

УДК531.7.084/.085

А.А. Яковлев, А.В. Улюшкин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОДВИЖНОГО УЗЛА  
ТИПА “КОРОМЫСЛО”

Арзамасский политехнический институт (филиал) НГТУ им. Р.Е. Алексева

Рассматривается получение математической модели интегрального маятникового подвижного узла типа “коромысло”, которая в дальнейшем может быть использована для решения задач анализа и синтеза на стадии проектирования и разработки акселерометра.

*Ключевые слова:* математическая модель, передаточная функция, подвижный узел, интегральный акселерометр.

Разработано множество конструкций подвижных узлов микросистемных датчиков измерения ускорений. Но для всех ранее спроектированных конструкций характерен один существенный недостаток – недостаточность электростатической силы обратной связи. Это является препятствием для увеличения диапазона измерений.

Наиболее перспективным с этой точки зрения является конструктивная схема маятника типа “коромысло”. Подвижный узел типа “коромысло”, изображенный на рис. 1, является разновидностью интегральных маятников с более гибкими характеристиками. Принципиально такая схема может применяться с любым типом силового преобразователя, например, с электростатическим. Данная статья посвящена теоретическим основам построения подвижного узла интегрального акселерометра с использованием ЧЭ типа “коромысло”.

С целью установления математической модели чувствительного элемента акселерометра типа “коромысло” проведем оценку эффективного числа степеней свободы маятника. Отношение жесткости подвеса при изгибе относительно оси  $z$  к жесткости относительно оси  $y$  определяется квадратом отношения ширины подвеса к минимальной толщине подвеса:

$$\frac{G_{zox}}{G_{yox}} = \left( \frac{b_{п}}{c_{п\min}} \right)^2. \quad (1)$$

Ширина подвеса в рассматриваемой конструкции равна толщине маятника и имеет порядок  $b_{п}=1 \cdot 10^{-3}$  м, а минимальная толщина подвеса составляет  $c_{п\min}=5 \dots 10 \cdot 10^{-6}$  м. Таким образом, жесткость подвеса при изгибе в поперечном направлении превосходит жесткость в направлении оси чувствительности примерно на четыре порядка. Жесткость подвеса на кручение относительно оси  $x$ , а также жесткость растяжения (сжатия) в направлении этой же оси не соизмеримы с жесткостью в направлении оси чувствительности  $y$ , поскольку криволинейная форма короткого подвеса является чрезвычайно жесткой конструкцией в осевом направлении. Здесь следует отметить, что при снижении длины подвеса угловая жесткость увеличивается по линейному закону, а осевая – по кубическому.

Проведенная оценка позволяет сделать вывод, что подвижный узел, как динамическая система, имеет две степени свободы. Его положение определяется обобщенными координатами  $q_1=y$  и  $q_2=\alpha$ . Соответственно положение маятника определяется двумя координатами  $y$  и  $\alpha$ .

Дальнейшие исследования проведем с помощью уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i=1,2), \quad (2)$$

где  $T$  – кинетическая энергия;  $Q_i$  – обобщенная сила, соответствующая  $i$ -й обобщенной координате;  $q_i$  –  $i$ -я обобщенная координата.

Здесь обобщенные координаты ( $y_A$  – перемещение точки А вдоль оси  $y$ )

