УДК 621. 378

П.И. Грушин[1], В.И. Логинов[2], Н.П. Ямпурин[1]

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА КОМБИНАЦИОННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ НА ОСНОВЕ РЯДОВ ФАРЕЯ

Арзамасский политехнический институт (филиал) НГТУ им. Р.Е. Алексеева[1],
Волжская государственная Академия водного транспорта[2]

Приводится сравнительная характеристика быстродействия алгоритмов расчета комбинационных составляющих при нелинейном преобразовании частоты на основе рядов Фарея. Анализируются вычислительные затраты алгоритмов без синтеза полного ряда Фарея, что позволяет решать задачи пораженности комбинационными частотами преобразователей частоты только на основе синтеза ближайших компонент к рабочим частотам исследуемых систем нелинейного преобразования частот.

Ключевые слова: преобразование частоты, комбинационные составляющие, цепные дроби, ряд Фарея.

Одной из важных задач при проектировании и анализе поведения систем нелинейного преобразования частот является уменьшение влияния комбинационных гармоник на полезный сигнал.

Для решения подобных задач широко используются графические [1–3], аналитические [4, 5] и алгоритмические методы [1, 9, 10]. Одним из эффективных методов расчета комбинационных составляющих при нелинейном преобразовании частоты являются методы на основе рядов Фарея [9, 10].

Предлагаются эффективные методы и алгоритмы решения задач анализа ближайших комбинационных частот. Основу предполагаемых методов составляет отыскание заданного соотношения смешиваемых частот преобразователя в базисе дробей Фарея с помощью аппарата цепных дробей и процедуры, в основе которой лежит базовая теорема Фарея-Коши, связывающая соседние дроби в ряде Фарея.

Цель работы - разработать эффективные методы анализа комбинационных составляющих и оценить их общую и алгоритмическую эффективность.

Рассмотрим задачу отыскания ближайшей дроби Фарея R/Q к заданному соотношению смешиваемых частот $q = f1/f2$ ($f1 \le f2$), минуя операцию синтеза всей последовательности Фарея [6].

Использование цепных дробей. Согласно теореме Дирихле в теории диофантовых приближений [7], для заданного q всегда существует такая дробь R/Q, что разность между ними может удовлетворять любой наперед заданной точности. Последовательность дробей Фарея Φ_k является последовательностью всех несократимых рациональных дробей, у которых знаменатель $Q \le k$, где k – порядок ряда Фарея. Поэтому при отыскании приближения для заданного дробью Фарея соотношения q, можно использовать аппарат цепных дробей [8].

Представим заданное соотношение смешиваемых частот $q \in 0,1$ конечной цепной дробью

$$q = [b_0; b_1, b_2, ..., b_n]. \tag{1}$$

Цепные дроби обладают тремя замечательными свойствами:

1. Любая подходящая дробь R_j/Q_j цепной дроби (1) является несократимой дробью ($j \in 1,n$).

2. Знаменатель подходящей дроби, согласно [8], растет как показательная функция от индекса j подходящей дроби:

$$Q_j \ge 2^{\frac{j-1}{2}}. \tag{2}$$

3. Реккурентность в определении подходящих дробей:

$$R_j = b_j R_{j-1} + R_{j-2}\ , \tag{3}$$

$$Q_j = b_j Q_{j-1} + Q_{j-2}\ , \tag{4}$$

где $j \geq 1$, $R_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$, $R_0=b_0$, $Q_0=1$.

Из свойства 1 можно сделать вывод, что любая подходящая дробь R_j/Q_j цепной дроби (1), являющейся приближением действительного числа $q \in 0,1$, принадлежит последовательности Фарея. Таким образом, задача отыскания приближения в базисе дробей Фарея состоит в разложении q в цепную дробь (1) [6, 8] с одновременным вычислением подходящих дробей R_j/Q_j согласно (3). Разложение числа q заканчивается, когда не будет выполняться условие

$$Q_j \leq k\ , \tag{5}$$

при этом подходящая дробь R_j/Q_j и есть найденная ближайшая дробь Фарея R_i/Q_i, $i \in 1, N_k$ [6] к q.

