varphi F_z}{\sqrt{(\varphi F_z)^2 + (K_y\delta)^2}},$$

где  $K_y$  – коэффициент сопротивления уводу на линейном участке зависимости  $F_y = f(\delta)$ ;  $\delta$  – угол увода;  $\varphi$  – коэффициент сцепления колеса с опорной поверхностью;  $F_z$  – нормальная сила, действующая на колесо.

При составлении математической модели приняты следующие допущения:

- 1) поддресоренные части буксировщика и буксируемого автомобиля представлены в виде двух шарнирно-сочлененных твердых тел, соединенных посредством шести подвесок с колесами;
- 2) неподресоренные части (колеса) заданы в виде материальных точек;
- 3) ведущие колеса имеют моменты инерции, приложенные в плоскости их качения;
- 4) рулевое управление жесткое, лишено люфтов и инерционности;
- 5) характеристики подвесок и амортизаторов нелинейные;
- 6) крутящие моменты на ведущих колесах равны;

- 7) углы продольного и поперечного кренов подрессоренной массы малы;
- 8) нелинейные упругие характеристики шин аппроксимируются кусочно-линейной функцией;
- 9) углы поворота управляемых колес и крутящие моменты на ведущих колесах – заданные функции времени.

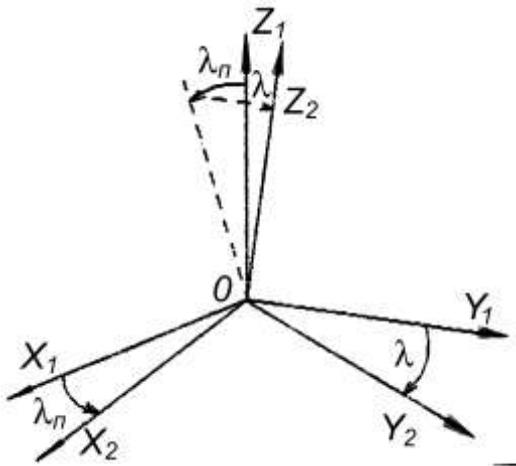


Рис. 2. Системы координат

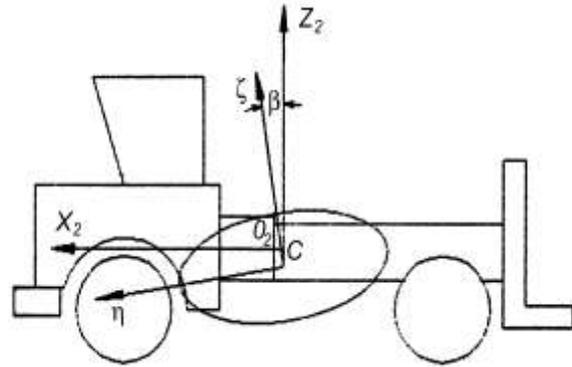


Рис. 3. Эллипсоид инерции буксировщика

Системы координат показаны на рис. 2, эллипсоид инерции буксировщика – на рис. 3. Углы поворота управляемых колес связаны между собой соотношением [11]

$$\text{ctg}\theta_n - \text{ctg}\theta_n = 2b_0 / l .$$

Связь между обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и их производными  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  и квазикоординатами  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  задана уравнениями (3):

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_j &= \sum_{s=1}^n a_{js}(q, t) \dot{q}_s + a_j(q, t); \\ \dot{q}_s &= \sum_{i=1}^n b_{is}(q, t) \dot{\pi}_i + b_s(q, t). \end{aligned} \tag{4}$$

Как показано в [9], уравнение Лагранжа второго рода в квазикоординатах имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_k} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_k} + \sum_{j=1}^n (\gamma_{kij} \dot{\pi}_j + \gamma_{kj}) \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_i} = Q_k - \frac{\partial R}{\partial \dot{\pi}_k}, \tag{5}$$

где  $L^* = T^* - \Pi$  – функция Лагранжа;  $T^*$  – выражение кинетической энергии при переходе к квазискоростям;  $\Pi$  – выражение потенциальной энергии;  $Q_k$  – обобщенная сила на виртуальном перемещении  $\delta\pi_k$ ;  $R(q, \dot{\pi})$  – диссипативная функция Рэля, учитывающая рассеивание механической энергии из-за наличия сил вязкого трения;  $\frac{\partial L^*}{\partial \pi_k} = \frac{\partial T^*}{\partial q_s} b_{sk}$  – оператор,

который для истинных координат совпадает с операцией частного дифференцирования по соответствующей координате;  $\gamma_{kij}$  и  $\gamma_{kj}$  – коэффициенты, зависящие от уравнений связи между обобщенными координатами и квазикоординатами, и не зависящие от движения системы.