$$q_1 = y_A; q_2 = \alpha. \quad (3)$$

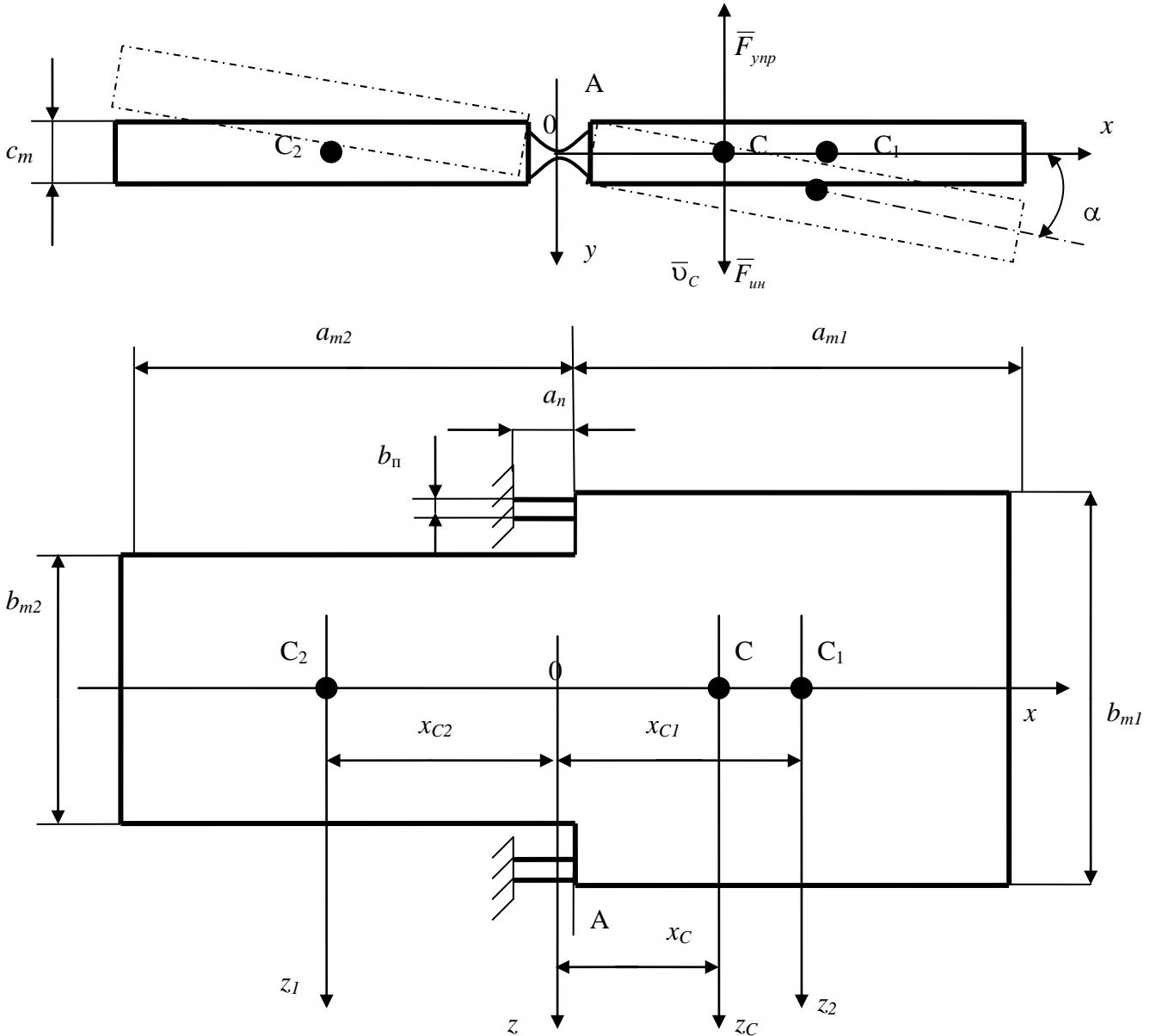


Рис. 1. Чувствительный элемент типа “коромысло”

Перепишем уравнение (2) с учетом (3):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial T}{\partial y_A} = Q_{y_A}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}. \end{cases} \quad (4)$$

Кинетическая энергия системы определяется следующим соотношением:

$$T = \frac{(m_1 + m_2)v_C^2}{2} + J_{z_C} \frac{\dot{\alpha}^2}{2}, \quad (5)$$

здесь

$$v_C = \dot{y}_C = \dot{y}_A + \left(x_C - \frac{a_n}{2}\right)\dot{\alpha}, \quad (6)$$

где

$$y_C = y_A + \left(x_C - \frac{a_n}{2}\right)\alpha. \quad (7)$$

В формулах (5) - (7) применены следующие обозначения:

$J_{z_C}$  - момент инерции относительно оси  $z$  в точке  $C$ , где  $C$  – центр масс;  $m_1$  и  $m_2$  – массы чувствительного элемента широкой и узкой части соответственно (“плечи коромысла”);  $v_C$  - скорость точки  $C$  относительно оси  $z$ ;  $a_n$  - длина подвеса;  $x_C$  – расстояние от начала координат до центра масс.