На рис. 1 приведена структурная схема алгоритма приближения q дробью Фарея. Максимальное количество итераций алгоритма на рис. 1 можно определить из (2) с учетом (5) по формуле

$$N_1 = 2\log_2 k + 1. \tag{6}$$

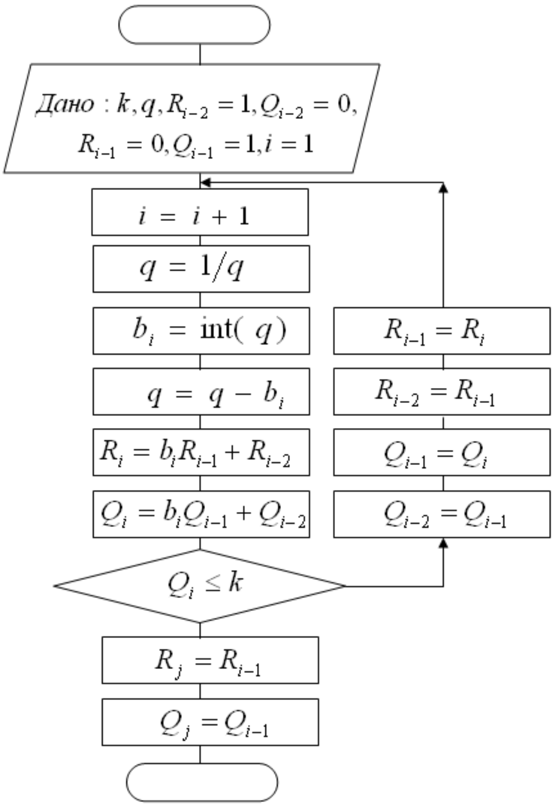

Рис. 1. Алгоритм приближения действительного числа дробью Фарея

Алгоритм Фарея-Коши. Второй задачей в определении ближайших дробей Фарея к заданному соотношению смешиваемых частот q является определение второго диофантова приближения. Найденная по приведенному на рис. 1 алгоритму дробь Фарея может удовлетворять условию

$$\frac{R_i}{Q_i} < q \tag{7}$$

либо условию

$$\frac{R_i}{Q_i} > q \quad , \tag{8}$$

где $i \in 1, N_k$ - номер дроби Фарея в ее последовательности [6].

Рассмотрим случай (7). Согласно основной теореме Фарея-Коши, определяющей связь соседних дробей Фарея [6], которая утверждает, что если $R_i/Q_i \in \Phi_k$, а Q_{i+1} - целое число, такое, что

$$k - Q_i < Q_{i+1} \leq k \tag{9}$$

и

$$R_i Q_{i+1} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ Q_i) \quad , \tag{10}$$

причем

$$R_{i+1} = \frac{R_i Q_{i+1} + 1}{Q_i} \quad . \tag{11}$$

Тогда R_{i+1}/Q_{i+1} является в Φ_k дробью, непосредственно следующей за R_i/Q_i в ряде Фарея. Выражения (9) и (10) представим в следующем виде:

$$\begin{cases} Q_{i+1} \leq k \\ Q_{i+1} > k - Q_i \end{cases} \quad , \tag{12}$$

$$R_i Q_{i+1} + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ Q_i) \quad . \tag{13}$$

Таким образом, задача нахождения дроби R_{i+1}/Q_{i+1}, непосредственно следующей за дробью R_i/Q_i, состоит в определении знаменателя Q_{i+1} путем решения сравнения (13) в ограничениях (12). Для этого преобразуем сравнение (13) в эквивалентное уравнение относительно двух переменных Q_{i+1} и m_x:

$$R_i Q_{i+1} + 1 = Q_i m_x \quad , \tag{14}$$

где m_x - неизвестный целочисленный множитель. Подставляя из (12) границы изменения Q_{i+1} в (14) и разрешая уравнения относительно m_x, получим формулу для определения границ изменения $m_x \in (m_н, m_в)$:

$$\begin{cases} m_в = \dfrac{kR_i + 1}{Q_i} \\ m_н = m_в - R_i \end{cases} \quad . \tag{15}$$

