

УДК 621.372.8

Н.А. Новоселова¹, С.Б. Раевский¹, А.А. Титаренко²

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА С РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева¹,
ФНПЦ Научно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова²

Предлагается метод расчета характеристик распространения волн круглого экранированного волновода с радиально-неоднородным диэлектрическим заполнением. Приводятся результаты расчета.

Ключевые слова: волновод, симметричные волны, диэлектрическое заполнение.

Введение

Круглые неоднородно заполненные волноводы, обладая рядом уникальных особенностей (аномальная дисперсия, комплексные волны, комплексный резонанс [1, 2]), находят [3-6] широкое применение при построении таких СВЧ – устройств, как аттенуаторы, линии задержки, полосовые фильтры, резонаторы для спектроскопов и т.д. Расчет и оптимизация параметров таких устройств требуют развития численно-аналитических методов исследования волноводов с произвольным диэлектрическим заполнением. Возможность расчета характеристик волноводов с заполнением, описываемым произвольными аналитическими функциями, позволяет ставить задачи параметрического синтеза, нацеленные на реализацию устройств с заданными характеристиками. Кроме того, алгоритмы расчета неоднородно заполненных круглых волноводов могут быть использованы при исследовании градиентных волоконных световодов [7].

Постановка задачи

В настоящей работе для расчета неоднородно заполненного круглого экранированного волновода предлагается использовать модификацию метода Галеркина [8,9].

Рассмотрим задачу о распространении симметричных Е и Н-волн в круглом экранированном волноводе с частичным диэлектрическим заполнением, значение диэлектрической проницаемости которого произвольным образом зависит от радиальных координат ($\varepsilon(r, \varphi, z) = \varepsilon(r)$) (рис. 1). Значение магнитной проницаемости полагается величиной постоянной.

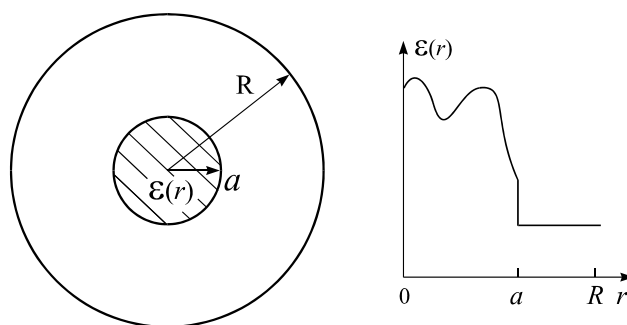


Рис.1. Функция распределения диэлектрической проницаемости в поперечном сечении волновода

Из уравнений Максвелла получаем:

$$\text{rot rot } \vec{E} = k_0^2 \varepsilon(r, \varphi) \vec{E}. \quad (1)$$

Используя соотношения:

$$\text{grad}(\psi) = \vec{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \vec{z} \frac{\partial \psi}{\partial z};$$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{\varphi} \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \vec{z} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} E_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right),$$

уравнение (1) в компонентах цилиндрической системы координат записываем:

$$\text{rot rot}(\vec{E}) \Big|_{\vec{r}} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} = k_0^2 \varepsilon(r, \varphi) E_r; \quad (1a)$$

$$\text{rot rot}(\vec{E}) \Big|_{\vec{\varphi}} = \frac{1}{r^2} E_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} = k_0^2 \varepsilon(r, \varphi) E_\varphi; \quad (1b)$$

$$\text{rot rot}(\vec{E}) \Big|_{\vec{z}} = \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = k_0^2 \varepsilon(r, \varphi) E_z. \quad (1c)$$

Поля волн направляющей структуры представим в виде разложений по собственным функциям краевых задач Дирихле и Неймана для однородно заполненного круглого волновода. Связь между компонентами электрического поля устанавливается через коэффициенты рядов разложений, подставляемых в (1).

Симметричные Н-волны

В отсутствие угловой зависимости поля, полагаем $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $H_\varphi = 0$, $E_r = 0$, $E_z = 0$. В

этом случае уравнения (1) сведутся к единственному уравнению относительно $\vec{\varphi}$ -компоненты электрического поля:

$$\frac{1}{r^2} E_\varphi - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} = k_0^2 \varepsilon(r) E_\varphi.$$

Записывая $E_\varphi(r, \varphi, z) = E_\varphi(r, \varphi) \cdot e^{-i\beta z}$, получаем уравнение относительно функции поперечных координат:

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E_\varphi + (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) E_\varphi = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) будем [1, 2] искать в виде

$$E_\varphi(r) = \sum_{n=0}^N b_n J_1(\alpha_n r), \quad (3)$$

где коэффициенты α_n определяются из уравнения $J_1(\alpha_n R) = 0$ (так как $E_\varphi(R) = 0$).