Расстояние от начала координат до центра масс определяются следующим образом:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad (8)$$

здесь

$$\begin{cases} m_2 = \rho a_{m2} b_{m2} c_m, & m_1 = \rho a_{m1} b_{m1} c_m, \\ x_2 = \frac{a_{m2} - a_n}{2}, & x_1 = \frac{a_{m1} - a_n}{2}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\rho$  - плотность кремния;  $a_{m2}$  и  $a_{m1}$  - длины “плеч коромысла”;  $b_{m2}$  и  $b_{m1}$  - ширина “плеч коромысла”;  $c_m$  - толщина маятника;  $x_1$  и  $x_2$  - расстояния от начала координат до центра масс “плеч коромысла”.

Подставив (9) в (8), получим

$$x_C = \frac{a_{m1} b_{m1} (a_{m1} + a_n) + a_{m2} b_{m2} (a_{m2} + a_n)}{2(a_{m1} b_{m1} + a_{m2} b_{m2})}. \quad (10)$$

Момент инерции  $J_{z_C}$  маятника относительно  $z_C$ :

$$J_{z_C} = J_{z_C}^{(1)} + J_{z_C}^{(2)}, \quad (11)$$

здесь

$$\begin{cases} J_{z_C}^{(1)} = J_{z_1} + m_1 \left(\frac{a_{m1} + a_n}{2} - x_C\right)^2; \\ J_{z_C}^{(2)} = J_{z_2} + m_2 \left(\frac{a_{m2} + a_n}{2} - x_C\right)^2, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} J_{z_1} = \frac{m_1}{12} (a_{m1}^2 + c_m^2), \\ J_{z_2} = \frac{m_2}{12} (a_{m2}^2 + c_m^2). \end{cases} \quad (13)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} J_{z_C} = (m_1 + m_2) & \left(\frac{c_m^2}{12} + \frac{a_n^2}{4} - a_n x_C + x_C^2\right) + m_1 \left(\frac{a_{m1}^2}{3} + \frac{a_{m1} a_n}{2} - a_{m1} x_C\right) + \\ & + m_2 \left(\frac{a_{m2}^2}{3} - \frac{a_{m2} a_n}{2} + a_{m2} x_C\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим частный случай, когда  $a_{m1} = a_{m2} = a_m$ . Тогда получим

$$x_1 = \frac{a_m + a_n}{2}, \quad x_2 = \frac{a_m - a_n}{2}, \quad (15)$$

$$x_c = \frac{b_{m1}(a_m + a_n) + b_{m2}(a_m - a_n)}{2(b_{m1} + b_{m2})}. \quad (16)$$

Момент инерции

$$J_{z_c} = \frac{m_1 + m_2}{12}(a_m^2 + c_m^2) + m_1 \left[ \frac{a_m + a_n}{2} - x_c \right]^2 + m_2 \left[ \frac{a_m - a_n}{2} + x_c \right]^2 \quad (17)$$

или

$$J_{z_c} = (m_1 + m_2) \left[ \frac{a_m^2}{3} + \frac{c_m^2}{12} + \frac{a_n^2}{4} - x_c(a_n - x_c) \right] + (m_1 + m_2) a_n \left( \frac{a_n}{2} - x_c \right). \quad (18)$$

Возвращаемся к общему случаю. Подставив (6), (7) и (14) в (5), получим

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{y}_A^2 + 2l_{ц} \dot{\alpha} \dot{y}_A + l_{ц}^2 \dot{\alpha}^2) + J_{z_c} \frac{\dot{\alpha}^2}{2}, \quad (19)$$

где  $l_{ц}$  - расстояние от центра масс до линии соединения “плеч коромысла”, определяемое следующим образом:

$$l_{ц} = x_c - \frac{a_n}{2}. \quad (20)$$

Подставив (19), (20) в (4), получим

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{y}_A + (m_1 + m_2) l_{ц} \ddot{\alpha} = Q_{y_A}, \\ (m_1 + m_2) l_{ц} \ddot{y}_A + [(m_1 + m_2) l_{ц}^2 + J_{z_c}] \ddot{\alpha} = Q_{\alpha}. \end{cases} \quad (21)$$