Решение уравнения (14) в целых числах относительно Q_{i+1} в пределах изменения (15) возможно, если выполняется следующее условие:

$$\frac{Q_i m_x - 1}{R_i} - ent\left(\frac{Q_i m_x - 1}{R_i}\right) = 0 \quad . \tag{16}$$

Таким образом, поиск знаменателя Q_{i+1} представляет собой итерационный процесс с числом итераций m_x, границы которого находятся в пределах, заданных в (15), равным R_i. Следовательно, исходя из свойств дробей Фарея [6], максимальное число итераций поиска дроби R_{i+1}/Q_{i+1} равно

$$N_2 = k - 1 . \tag{17}$$

Структурная схема алгоритма, реализующего этот процесс, приведена на рис. 2. Для дроби R_1/Q_1=0/1 выражение (16) не имеет смысла, поэтому для этого случая, исходя из свойств дробей Фарея [6], R_2/Q_2=1/k.

Для случая (7), используя обратную теорему Фарея-Коши, определяющую связь последующей дроби Фарея с предыдущей, получим после преобразований выражения, аналогичные (13)–(16):

$$R_i Q_{i-1} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ Q_i) \quad , \tag{18}$$

$$R_i Q_{i-1} - 1 = Q_i m_x, \tag{19}$$

$$\begin{cases} m_в = \dfrac{kR_i - 1}{Q_i} \\ m_н = m_в - R_i \end{cases}, \tag{20}$$

$$\frac{Q_i m_x + 1}{R_i} - ent\left(\frac{Q_i m_x + 1}{R_i}\right) = 0 \tag{21}$$

.

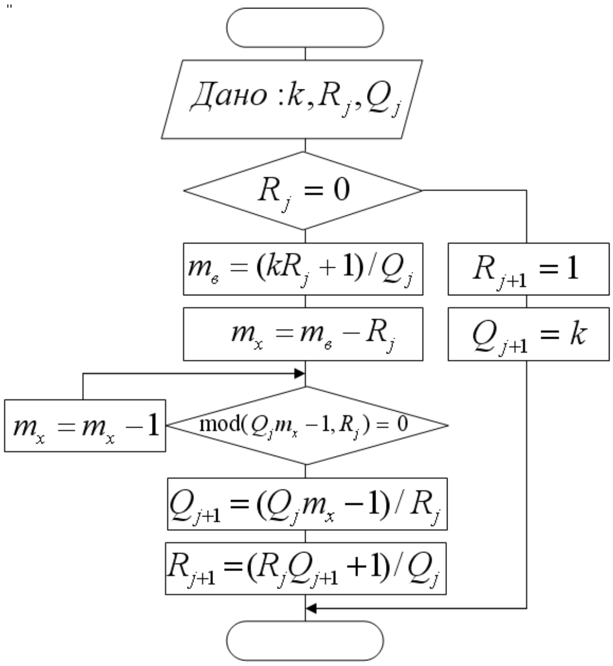

Рис. 2. Алгоритм поиска следующей дроби Фарея

Структурная схема алгоритма, реализующего поиск предыдущей дроби R_{i-1}/Q_{i-1} по известной R_i/Q_i, приведена на рис. 3.