Для получения уравнений движения математической модели необходимо составить выражения для кинетической и потенциальной энергий, функции Рэля и обобщенных сил, действующих на систему.

По теореме Кенига [9], кинетическая энергия системы буксировщик – буксируемый автомобиль равна

$$T = T_{\Pi} + T_{\Pi_1} + \sum_{i=1}^6 T_i, \quad (6)$$

где  $T_{\Pi}$  и  $T_{\Pi_1}$  – кинетическая энергия подрессоренных масс буксировщика и буксируемого автомобиля соответственно;  $T_i$  – кинетическая энергия  $i$ -го приведенного колеса.

После подстановки в уравнение (6) выражений для кинетических энергий  $T_{\Pi}$ ,  $T_{\Pi_1}$  и  $T_i$  получаем формулу для кинетической энергии модели в развернутом виде:

$$\begin{aligned} T^* = & \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} [I_A p^2 + I_B q^2 + I_C r^2] + \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \\ & + \frac{1}{2} [I_{A_1} p_1^2 + I_{B_1} q_1^2 + I_{C_1} r_1^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_{\kappa_i} V_{\kappa_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 T_{B_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m$  и  $m_1$  – подрессоренные массы буксировщика и буксируемого автомобиля соответственно;  $m_{\kappa_i}$  – приведенная (неподрессоренная) масса  $i$ -го колеса;  $V_C$  и  $V_{C_1}$  – скорости движения центров масс подрессоренных частей буксировщика и буксируемого автомобиля соответственно;  $V_{\kappa_i}$  – скорость движения центра  $i$ -го колеса;  $I_A, I_B, I_C, I_{A_1}, I_{B_1}, I_{C_1}$  – главные центральные моменты инерции подрессоренных частей буксировщика и буксируемого автомобиля;  $p, q, r, p_1, q_1, r_1$  – проекции мгновенных угловых скоростей  $\omega_c$  и  $\omega_{c_1}$  подрессоренных частей на главные оси центральных эллипсоидов инерции и буксировщика и буксируемого автомобиля;  $T_{B_i}$  – кинетическая энергия вращательного движения  $i$ -го колеса.

Для перехода к уравнениям (5) в квазикоординатах в качестве кинематических характеристик выбраны  $\dot{\pi}_i$  ( $i = \overline{1, 18}$ ), связанные с обобщенными скоростями следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 = \dot{z}; \quad \dot{\pi}_2 = \dot{\lambda}_{\Pi}; \quad \dot{\pi}_3 = \dot{\lambda}; \quad \dot{\pi}_4 = \dot{\gamma}; \quad \dot{\pi}_5 = -\dot{x} \sin \gamma + \dot{y} \cos \gamma; \quad \dot{\pi}_6 = -\dot{x} \cos \gamma + \dot{y} \sin \gamma; \\ \dot{\pi}_7 = \dot{\theta}_{\Pi}; \quad \dot{\pi}_8 = \dot{z}_1; \quad \dot{\pi}_9 = \dot{z}_2; \quad \dot{\pi}_{10} = \dot{z}_3; \quad \dot{\pi}_{11} = \dot{z}_4; \quad \dot{\pi}_{12} = \dot{z}_5; \quad \dot{\pi}_{13} = \dot{z}_6; \\ \dot{\pi}_{14} = \dot{\phi}_{\Pi}; \quad \dot{\pi}_{15} = \dot{\phi}_{\Pi}; \quad \dot{\pi}_{16} = \dot{\lambda}_{\Pi_1}; \quad \dot{\pi}_{17} = \dot{\lambda}_1; \quad \dot{\pi}_{18} = \dot{\gamma}_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя выражения (4) в (7) с учетом введенных соотношений (8), получим уравнения кинетической энергии в квазикоординатах:

$$\begin{aligned} T_{\Pi}^* = & \frac{1}{2} m \left[ \dot{\pi}_1^2 + (h\dot{\pi}_2 - h\lambda\dot{\pi}_4 + \dot{\pi}_6)^2 + (h\dot{\pi}_3 + h\lambda_{\Pi}\dot{\pi}_4 + \dot{\pi}_5)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} I_A \left[ \dot{\pi}_3 + (\lambda_{\Pi} + \beta)\dot{\pi}_4 \right]^2 + \frac{1}{2} I_B (\dot{\pi}_2 - \lambda\dot{\pi}_4)^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\pi}_4^2; \\ T_{\Pi_1}^* = & \frac{1}{2} m_1 \left\{ \left[ \dot{\pi}_6 - h_3\dot{\pi}_2 + h_3\lambda\dot{\pi}_4 + (h_5\dot{\pi}_{16} - h_5\lambda_1\dot{\pi}_{18}) \cos \gamma_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (h_5\dot{\pi}_{17} - (d_1 - h_5\lambda_{\Pi_1})\dot{\pi}_{18}) \sin \gamma_0 \right]^2 + \left[ \dot{\pi}_5 - (b + \lambda_{\Pi}h_3)\dot{\pi}_4 - h_3\dot{\pi}_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (h_5\lambda_1\dot{\pi}_{18} - h_5\dot{\pi}_{16}) \sin \gamma_0 + (h_5\dot{\pi}_{17} - (d_1 - h_5\lambda_{\Pi_1})\dot{\pi}_{18}) \cos \gamma_0 \right]^2 + \left[ \dot{\pi}_1 + b\dot{\pi}_2 + d_1\dot{\pi}_{16} \right]^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2} I_{A_1} \left[ \dot{\pi}_{17} + (\lambda_{\Pi_1} + \beta_1)\dot{\pi}_{18} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{B_1} (\dot{\pi}_{16} - \lambda_1\dot{\pi}_{18})^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \dot{\pi}_{18}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1^* &= \frac{1}{2} m_{k_1} \left[ (\dot{\pi}_5 + a_1 \dot{\pi}_4)^2 + (\dot{\pi}_6 + b_0 \dot{\pi}_4)^2 + \dot{\pi}_8^2 \right] + \frac{1}{2} I_{k_1} \left[ (\dot{\pi}_6 + b_0 \dot{\pi}_4) / r_k \right]^2 ; \\
 T_2^* &= \frac{1}{2} m_{k_2} \left[ (\dot{\pi}_5 + a_1 \dot{\pi}_4)^2 + (\dot{\pi}_6 - b_0 \dot{\pi}_4)^2 + \dot{\pi}_9^2 \right] + \frac{1}{2} I_{k_2} \left[ (\dot{\pi}_6 - b_0 \dot{\pi}_4) / r_k \right]^2 ; \\
 T_3^* &= \frac{1}{2} m_{k_3} \left[ (\dot{\pi}_5 - a_2 \dot{\pi}_4)^2 + (\dot{\pi}_6 + b_2 \dot{\pi}_4)^2 + \dot{\pi}_{10}^2 \right] + \frac{1}{2} I_{k_3} \dot{\pi}_{14}^2 ; \\
 T_4^* &= \frac{1}{2} m_{k_4} \left[ (\dot{\pi}_5 - a_2 \dot{\pi}_4)^2 + (\dot{\pi}_6 - b_2 \dot{\pi}_4)^2 + \dot{\pi}_{11}^2 \right] + \frac{1}{2} I_{k_4} \dot{\pi}_{15}^2 ; \\
 T_5^* &= \frac{1}{2} m_{k_5} \left\{ \left[ \dot{\pi}_6 - h_3 \dot{\pi}_2 + h_3 \lambda \dot{\pi}_4 + (h_4 \dot{\pi}_{16} - (h_4 \lambda_1 - b_4) \dot{\pi}_{18}) \cos \gamma_0 + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (h_4 \dot{\pi}_{17} - (d_1 - h_4 \lambda_{n_1}) \dot{\pi}_{18}) \sin \gamma_0 \right]^2 + \left[ \dot{\pi}_5 - (b + \lambda_n h_3) \dot{\pi}_4 - h_3 \dot{\pi}_3 \right]^2 + \right. \\
 &+ \left. \left[ (h_4 \lambda_1 - b_4) \dot{\pi}_{18} - h_4 \dot{\pi}_{16} \right] \sin \gamma_0 + \left[ (h_4 \dot{\pi}_{17} - (d - h_4 \lambda_{n_1}) \dot{\pi}_{18}) \cos \gamma_0 \right]^2 + \dot{\pi}_{12}^2 \right\} ; \\
 T_6^* &= \frac{1}{2} m_{k_6} \left\{ \left[ \dot{\pi}_6 - h_3 \dot{\pi}_2 + h_3 \lambda \dot{\pi}_4 + (h_4 \dot{\pi}_{16} - (h_4 \lambda_1 + b_4) \dot{\pi}_{18}) \cos \gamma_0 + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (h_4 \dot{\pi}_{17} - (d - h_4 \lambda_{n_1}) \dot{\pi}_{18}) \sin \gamma_0 \right]^2 + \left[ \dot{\pi}_5 - (b + \lambda_n h_3) \dot{\pi}_4 - h_3 \dot{\pi}_3 \right]^2 + \right. \\
 &+ \left. \left[ (h_4 \lambda_1 + b_4) \dot{\pi}_{18} - h_4 \dot{\pi}_{16} \right] \sin \gamma_0 + \left[ (h_4 \dot{\pi}_{17} - (d - h_4 \lambda_{n_1}) \dot{\pi}_{18}) \cos \gamma_0 \right]^2 + \dot{\pi}_{13}^2 \right\} .
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы может быть записана как сумма потенциальных энергий ее составных частей:

$$\Pi = \Pi_n + \Pi_{n_1} + \sum_{i=1}^6 \Pi_i + \sum_{i=1}^6 \Pi_{n_i} + \sum_{i=1}^6 \Pi_{ш_i} ,$$

где  $\Pi_n$  и  $\Pi_{n_1}$  – соответственно потенциальная энергия подрессоренных частей буксировщика и буксируемого автомобиля;  $\Pi_i$  – потенциальная энергия  $i$ -го приведенного колеса;  $\Pi_{n_i}$  – потенциальная энергия  $i$ -го упругого элемента подвески;  $\Pi_{ш_i}$  – потенциальная энергия шины  $i$ -го колеса.

$$\begin{aligned}
 \Pi &= mgz + m_1 g \left( z + b \lambda_n + d \lambda_{n_1} \right) + \sum_{i=1}^6 m_{k_i} g z_i + \\
 &+ \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{\Delta_{n_i}} F_{n_i}(\Delta_{n_i}) d\Delta_{n_i} \right) + \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{\Delta_{ш_i}} F_{ш_i}(\Delta_{ш_i}) d\Delta_{ш_i} \right) ,
 \end{aligned}$$

где  $F_{n_i}(\Delta_{n_i})$  и  $F_{ш_i}(\Delta_{ш_i})$  – нелинейные силы упругости гидропневматического упругого элемента  $i$ -й подвески и шины  $i$ -го колеса соответственно;  $\Delta_{n_i}$  и  $\Delta_{ш_i}$  – деформация (прогиб)  $i$ -го упругого элемента подвески и  $i$ -й шины колеса соответственно.