Подставив (3) в (2), получаем

$$-\sum_{n=0}^N b_n \cdot \left[\frac{\partial^2 J_1(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_1(\alpha_n r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} J_1(\alpha_n r) \right] = \sum_{n=0}^N b_n k_0^2 \varepsilon(r) J_1(\alpha_n r) - \sum_{n=0}^N b_n \beta^2 J_1(\alpha_n r).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 J_1(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_1(\alpha_n r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} J_1(\alpha_n r) = -\alpha_n^2 J_1(\alpha_n r),$$

получаем

$$\sum_{n=0}^N b_n (\alpha_n^2 + \beta^2) J_1(\alpha_n r) = \sum_{n=0}^N b_n k_0^2 \varepsilon(r) J_1(\alpha_n r). \quad (4)$$

Умножив обе части уравнения (4) на $rJ_1(\alpha_q r)$ и проинтегрировав в пределах $r \in [0; R]$, получаем уравнение:

$$(\alpha_q^2 + \beta^2) \Gamma_q \cdot b_q = \sum_{n=0}^N b_n k_0^2 \int_0^R \varepsilon(r) r J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_q r) dr. \quad (5)$$

Здесь использовалось условие ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^R r J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_q r) dr = \begin{cases} \Gamma_q, & q = n, \\ 0, & q \neq n, \end{cases}$$

где $\Gamma_q = 0.5R^2 J_0^2(\alpha_n R)$.

Уравнение (5) можно представить в матричном виде:

$$I \cdot b = T \cdot b, \quad (6)$$

$$\text{где } I_{q,n} = \begin{cases} (\alpha_q^2 + \beta^2) \Gamma_q, & q = n, \\ 0, & q \neq n, \end{cases} \quad T_{q,n} = k_0^2 \int_0^R \varepsilon(r) r J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_q r) dr.$$

Записав уравнение (6) в виде $(I - T) \cdot b = 0$ и приравняв определитель матрицы $(I - T)$ нулю, получаем дисперсионное уравнение для симметричных Н-волн, распространяющихся в круглом волноводе с произвольной зависимостью ε от r :

$$\text{Det}(\beta) = |I - T| = 0. \quad (7)$$

Отметим, что матрица T не зависит от β , поэтому при решении дисперсионного уравнения (7) она вычисляется лишь один раз, что существенно сокращает время поиска корней дисперсионного уравнения. Заметим, что при выводе уравнений (6), (7) никаких ограничений на вид зависимости $\varepsilon(r)$ не накладывалось, т.е. данный метод позволяет рассчитывать симметричные Н-волны при совершенно произвольном характере изменения диэлектрической проницаемости по поперечной координате, при этом ε может быть и комплексной величиной, что позволяет, например, рассчитывать волноводы со сложным распределением поглощения в поперечном сечении.

Симметричные Е-волны

Для симметричных Е-волн полагаем:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad E_\varphi = 0, \quad H_r = H_z = 0.$$

При этом уравнения (1) перейдут в систему двух уравнений:

$$i\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) E_r = 0;$$

$$i\beta \frac{\partial E_r}{\partial r} + i\beta \frac{1}{r} E_r + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + k_0^2 \varepsilon(r) E_z = 0.$$

Для избавления от мнимых чисел введем переменную $\tilde{E}_z = i\beta E_z$,

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) E_r = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + k_0^2 \varepsilon(r) \tilde{E}_z - \beta^2 \left(\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} E_r \right) = 0. \quad (8)$$

Граничные условия на идеально проводящей поверхности для тангенциальной и нормальной компонент электрического поля $E_r|_S = 0$, $\frac{\partial E_n}{\partial n}|_S = 0$ [10] в данном случае приводят к уравнению:

$$E_z|_{r=R} = 0. \quad (9)$$

Компоненты электрического поля будем искать в виде:

$$\tilde{E}_z = \sum_{n=0}^N A_n J_0(\alpha_n r), \quad E_r = \sum_{m=0}^N B_m J_1(\alpha_m r). \quad (10)$$

С учетом граничного условия (9) коэффициенты α_n определяются уравнением $J_0(\alpha_n R) = 0$.