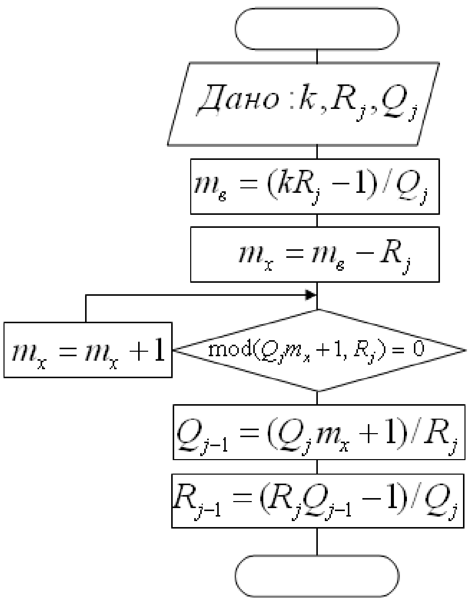

Рис. 3. Алгоритм поиска предыдущей дроби Фарея

Алгоритм цепных дробей для нахождения двойного Диофантова приближения в классе дробей Фарея

Для каждой дроби на (n – 1)-м уровне в дереве Фарея можно непосредственно вычислить две соседние дроби, или, иными словами, «прямых потомков» на n-м уровне. Непосредственного (прямого) предшественника любой дроби (предыдущего уровня) можно найти, вычитая единицу из последнего члена ее разложения в непрерывную дробь. Другой (отдаленный) предшественник данной рациональной дроби может быть найден простым *выбрасыванием* последнего члена [11].

Согласно [8],

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}. \tag{22}$$

Если количество членов в последовательности $[b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n]$ для прямого предшественника нечетно, то потомок расположится между отдаленным и прямым предшественником, а если четно – между прямым и отдаленным предшественником.

У любой дроби из ряда Фарея всегда есть два потомка. Назовем потомок, образованный прибавлением единицы к короткой записи исходной дроби, *коротким* потомком, а потомок, образованный прибавлением единицы к длинной записи исходной дроби, *длинным* потомком и обозначим их соответственно как

$$\frac{P_s}{Q_s} = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n + 1] \quad \text{и} \quad \frac{P_l}{Q_l} = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n - 1, 2]. \tag{23}$$

Для обоих потомков справедливо, что один из них всегда больше, а другой всегда меньше исходной дроби. Количество членов в одном потомке всегда четно, а в другом всегда нечетно. Согласно (22), потомок с четным числом членов всегда больше своего прямого предшественника и наоборот для нечетного.

Согласно алгоритму в зависимости от направления поиска, в сторону увеличения дробей ряда или в сторону их уменьшения, и четного или нечетного количества членов последовательности $[b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n]$ для исходной дроби, мы должны находить либо короткий потомок, либо длинный.

Потомки равны

$$\frac{P_s}{Q_s} = \frac{P_{\text{исх}} + P_{\text{отд}}}{Q_{\text{исх}} + Q_{\text{отд}}} \quad \text{и} \quad \frac{P_l}{Q_l} = \frac{2P_{\text{исх}} - P_{\text{отд}}}{2Q_{\text{исх}} - Q_{\text{отд}}}. \tag{24}$$

Согласно (24), для отыскания любого из потомков исходной дроби неоходимо лишь знать её последнюю промежуточную дробь. Для этого достаточно использовать алгоритм приближения действительного числа дробью Фарея, приведенный на рис. 1

В зависимости от направления поиска и четности числа элементов в записи исходной дроби, необходимо находить значение длинного или короткого потомка. Рассмотрим случаи, когда знаменатель полученного потомка больше порядка ряда Фарея и когда меньше или равен порядку ряда. В обоих случаях потомок будет являться медиантой исходной дроби и дроби, являющейся отдаленным предшественником исходной. В первый случае ($Q_{\text{пот}} > k$) искомая дробь однозначно равна

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_{\text{пот}} - P_{\text{исх}}}{Q_{\text{пот}} - Q_{\text{исх}}}. \tag{25}$$

Во втором случае ($Q_{\text{пот}} <= k$) искомая дробь однозначно выражается формулой

$$\frac{P}{Q} = \frac{nP_{\text{исх}} + P_{\text{пот}}}{nQ_{\text{исх}} + Q_{\text{пот}}},$$