Обобщенная сила и обобщенный момент равны:

$$Q_{y_A} = m a_C - K_D \dot{y}_A - G y_A, \quad (22)$$

$$Q_{\alpha} = m a_C l_{ц} - K_{D\alpha} \dot{\alpha} - G_y \alpha, \quad (23)$$

где  $a_C$  - ускорение вдоль оси  $z$ ;  $K_D$ ,  $K_{D\alpha}$  - линейный и угловой абсолютные коэффициенты газодинамического демпфирования;  $G = 12 E_{[100]} J_x / a_n^3$ ,  $G_y = E_{[100]} J_y / a_n$   $G$ ,  $G_y$  - осевая и угловая жесткости подвеса.

Подставив (22), (23) в (21), получим

$$\begin{cases} m \dot{y}_A^2 + m l_{ц} \ddot{\alpha} + K_D \dot{y}_A + G y_A = m a_C, \\ m l_{ц} \dot{y}_A^2 + (J_{z_c} + m l_{ц}^2) \ddot{\alpha} + K_{D\alpha} \dot{\alpha} + G_y \alpha = m a_C l_{ц}. \end{cases} \quad (24)$$

Уравнения (24) можно записать в операторной форме:

$$\begin{cases} (m s^2 + K_D s + G) y_A + (m l_{ц} s^2) \alpha = m a_C, \\ (m l_{ц} s^2) y_A + [(J_{z_c} + m l_{ц}^2) s^2 + K_{D\alpha} s + G_y] \alpha = m a_C l_{ц}, \end{cases} \quad (25)$$

где  $s$  - оператор Лапласа.

Определим передаточную функцию маятника в виде отношения суммарного перемещения центра тяжести маятника к действующему ускорению, взятых в преобразованиях Лапласа:

$$W_{\text{чз}}(s) = \frac{\alpha_{\Sigma}(s)}{a(s)}. \quad (26)$$

Учитывая малость угловых перемещений (2-3 угловые минуты), суммарное перемещение центра тяжести маятника определим через угловую и линейную компоненты в следующем виде:

$$\alpha = \alpha_{\text{вр}} + y_c / l_{\text{ц}}. \quad (27)$$

Для определения угловой и линейной компонент перемещения центра тяжести маятника запишем детерминанты системы уравнений (25):

$$\left. \begin{aligned} \Delta(s) &= (ms^2 + K_{\text{д}}s + G)[(J_{Z_c} + ml^2)s^2 + K_{\text{дв}}s + G_y] - (ml_{\text{ц}}s^2)(ml_{\text{ц}}s^2), \\ \Delta_{\alpha}(s) &= (ms^2 + K_{\text{д}}s + G)(ml_{\text{ц}}a) - (ml_{\text{ц}}s^2)(ma), \\ \Delta_x(s) &= [(J_{Z_c} + ml_{\text{ц}}^2)s^2 + K_{\text{дв}}s + G_y](ma) - (ml_{\text{ц}}s^2)(ml_{\text{ц}}a). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Используя (26) для (27), определим передаточную функцию подвижного узла в окончательном виде

$$W_{\text{ны}}(s) = ml_{\text{ц}} \sum_{m=0}^{m=2} b_m s^m / \sum_{n=0}^{n=4} a_n s^n, \quad (29)$$

где коэффициенты передаточной функции находятся через параметры подвижного узла:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \left( \frac{G_y}{l_{\text{ц}}^2} + G \right), b_1 = \left( \frac{K_{\text{дв}}}{l_{\text{ц}}^2} + K_{\text{д}} \right), b_2 = \frac{J_{Z_c}}{l_{\text{ц}}^2}, a_0 = GG_y, a_1 = K_{\text{д}}G_y + K_{\text{дв}}G, \\ a_2 &= mG_y + (J_{Z_c} + ml_{\text{ц}}^2)G + K_{\text{д}}K_{\text{дв}}, a_3 = mK_{\text{дв}} + (J_{Z_c} + ml_{\text{ц}}^2)K_{\text{д}}, a_4 = mJ_{Z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Крутизну статической характеристики чувствительного элемента определим из (29) с учетом (30) при  $s = 0$ :

$$K_{\text{4ппоря}}^{\text{ст}} = \frac{ml_{\text{ц}}}{G_y} + \frac{m}{l_{\text{ц}}G}. \quad (31)$$