Подставив (10) в (8), получаем систему двух функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^N A_n \alpha_n J_1(\alpha_n r) + \sum_{m=0}^N B_m (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) J_1(\alpha_m r) &= 0, \\ \sum_{n=0}^N A_n \left(\frac{\partial^2 J_0(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_0(\alpha_n r)}{\partial r} + k_0^2 \varepsilon(r) J_0(\alpha_n r) \right) - \beta^2 \sum_{m=0}^N B_m \left(\frac{\partial J_1(\alpha_m r)}{\partial r} + \frac{1}{r} J_1(\alpha_m r) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J_0(\alpha_n r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_0(\alpha_n r)}{\partial r} &= -\alpha_n^2 J_0(\alpha_n r); \\ \frac{\partial J_1(\alpha_m r)}{\partial r} &= \alpha_m J_0(\alpha_m r) - \frac{1}{r} J_1(\alpha_m r) \end{aligned}$$

систему (11) можно переписать в виде:

$$-\sum_{n=0}^N A_n \alpha_n J_1(\alpha_n r) + \sum_{m=0}^N B_m (k_0^2 \varepsilon(r) - \beta^2) J_1(\alpha_m r) = 0, \quad (12a)$$

$$\sum_{n=0}^N A_n (k_0^2 \varepsilon(r) - \alpha_n^2) J_0(\alpha_n r) - \beta^2 \sum_{m=0}^N B_m \alpha_m J_0(\alpha_m r) = 0. \quad (12б)$$

Умножая уравнение (12a) на $rJ_1(\alpha_q r)$, а уравнение (12б) на $rJ_0(\alpha_q r)$ и интегрируя в пределах $r \in [0; R]$, получаем систему уравнений:

$$-A_q \alpha_q \Gamma_q + k_0^2 \sum_{m=0}^N B_m \int_0^R r \varepsilon(r) J_1(\alpha_m r) J_1(\alpha_q r) dr - B_q \beta^2 \Gamma_q = 0, \quad (13)$$

$$k_0^2 \sum_{n=0}^N A_n \int_0^R r \varepsilon(r) J_0(\alpha_n r) J_0(\alpha_q r) dr - A_q \alpha_q^2 \Gamma_q - B_q \beta^2 \alpha_q \Gamma_q = 0.$$

Здесь использовались условия ортогональности функций Бесселя

$$\int_0^R r J_0(\alpha_n r) J_0(\alpha_q r) dr = \int_0^R r J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_q r) dr = \begin{cases} \Gamma_q, & q = n, \\ 0, & q \neq n, \end{cases}$$

где $\Gamma_q = \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_q R)$.

Систему уравнений (13) можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} T^{(0,0)} & T^{(0,1)} \\ T^{(1,0)} & T^{(1,1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0, \quad (14)$$

где $T_{q,m}^{(0,0)} = -\alpha_q \Gamma_q \delta_{q,m}$,

$$T_{q,m}^{(0,1)} = k_0^2 \int_0^R r \varepsilon(r) J_1(\alpha_m r) J_1(\alpha_q r) dr - \beta^2 \Gamma_q \delta_{q,m}, \tag{15}$$

$$T_{q,n}^{(1,0)} = k_0^2 \int_0^R r \varepsilon(r) J_0(\alpha_n r) J_0(\alpha_q r) dr - \alpha_q^2 \Gamma_q \delta_{q,m},$$

$$T_{q,m}^{(1,1)} = -\beta^2 \alpha_q \Gamma_q \delta_{q,m},$$

$\delta_{q,n}$ - символ Кронекера.

Приравнивая определитель матричного уравнения (14) нулю, получаем дисперсионное уравнение, описывающее Е-волны круглого волновода с произвольным радиальным диэлектрическим заполнением.

Реализация алгоритма

Двухслойный экранированный волновод

В качестве примера проведем с помощью уравнений (7), (14) расчет простейшей тестовой структуры – круглого волновода с однородным диэлектрическим стержнем (т.е. $\varepsilon(r) = \varepsilon = \text{const}$, рис. 2) и сравним результаты с полученными классическим методом частичных областей (МЧО).