где $$n = ent\left(\frac{k - Q_{\text{пот}}}{Q_{\text{исх}}}\right). \tag{26}$$

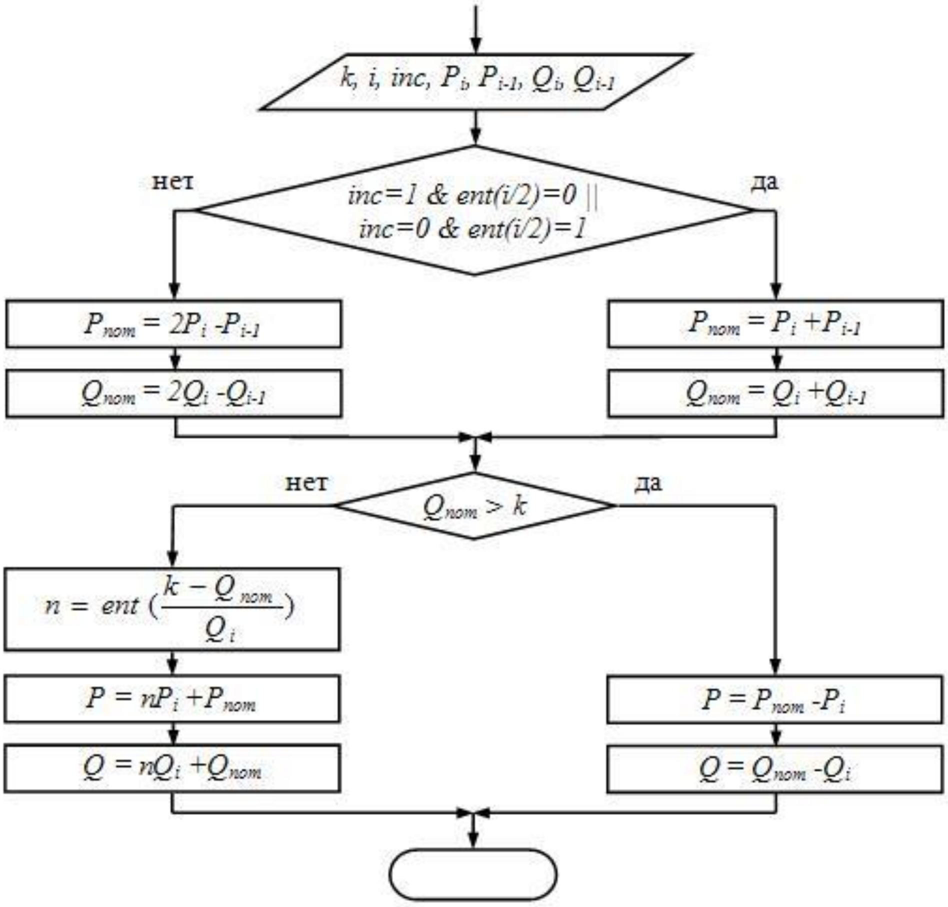

Рис. 4. Алгоритм поиска следующей дроби Фарея

Оценка алгоритмической и вычислительной сложности. Для оценки быстродействия предложенных алгоритмов будем использовать два критерия: алгоритмическую и вычислительную сложности алгоритмов.

Под алгоритмической сложностью будем понимать количество циклов в алгоритме без детализации сложности реализации алгоритма для каждой ветки цикла.

Под вычислительной сложностью понимаются условные затраты на получение результата, приведенного к такту условного процессора. Для получения такой оценки необходимо знать процессорные затраты на реализацию основных операций и функций, выраженных в тактах процессора.