С учетом введенных обозначений деформации упругих элементов подвески и шин рассчитывают по выражениям:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{n_1} &= \pi_1 - a_1 \pi_2 + b_1 \pi_3 - l_1 - \pi_8 ; \Delta_{n_2} = \pi_1 - a_1 \pi_2 - b_1 \pi_3 - l_2 - \pi_9 ; \\
 \Delta_{n_3} &= \pi_1 + a_2 \pi_2 + b_3 \pi_3 - l_3 - \pi_{10} ; \Delta_{n_4} = \pi_1 + a_2 \pi_2 - b_3 \pi_3 - l_4 - \pi_{11} ;
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Delta_{n_5} = \pi_1 + b \pi_2 - h_3 + h_4 + d \pi_{16} + b_5 \pi_{17} - l_5 - \pi_{12} ; \Delta_{n_6} = \pi_1 + b \pi_2 - h_3 + h_4 + d \pi_{16} - b_5 \pi_{17} - l_6 - \pi_{13} ,$$

где  $l_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) – длина свободного  $i$ -го упругого элемента;

$$\begin{aligned} \Delta_{ш_1} &= \pi_8 - r_k ; \Delta_{ш_2} = \pi_9 - r_k ; \Delta_{ш_3} = \pi_{10} - r_k ; \\ \Delta_{ш_4} &= \pi_{11} - r_{k_1} ; \Delta_{ш_5} = \pi_{12} - r_{k_1} ; \Delta_{ш_6} = \pi_{13} - r_{k_1} , \end{aligned} \quad (10)$$

где  $r_k$  и  $r_{k_1}$  – радиусы качения колес буксировщика и буксируемого автомобиля соответственно.

Зависимость упругой силы гидропневматического упругого элемента подвески от хода поршня имеет вид [2]

$$F_{п_i} = \frac{p_0 l_0^{g_1} A}{(l_0 + \Delta_{п_i})^{g_1}} - \frac{q_0 L_0^{g_2} a}{(L_0 - \Delta_{п_i})^{g_2}} ,$$

где  $p_0$  и  $q_0$  – начальное давление в основном цилиндре и в цилиндре противодействия соответственно;  $l_0$  и  $L_0$  – высота приведенного столба газа в основном цилиндре и в цилиндре противодействия соответственно;  $g_1$  и  $g_2$  – показатели политропы процессов сжатия в основном цилиндре и в цилиндре противодействия (при малых скоростях перемещения поршня  $g_1 = g_2 = 1$ ) соответственно;  $\Delta_{п_i}$  – ход поршня.

По данным НИИ КГШ (г. Днепропетровск) [10], нелинейная упругая характеристика шины может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией с двумя линейными участками:

$$F_{ш} = \begin{cases} C'_{ш} \Delta_{ш_k} , & \text{при } \Delta_{ш_k} \leq \Delta'_{ш} \\ C'_{ш} \Delta'_{ш} + C''_{ш} (\Delta_{ш_k} - \Delta'_{ш}) , & \text{при } \Delta_{ш_k} > \Delta'_{ш} . \end{cases}$$

С учетом выражений (9) и (10) потенциальная энергия системы может быть записана в квазикоординатах в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi^* &= mg\pi_1 + mg(\pi_1 + b\pi_2 + d_1\pi_{16}) + m_{к_1} g\pi_8 + m_{к_2} g\pi_9 + m_{к_3} g\pi_{10} + m_{к_4} g\pi_{11} \\ &+ m_{к_5} g\pi_{12} + m_{к_6} g\pi_{13} + \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{\Delta_{п_i}} F_{п_i}(\Delta_{п_i}) d\Delta_{п_i} \right) + \sum_{i=1}^6 \left( \int_0^{\Delta_{ш_i}} F_{ш_i}(\Delta_{ш_i}) d\Delta_{ш_i} \right) . \end{aligned}$$

Функция Рэлея имеет вид

$$R = R_{п} + R_{ш} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 K_i \dot{\Delta}_{п_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 K_{ш_i} \dot{\Delta}_{ш_i}^2 ,$$

где  $R_{п}$  и  $R_{ш}$  – функции, учитывающие рассеивание энергии в амортизаторах подвески и в шинах колес соответственно;  $K_i$  – коэффициент сопротивления (вязкого трения)  $i$ -го амортизатора подвески;  $\dot{\Delta}_{п_i}$  – скорость деформации  $i$ -й подвески;  $K_{ш_i}$  – коэффициент демпфирования (вязкого трения) шины  $i$ -го колеса;  $\dot{\Delta}_{ш_i}$  – скорость деформации шины  $i$ -го колеса.