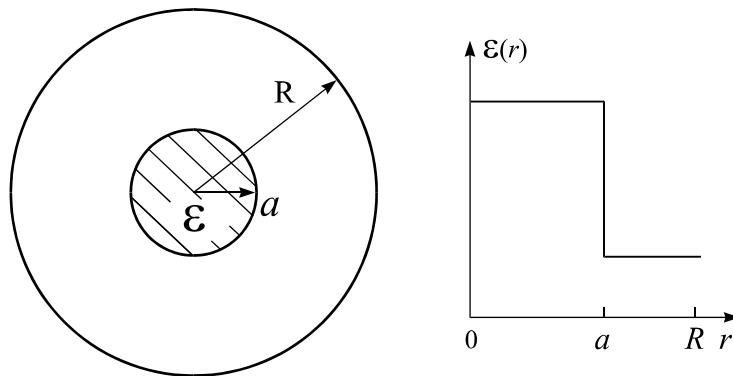


Рис. 2. Круглый волновод с диэлектрическим стержнем

Расчеты проводились для волновода с параметрами: $R = 20$ мм, $a = 10$ мм, $\varepsilon = 3$, на частоте $f = 10$ ГГц. Классический метод расчета дает следующие результаты: для Н-волн $\beta_H = 237.68916 \text{ м}^{-1}$, для Е-волн $\beta_E = 227.55000 \text{ м}^{-1}$.

Расчет тестовых структур с использованием предложенной методики выполнялся при подстановке функции $\varepsilon(r) = \begin{cases} 3, & r \leq a \\ 1, & a < r \leq R \end{cases}$ в уравнения (6) и (14).

Сходимость решений, получаемых модифицированным методом Галеркина для Е и Н-волн, представлена в табл. 1 и на рис. 3.

Таблица 1

№ п/п	Е-волны ($\beta_E = 227.5500 \text{ м}^{-1}$)	Н-волны ($\beta_H = 237.6892 \text{ м}^{-1}$)
1	2	3
1	233.1366	234.7509
2	234.3096	236.5369
3	232.3624	237.2738
4	231.8978	237.4027

Окончание табл. 1

1	2	3
5	230.9273	237.5506
6	230.7095	237.5777
7	230.1335	237.6259
8	230.0207	237.6347
9	229.6397	237.655
10	229.5748	237.6586
11	229.304	237.6686
12	229.2637	237.6704
13	229.0613	237.6758
14	229.0347	237.6768
15	228.8776	237.6800