Алгоритмическая сложность. Она определяется затратами на выполнение циклических операций. Для алгоритмов полного перебора комбинационных частот для оптимистической оценки [9] будет равна

$$N_n = 3(k+1)^2.$$

Число итераций алгоритма на основе синтеза полного ряда Фарея [9] составляет

$$N_ф = 3(k+1)^2/\pi^2.$$

Из предыдущих выражений следует, что решение задачи анализа комбинационных составляющих путем полного перебора и на основе рядов Фарея составляет около одного порядка и не зависит от индекса ряда Фарея и соответственно от порядка учитываемых комбинационных частот (это две взаимосвязанные величины согласно[9]).

Оценим алгоритмическую эффективность решения задачи анализа комбинационных составляющих с использованием подхода на основе синтеза последовательности Фарея [6] и подхода, использующего алгоритм на основе цепных дробей и теоремы Фарея-Коши. Для этого достаточно сравнить количество итераций предложенного подхода (5), (17) с числом членов последовательности Фарея [6]:

$$Э = \frac{N_n}{N_1 + N_2} = \frac{3(k+1)^2}{\pi^2 (k + 2\log_2 k)}.$$

Это выражение показывает, что эффективность использования подхода, изложенного в данном параграфе, повышается с увеличением индекса последовательности Фарея, а, следовательно, и порядка учитываемых комбинационных частот P. Кроме того, эта формула не учитывает затрат времени на синтез самой последовательности Фарея. Следовательно, общая эффективность решения задач с использованием предлагаемого метода будет значительно выше приведенной оценки. На рис. 5 представлены зависимости алгоритмической сложности решения задачи анализа комбинационных составляющих от индекса k ряда Фарея при использовании разных алгоритмов.

Рис. 5. Алгоритмическая сложность алгоритмов от порядка учитываемых комбинационных частот

Эффективность алгоритма на основе цепных дробей по сравнению с алгоритмом полного перебора для k=30 составляет около 300, а на основе цепных дробей и теоремы Фарея-Коши - около 70.

Вычислительная сложность. Для её оценки будем учитывать три основных категории операций и функций, которые выполняет условный процессор, и определим их вычислительные затраты:

1) на операции суммирования, вычитания и вычисления целых частей – $A=n_A*t$, где n_A – количество тактов процессора на выполнение одной операции типа суммирования; t – время одного такта процессора;

2) операции умножения, деления и расчет целочисленного остатка от деления двух чисел – $M=n_M*t$, где n_M – количество тактов процессора на выполнение одной операции типа умножения;

3) операции присваивания – $S=n_S*t$, где n_S – количество тактов процессора на выполнение одной операции типа присваивания.

Определим вычислительную сложность всех предлагаемых алгоритмов анализа комбинационных составляющих и найдем наиболее эффективный алгоритм. Однако критерий – вычислительная сложность – зависит от типа процессора и особенностей его архитектуры. Разбивка типов операций и их затраты по тактовому времени для каждого процессора выполняются индивидуально.

Максимальная вычислительная сложность алгоритма на основе цепных дробей (рис. 1) равна

$$V_1 = N_1(10S+3M+5A) + 2S.$$

Максимальная вычислительная сложность алгоритмов на основе теоремы Фарея-Коши (рис. 2 и 3) равна

$$V_2 = N_2(S+M+A) + 4S + 4A + 6M.$$

Максимальная вычислительная сложность алгоритма на основе только цепных дробей (рис. 5) равна