Для определения обобщенных сил записывают выражение для виртуальной работы:

$$\begin{aligned} \partial A &= F_{y_1} [\partial\pi_4 (a_1 \cos \theta_{п} - b_0 \sin \theta_{п}) + \partial\pi_5 \cos \theta_{п} - \partial\pi_6 \sin \theta_{п}] + \\ &+ F_{y_2} [\partial\pi_4 (a_1 \cos \theta_{л} - b_0 \sin \theta_{л}) + \partial\pi_5 \cos \theta_{л} - \partial\pi_6 \sin \theta_{л}] + \\ &+ F_{y_3} (\partial\pi_5 - a_2 \partial\pi_4) + F_{y_4} (\partial\pi_5 - a_2 \partial\pi_4) + F_{x_3} (\partial\pi_6 + b_2 \partial\pi_4 - r_d \partial\pi_{14}) + \\ &+ F_{x_4} (\partial\pi_6 - b_2 \partial\pi_4 - r_d \partial\pi_{15}) + F_{f_1} [-\partial\pi_4 (a_1 \sin \theta_{п} - b_0 \cos \theta_{п}) - \\ &-\partial\pi_5 \sin \theta_{п} - \partial\pi_6 \cos \theta_{п}] + F_{f_2} [-\partial\pi_4 (a_1 \sin \theta_{л} - b_0 \cos \theta_{л}) - \\ &-\partial\pi_5 \sin \theta_{л} - \partial\pi_6 \cos \theta_{л}] + F_{y_5} (\partial\pi_6 \sin \gamma_0 + \partial\pi_5 \cos \gamma_0 - d \partial\pi_{18}) + \\ &+ F_{y_6} (\partial\pi_6 \sin \gamma_0 + \partial\pi_5 \cos \gamma_0 - d \partial\pi_{18}) + F_{f_5} (-\partial\pi_6 \sin \gamma_0 + \partial\pi_5 \cos \gamma_0 - \\ &- b_4 \partial\pi_{18}) + F_{f_6} (-\partial\pi_6 \sin \gamma_0 + \partial\pi_5 \cos \gamma_0 + b_4 \partial\pi_{18}) , \end{aligned}$$

где  $F_{y_i} (i = \overline{1, 6})$  – сила сопротивления боковому уводу  $i$ -го колеса;  $F_{f_i} (i = \overline{1, 6})$  – сила сопротивления качению  $i$ -го колеса;  $F_{x_3}$  и  $F_{x_4}$  – силы сопротивления криву правого и левого ведущих колес;  $T_{к_3}$  и  $T_{к_4}$  – крутящие моменты на правом и левом ведущем колесах;  $\gamma_0 = \gamma - \gamma_1$  – угол складывания буксировщика (системы буксировщик – буксируемый автомобиль);  $r_d$  – динамический радиус ведущего колеса.

При расчете сил сопротивления криву величины крива по формуле (1) записывают для ведущих колес в квазикоординатах в следующем виде:

$$\varepsilon_3 = \frac{\dot{\pi}_6 + b_2 \dot{\pi}_4 - r_{ко} \dot{\pi}_{14}}{\dot{\pi}_6 + b_2 \dot{\pi}_4}; \quad \varepsilon_4 = \frac{\dot{\pi}_6 - b_2 \dot{\pi}_4 - r_{ко} \dot{\pi}_{14}}{\dot{\pi}_6 - b_2 \dot{\pi}_4}.$$