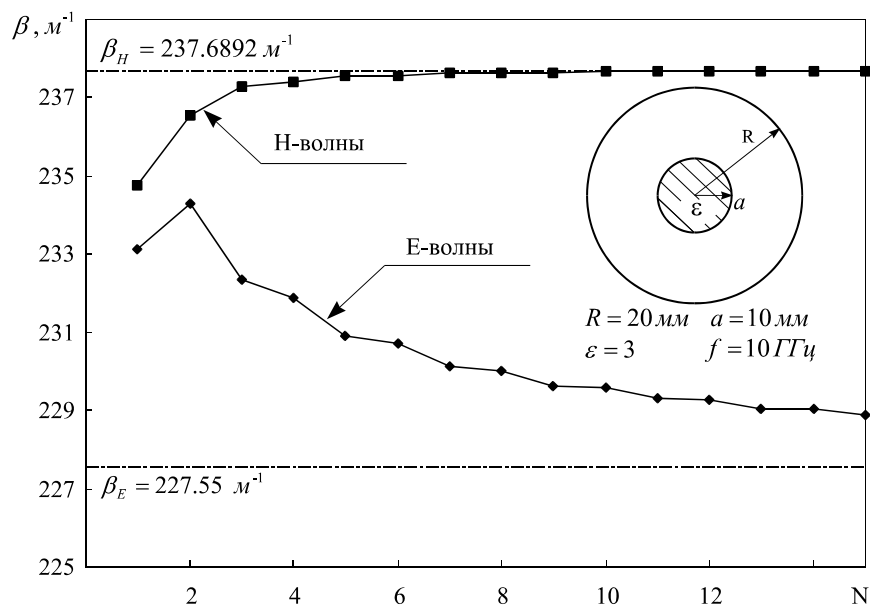


Рис. 3. Сходимость по интегральной характеристике

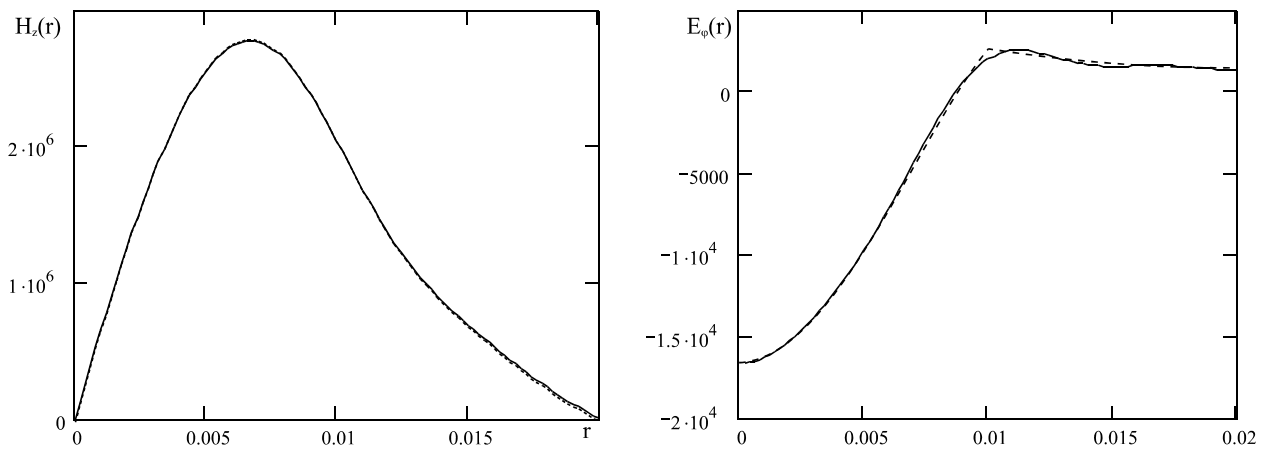


Рис. 4. Распределение поля Н-волны:
 - - - - - МЧО; ——— ММГ

Из табл. 1 и рис. 3 видно, что сходимость ММГ является монотонной и наступает достаточно быстро (уже при $N=5$ разница между продольными волновыми числами не превышает

ет 1.5 %). Из рис. 3 также видно, что в случае Н-волн сходимость наступает быстрее, что, по-видимому, связано с разницей в числе решаемых уравнений (одно уравнение (2) для Н-волн и два уравнения (8) – для Е-волн).

На рис. 4 пунктирной линией приведены зависимости компонент поля H_z и E_φ от координаты r , рассчитанные для Н-волны при $N=5$.

Из графиков видно, что распределения полей, рассчитанные различными методами, практически совпадают, что подтверждает корректность предлагаемого метода.

Волновод с градиентным диэлектрическим заполнением

На основе уравнений (15) выполнен расчет дисперсионных характеристик Е-волн, распространяющихся в круглом волноводе с частичным диэлектрическим заполнением, проницаемость которого изменяется по параболическому закону, описываемому уравнением

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a^2} r^2, & r \leq a \\ 1, & a < r \leq R \end{cases} .$$

Подставив данное выражение в (15) и рассчитав интегралы

(численно или аналитически), получаем решение дисперсионной задачи. Отметим, что для любого $\varepsilon(r)$ расчет интегралов из (15) проводится лишь один раз, поскольку они не зависят ни от частоты, ни от продольной постоянной распространения, а определяются только параметрами заполнения. Это является безусловным достоинством данного метода, позволяющим существенно сократить время расчета структуры.

Результаты расчета дисперсионных характеристик Е-волн круглого волновода с параболическим профилем диэлектрического заполнения представлены на рис. 5.