При рассмотрении математической модели подвижного узла интегрального акселерометра с подвесами, работающими на кручение, можно получить передаточную функцию, аналогичную (29), с той лишь разницей, что изгибную жесткость  $G_y$  следует заменить на жесткость для кручения  $G_{\text{кр}}$ . Таким образом, здесь нет принципиальных затруднений в построении математической модели ЧЭ.

Однако в практических конструкциях акселерометров в целях подавления влияний тех или иных боковых составляющих ЧЭ выполняют чисто осевого или чисто маятникового типа. При этом исключаются взаимные влияния между линейными и угловыми перемещениями, а система уравнений (26) распадается на два самостоятельных уравнения:

- для ЧЭ осевого типа  $m\ddot{y} + K_{\text{д}}\dot{y} + Gy = ma_c,$
- для ЧЭ маятникового типа  $J_{Z_c}\ddot{\alpha} + K_{\text{дв}}\dot{\alpha} + G_y\alpha = ma_c l_{\text{ц}},$

где  $a_c$  - компонента ускорения, действующего на корпус и ЧЭ акселерометра, представляющая собой входное воздействие в виде сложной функции времени.

Как правило, акселерометры выполняют для измерения одной компоненты, а для измерения полного ускорения строят блок из шести акселерометров: трех линейных и трех угловых. При разработке и исследовании акселерометров дифференциальные уравнения (25) и (26) удобно представить в виде передаточных функций, применив преобразование Лапласа. Передаточные функции эквивалентны дифференциальным уравнениям, т.е. также содержат исчерпывающую информацию о статических и динамических характеристиках разрабатываемых приборов. Передаточные функции чисто осевого и чисто маятникового ЧЭ можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_o(s) = y(s)/a(s) = \frac{m}{ms^2 + K_d s + G} = \frac{K_o}{\frac{1}{\omega_o^2} s^2 + 2\xi_o \frac{1}{\omega_o} s + 1}; \\ W_M(s) = \alpha(s)/a(s) = \frac{ml_u}{J_{z_c} s^2 + K_{дв} s + G_y} = \frac{K_M}{\frac{1}{\omega_M^2} s^2 + 2\xi_M \frac{1}{\omega_M} s + 1}, \end{array} \right. \quad (32)$$

где  $K_o = m/G$ ,  $K_M = ml_u/G_y$  - статические коэффициенты передачи осевого и маятникового ЧЭ;  $\xi_o = K_d/(2\sqrt{mG})$ ,  $\xi_M = K_{дв}/(2\sqrt{J_{z_c} G_y})$  - соответственно относительные коэффициенты демпфирования осевого и маятникового ЧЭ;  $\omega_o = \sqrt{G/m}$ ,  $\omega_M = \sqrt{G_y/J_{z_c}}$  - собственные частоты осевого и маятникового ЧЭ.

### Вывод

Данная статья содержит описание процедуры определения математической модели подвижного узла типа “коромысло”. Конечный результат представлен в виде передаточных функций второго порядка по двум обобщенным координатам.

### Библиографический список

1. **Вавилов, В.Д.** Интегральные датчики: учебник / В.Д. Вавилов; НГТУ. – Н. Новгород, 2003. – 503 с.
2. **Распопов, В.Я.** Микромеханические приборы / В.Я. Распопов. – Тула: Изд-во ГРИФ, 2004. – 476 с.

Дата поступления  
в редакцию 16.02.2010

**A.A. Yakovlev, A.V. Ulyushkin**

### MATHEMATICAL MODEL FOR INTEGRAL PENDULUM ROCKER

The objective of the paper is to develop mathematical model for pendulum rocker which can be afterwards applied for solving analysis and synthesis problems within design phase for integral accelerometer.

*Key words:* mathematical model, transfer function, rocker, integral accelerometer.