$$V_3 = N_1(10S+3M+5A) + 7S + 7A + 4M.$$

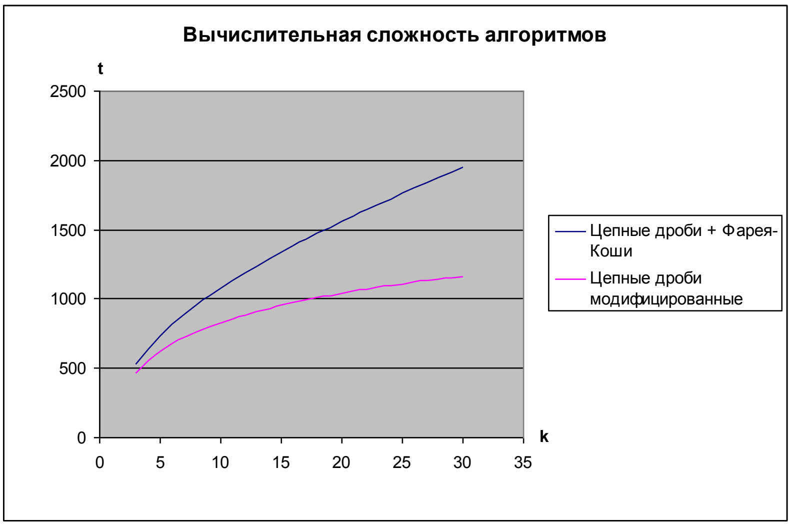

Рис. 6. Связь вычислительной сложности алгоритмов с порядком учитываемых комбинационных частот

Анализ вычислительной сложности алгоритмов на основе цепных дробей – теоремы Фарея-Коши и модифицированного алгоритма цепных дробей показывает, что модифицированный алгоритм цепных дробей обладает большей эффективностью и для k=5 составляет 20%, а для k=30 составляет 70%.

Вывод

В статье предложены и реализованы методики поиска двойного диафантового приближения комбинационных составляющих в ряде Фарея произвольного порядка и приведены сравнительные характеристики их эффективностей.

Библиографический список

1. **Манассевич, В.** Синтезаторы частоты (теория и проектирование): [пер. с анг.] / В. Манассевич; под ред. А.С. Галина. – М.: Связь, 1979. – 384 с.

2. **Лобенстейн.** Номограмма для расчета значений комбинационных частот // Электроника, 1973. Т. 46. № 16. С 26–29.
3. **Gandhi, D.** Mixer Spur Analysis with Concurrently Swept LO, RF and IF / D. Gandhi, C. Lyons // Tools and Techniques. Vol. 46. No. 5. May 2003. P. 212.
4. **Шарапов, Ю.И.** Преобразование сигнала без комбинационных частот / Ю.И. Шарапов, Г.М. Крылов, Ю.П. Пантелеев. – М.: ИПРЖР, 2001. – 288 с.
5. **Шарапов, Ю.И.** Преобразование сигнала без комбинационных частот в специальных приемниках / Ю.И. Шарапов. – М.: Изд-во «САЙНС-ПРЕСС», 2009. – 256 с.
6. **Бухштаб, А.А.** Теория чисел / А.А. Бухштаб. – М.: Учпедгиз, 1960. – 375 с.
7. **Шмидт, В.** Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М.: Мир, 1983. - 232 с.
8. **Хинчин, А.Я.** Цепные дроби / А.Я. Хинчин. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
9. **Логинов, В.И.** Номограмма комбинационных частот - алгоритмический подход / В.И. Логинов, С.А. Маркова // Радиотехника. 1989. № 1. С. 44–46.
10. Логинов В.И. Программа расчета номограммы комбинационных частот http://www.vgavt-nnov.ru:100/informatika/downloads.php?cat_id=1&download_id=10 (дата обращения: 25.12.2009).
11. **Шредер, М.** Фракталы, хаос, степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.

Дата поступления
в редакцию 30.03.2010

P.I. Grushin, V.I. Loginov, N.P. Yampurin

COMPARATIVE CHARACTERISTICS OF ALGORITHMS FOR COMPUTATION OF COMBINATIONAL COMPONENTS BASED ON THE FAREY SERIES

We give a comparative performance characteristic of algorithms for calculating the combinational components appearing in a nonlinear frequency conversion based on Farey series. We analyze the computational cost of algorithms without synthesis of full Farey series, which allows to solve problems of analysis of affection with combinational frequencies by analyzing only the components closest to the operating frequencies of the systems of nonlinear frequency conversion being considered.

Key words: frequency conversion, combinational components, infinite fractions, Farey series.