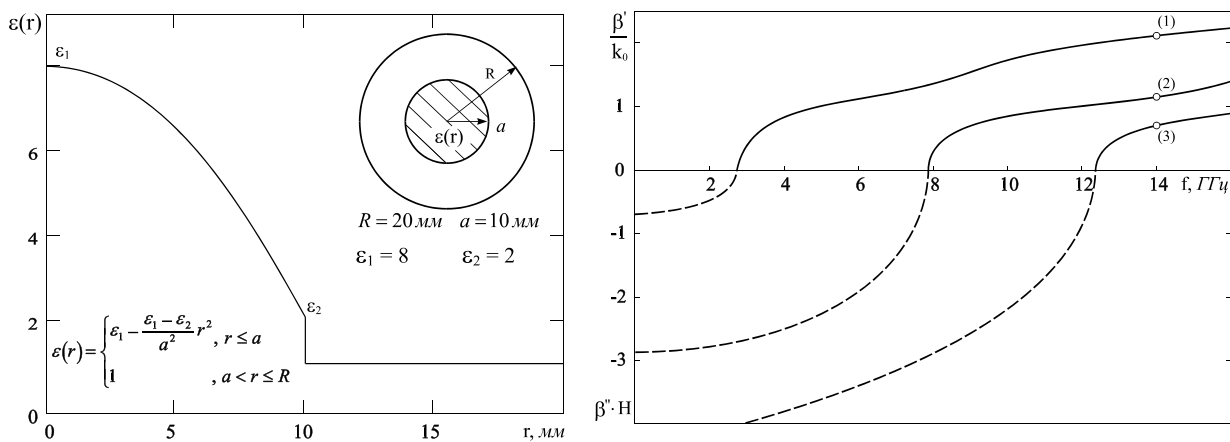


Рис. 5. Дисперсионные характеристики Е-волн круглого волновода с параболическим профилем диэлектрического заполнения

На основе уравнений (6), (7) выполнен расчет структуры в виде круглого волновода с частичным диэлектрическим заполнением, проницаемость которого линейно изменяется (рис. 6) по радиальной координате в пределах $r \in [0 \div a]$.

Расчеты проводились для волновода с параметрами: $R = 20$ мм, $a = 10$ мм, $\varepsilon(R) = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a} r$, $\varepsilon_1 = 6$, $\varepsilon_2 = 2$ частота $f = 10$ ГГц.

Для сравнения проведем расчет той же самой структуры, представив линейный профиль диэлектрической проницаемости в виде ступенчатой аппроксимации (рис. 6), число ступенек при этом примем равным 20. Результаты расчета распределения поля, полученного на основе решения дисперсионного уравнения, представлены на рис. 7. Результаты расчетов,

выполненных по предлагаемой методике и с помощью МЧО, совпадают с графической точностью.