Необходимые для расчета сил сопротивления уводу углы колес вычисляют по формуле (3) через скорости  $V$  и  $V_y$ , записанные в квазикоординатах:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\dot{\pi}_6 \sin \theta_n - \dot{\pi}_5 \cos \theta_n - \dot{\pi}_4 (a_1 \cos \theta_n - b_0 \sin \theta_n)}{\dot{\pi}_5 \sin \theta_n + \dot{\pi}_6 \cos \theta_n + \dot{\pi}_4 (a_1 \cos \theta_n + b_0 \sin \theta_n)}, \\ \delta_2 &= \frac{\dot{\pi}_6 \sin \theta_l - \dot{\pi}_5 \cos \theta_l - \dot{\pi}_4 (a_1 \cos \theta_l + b_0 \sin \theta_l)}{\dot{\pi}_5 \sin \theta_l + \dot{\pi}_6 \cos \theta_l + \dot{\pi}_4 (a_1 \cos \theta_l - b_0 \sin \theta_l)}, \\ \delta_3 &= \frac{a_2 \dot{\pi}_4 - \dot{\pi}_5}{\dot{\pi}_6 + b_2 \dot{\pi}_4}; \quad \delta_4 = \frac{a_2 \dot{\pi}_4 - \dot{\pi}_5}{\dot{\pi}_6 - b_2 \dot{\pi}_4}; \\ \delta_5 &= \frac{V_1 \sin \gamma_0 + V_2 \cos \gamma_0 + h_4 \dot{\pi}_{17} + (h_4 \lambda_{n_1} - d)(\dot{\pi}_{18} - \dot{\pi}_4)}{V_1 \cos \gamma_0 - V_2 \sin \gamma_0 + h_4 \dot{\pi}_{16} - (h_4 \lambda_{n_1} - b_4)(\dot{\pi}_{18} - \dot{\pi}_4)}, \\ \delta_6 &= \frac{V_1 \sin \gamma_0 + V_2 \cos \gamma_0 + h_4 \dot{\pi}_{17} + (h_4 \lambda_{n_1} - d)(\dot{\pi}_{18} - \dot{\pi}_4)}{V_1 \cos \gamma_0 - V_2 \sin \gamma_0 + h_4 \dot{\pi}_{16} - (h_4 \lambda_{n_1} + b_4)(\dot{\pi}_{18} - \dot{\pi}_4)}, \end{aligned}$$

где  $V_1 = \dot{\pi}_6 - h_3 \dot{\pi}_2 + h_3 \dot{\pi}_4$ ;  $V_2 = \dot{\pi}_5 - (b + h_3 \lambda_n) \dot{\pi}_4 - h_3 \dot{\pi}_3$ .

Выполнив необходимое дифференцирование выражений кинетической и потенциальной энергий, а также функции Рэля и подставив полученные результаты вместе с выражениями для обобщенных сил в формулу (5), получают систему дифференциальных уравнений для описания движения пространственной модели буксировщика с буксируемым автомобилем:

- для поддресоренных масс:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{18} a_{1j} \ddot{\pi}_j &= -(m + m_1) g + \sum_{i=1}^6 (F_{n_i} + R_i); \\ \sum_{j=1}^{18} a_{2j} \ddot{\pi}_j &= -L_2 + T_2 - m g b + a_1 (F_{n_1} + F_{n_2} + R_1 + R_2) - \\ &- a_2 (F_{n_3} + F_{n_4} + R_3 + R_4) - b (F_{n_5} + F_{n_6} + R_5 + R_6); \\ \sum_{j=1}^{18} a_{3j} \ddot{\pi}_j &= -L_3 + T_3 - b_1 (F_{n_1} - F_{n_2} + R_1 - R_2) - b_3 (F_{n_3} - F_{n_4} + R_3 - R_4); \\ \sum_{j=1}^{18} a_{4j} \ddot{\pi}_j &= -L_4 + T_4 + Q_4 - \dot{\pi}_6 D_1 + \dot{\pi}_5 D_2; \quad \sum_{j=1}^{18} a_{5j} \ddot{\pi}_j = -L_5 + T_5 + Q_5 - \dot{\pi}_4 D_2; \\ \sum_{j=1}^{18} a_{6j} \ddot{\pi}_j &= -L_6 + T_6 + Q_6 + \dot{\pi}_4 D_1; \quad \sum_{j=1}^{18} a_{16j} \ddot{\pi}_j = -L_{16} + T_{16} - d (F_{n_5} + F_{n_6} + R_5 + R_6); \\ \sum_{j=1}^{18} a_{17j} \ddot{\pi}_j &= -L_{17} + T_{17} - b_5 (F_{n_5} - F_{n_6} + R_5 - R_6); \quad \sum_{j=1}^{18} a_{18j} \ddot{\pi}_j = -L_{18} + T_{18} + Q_{18}; \end{aligned}$$

- для неподрессоренных масс:

$$m_{k_1} \ddot{\pi}_8 = -m_{k_1} g + F_{п_1} - F_{ш_1} + R_1 - R_{ш_1}; m_{k_2} \ddot{\pi}_9 = -m_{k_2} g + F_{п_2} - F_{ш_2} + R_2 - R_{ш_2};$$

$$m_{k_3} \ddot{\pi}_{10} = -m_{k_3} g + F_{п_3} - F_{ш_3} + R_3 - R_{ш_3}; m_{k_4} \ddot{\pi}_{11} = -m_{k_4} g + F_{п_4} - F_{ш_4} + R_4 - R_{ш_4};$$

$$m_{k_5} \ddot{\pi}_{12} = -m_{k_5} g + F_{п_5} - F_{ш_5} + R_5 - R_{ш_5}; m_{k_6} \ddot{\pi}_{13} = -m_{k_6} g + F_{п_6} - F_{ш_6} + R_6 - R_{ш_6};$$

$$I_{k_3} \ddot{\pi}_{14} = Q_{14}; \quad I_{k_4} \ddot{\pi}_{15} = Q_{15}.$$

Разработанная пространственная модель системы буксировщик – буксируемый автомобиль может быть использована для исследования специализированных автотранспортных средств с различными конструктивными схемами и различных режимов движения.

В заключение следует отметить, что предлагаемая пространственная математическая модель системы буксировщик – буксируемый автомобиль обладает по сравнению с ранее разработанными математическими моделями автотранспортных средств наибольшей универсальностью, позволяющей учесть все конструктивные особенности, параметры и характеристики составных частей и разнообразные условия эксплуатации.

### Библиографический список

1. **Бухин, Б.Л.** Введение в механику пневматических шин / Б.Л. Бухин. – М.: Химия, 1988. – 224 с.
2. **Добрых, Л.И.** Создание и исследование прогрессивных пневмогидравлических подвесок автомобилей БелАЗ большой и особо большой грузоподъемности: автореферат дисс...канд. техн. наук: 05.05.03. – Минск, 1973. – 65 с.
3. **Кудряшов, Е.М.** Исследование устойчивости и управляемости буксировщиков карьерных автомобилей: автореферат дисс...канд. техн. наук: 05.05.03. – Нижний Новгород, 1993.–20 с.
4. **Левин, М.А.** Теория качения деформируемого колеса / М.А. Левин, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
5. **Литвинов, А.С.** Автомобиль: Теория эксплуатационных свойств / А.С. Литвинов, Я.Е. Фаробин. – М.: Машиностроение, 1989. – 237 с.
6. **Литвинов, А.С.** Управляемость и устойчивость автомобиля / А.С. Литвинов. – М.: Машиностроение, 1971. – 416 с.
7. **Могутнов, В.П.** Повышение устойчивости и управляемости специализированных автомобилей большой грузоподъемности: автореферат дисс...канд. техн. наук: 05.05.03. – Волгоград, 1987. – 19 с.
8. **Мусарский, Р.А.** Концепция твёрдого тела в теории движения колёсных экипажей / Р.А. Мусарский, Н.А. Фуфаев // АН СССР, Механика твёрдого тела. 1995. №3. С.65–74.
9. **Неймарк, Ю.И.** Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
10. Результаты статических испытаний серийной шины 18.00-25: Отчет о НИР / Науч.-исследоват. ин-т крупногабаритных шин. – Днепропетровск, 1978. – 14 с.
11. **Фалькевич, Б.С.** Теория автомобиля / Б.С. Фалькевич. – М.: Машгиз, 1963. – 239 с.
12. **Фуфаев, Н.А.** Простейшие теории качения колеса / Н.А. Фуфаев. – Горький: ГГУ им. Н.И. Лобачевского, 1984. – 27 с.

Дата поступления  
в редакцию 25.01.2010

**V.N. Kravetz, R.A. Musarskiy**

### MATHEMATICAL MODEL OF THE JOINTED VEHICLE

The spatial mathematical model of the jointed vehicle developed on the basis of using of quasi -coordinates, found wide applications for research of nonholonomic systems offered.

*Key words:* the mathematical model, quasi - coordinates, the jointed vehicle, creep, lateral withdrawal.