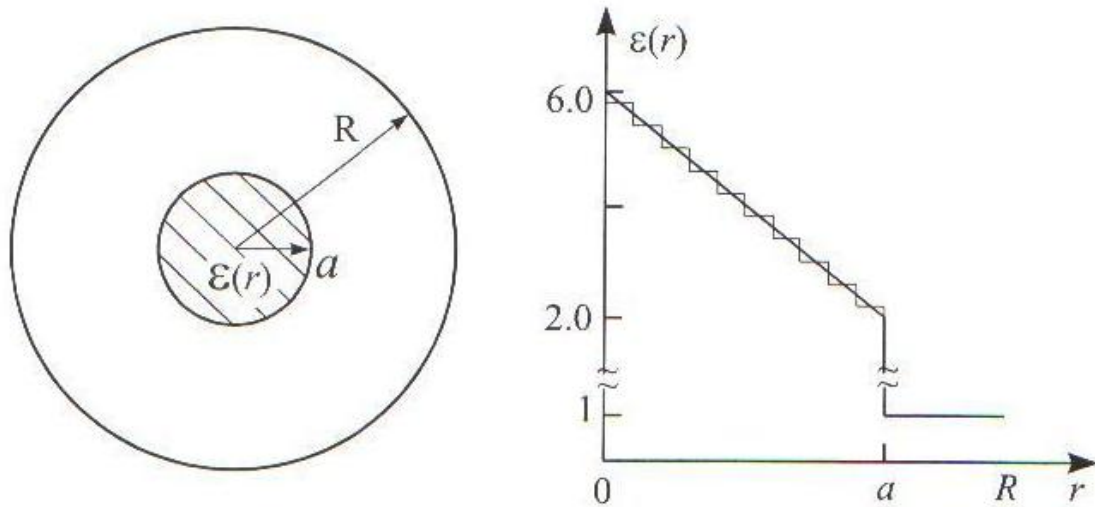


Рис. 6. Функция диэлектрической проницаемости

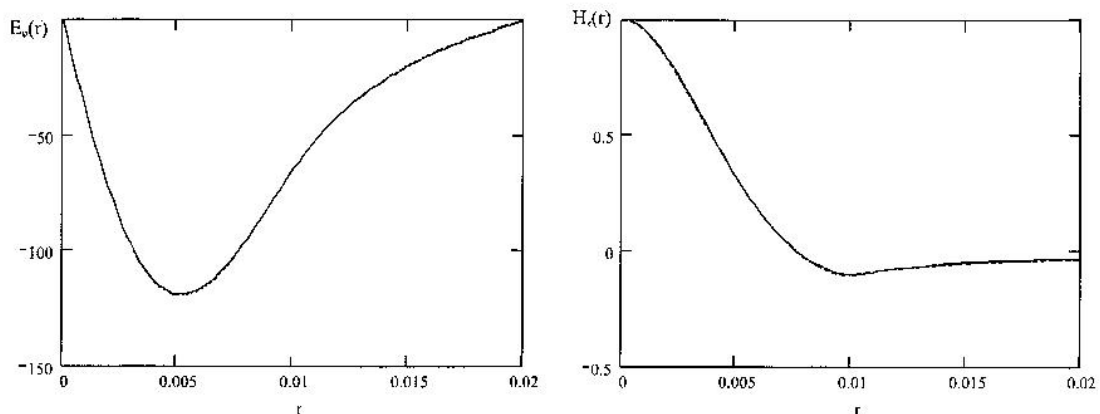


Рис. 7. Результаты расчета распределения поля

Выводы

1. Предложен метод расчета характеристик симметричных волн цилиндрического волновода с осесимметричным диэлектрическим заполнением, имеющим произвольную зависимость $\varepsilon(r)$. Метод является модификацией метода Галеркина, в которой вариационная процедура применяется к функциональным соотношениям, следующим непосредственно из уравнений Максвелла.

2. На примере трех краевых задач подтверждены корректность и эффективность предложенного метода.

3. Метод является альтернативным по отношению к МЧО в тех случаях, когда последний требует многоступенчатой аппроксимации функции диэлектрического заполнения, и может быть распространен на все волноводы с координатными экранирующими поверхностями.

Библиографический список

1. **Веселов, Г.И.** Слоистые металло-диэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М.: Радио и связь, 1988. – 248 с.

2. **Раевский, А. С.** Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2004. – 110 с.
3. **Раевская, О.И.** Предельный аттенуатор на основе круглого двухслойного волновода / О.И. Раевская, В.А. Калмык, Ю.А. Горячев // Изв. Вузов СССР. Радиоэлектроника. 1975. №2. С. 104–106.
4. **Горячев, Ю.А.** Предельные аттенуаторы с малым начальным ослаблением / Ю.А. Горячев, О.И. Раевская // Техника средств связи. Сер. РТ, 1977. Вып. 5(9). С. 40–43.
5. **Неганов, В.А.** Теория и применение устройств СВЧ / В.А. Неганов, Г.П. Яровой. – М.: Радио и связь, 2006. – 719 с.
6. **Неганов, В.А.** Электродинамика и распространение радиоволн / В.А. Неганов, О.В. Осипов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. – М.: Радиотехника, 2007. – 200 с.
7. **Унгер, Х.Г.** Планарные и волоконные оптические волноводы / Х.Г. Унгер. – М.: Мир, 1988. – 656 с.
8. **Раевский, С.Б.** Приближенный метод расчета дисперсии волн в волокне с периодическим изменяющимся вдоль оси показателем преломления / С.Б. Раевский, А.А. Смирнов // Антенны. 2004. №1(8). С. 31–35.
9. **Раевский, С.Б.** Распространение электромагнитных волн в периодически-неоднородных средах / С.Б. Раевский, А.А. Смирнов, Г.И. Шишков // Антенны. 2005. №5(96). С. 64–72.
10. **Неганов, В.А.** Электродинамика и распространение радиоволн / В.А. Неганов, О.В. Осипов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. – М.: Радио и связь, 2005. – 320 с.

*Дата поступления
в редакцию 30.03.2010*

N.A. Novoselova, S.B. Raevskiy, A.A. Titarenko

CALCULATION OF CHARACTERISTICS OF SYMMETRIC MODES PROPAGATING IN A CIRCULAR WAVEGUIDE WITH RADIALY-HETEROGENEOUS DIELECTRIC FILLING

The method of calculation of characteristics of modes propagating in a circular shielded waveguide with radially-heterogeneous dielectric filling is introduced. The results of the calculation are presented.

Key words: waveguide, symmetric wave, dielectric filling.