

## ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.372.801

А.С. Раевский, С.Б. Раевский, О.В. Усков

### СПЕКТР ВОЛН КРУГЛОГО ОТКРЫТОГО СЛОИСТОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

С позиции теории несамосопряженных операторов формулируются краевые задачи для круглого открытого диэлектрического волновода. Рассматривается полный спектр волн, включая собственные и несобственные комплексные волны. Основное внимание уделяется особенностям волн, связанных с несамосопряженностью электродинамических операторов.

*Ключевые слова:* круглый открытый диэлектрический волновод, спектр волн, собственные и несобственные комплексные волны.

#### Введение

Круглый открытый диэлектрический волновод (ОДВ) является одной из наиболее широко используемых открытых направляющих структур как СВЧ и КВЧ, так и оптического диапазонов волн. Интерес к нему определяется, с одной стороны, широкими возможностями его использования при построении линий связи и функциональных узлов (ФУ) указанных диапазонов, с другой стороны, тем, что ОДВ удобен для теоретического исследования особенностей открытых направляющих структур в силу возможности строгого решения соответствующей ему краевой задачи. Для круглого ОДВ возможна точная запись (в замкнутой форме) дисперсионных уравнений, гарантирующая адекватность используемой математической модели реальной направляющей структуре. Математическая модель круглого регулярного ОДВ позволяет выявить основные особенности волн, направляемых открытыми диэлектрическими волноводами, в частности, волоконными световодами. В большинстве работ [1-8], посвященных исследованию ОДВ, он рассматривался в основном как структура, направляющая поверхностные волны, поля которых экспоненциально убывают в радиальном направлении. Теория именно таких волн получила наиболее полное развитие [9-16]. Поверхностные волны – основной тип волн, на которых осуществляется перенос энергии в волоконных световодах, для их исследования используется математическая модель ОДВ. Однако в целом ряде устройств (это, в первую очередь, относится к плавным переходам линий передач с малым замедлением [16] и к антеннам неосевого излучения) поверхностные волны используются лишь для возбуждения, подвергаясь затем преобразованию в волны, слабо связанные с направляющей структурой, имеющие большую поперечную протяженность поля. При этом возникают задачи о расчете поля излучения и характеристик передачи нерегулярных участков тракта [16], при решении которых неизбежно приходится учитывать полный спектр волн диэлектрического волновода.

В отличие от экранированных направляющих структур полный спектр открытых волнопроводов, помимо дискретной, имеет (в силу отсутствия на внешней границе краевого усло-

вия, соответствующего задаче Штурма-Лиувилля [17]) непрерывную часть, представляемую интегралом по одному из волновых чисел. Волновые числа непрерывного спектра изменяются в пределах от нуля до бесконечности и соответствуют полю излучения из волновода и полю вблизи источника. Эти поля частично описываются также различными типами комплексных волн (КВ), входящих в дискретную часть спектра. Комплексность волновых чисел указанных волн не связана с тепловыми потерями в средах направляющей структуры.

### 1. Краевые задачи для открытого слоистого диэлектрического волновода. Виды возможных решений

Общее решение уравнения (уравнения Гельмгольца:  $\Delta \Pi_z^{e,m} + k^2 \Pi_z^{e,m} = 0$ , где  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ ) в случае ОДВ имеет вид

$$\Pi_z^{e,m} = Z_n(\alpha_m r) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} e^{-i\beta z}, \quad (1)$$

где  $Z_n$  - цилиндрическая функция 1-го рода для внутреннего слоя, линейная комбинация цилиндрических функций 1-го и 2-го рода для промежуточных слоев, цилиндрическая функция 3-го рода для внешней области.

При  $n = 0$  поля волн ОДВ не зависят от координаты  $\varphi$  (симметричные волны). При наложении граничного условия на бесконечности общее число граничных условий прямой краевой задачи будет:

$$U_m = 0; m = 1, 2, \dots, 2q; N = 2q,$$

где  $q$  - число слоев, на которое разбивается поперечное сечение рассматриваемой структуры. Поскольку число граничных условий сопряженной краевой задачи

$$N^* = q(2\bar{n}) - N = 2q; N^* = N,$$

оператор является самосопряженным. Здесь  $\bar{n}$  - порядок дифференциального уравнения.

При снятии граничного условия на бесконечности  $N = 2q - 1$ . В результате, поскольку  $N^* = q(2\bar{n}) - (2q - 1) = 2q + 1 \neq N$ , оператор становится несамосопряженным.

Действительным собственным значениям краевой задачи соответствуют решения дисперсионного уравнения, являющиеся волновыми числами поверхностных волн. Это волны, направляемые данной структурой. Их распространение обусловлено полным внутренним отражением на границах раздела сред.

Известно [6, 18], что на критических частотах поверхностные волны переходят в волны излучения - вытекающие волны. Для описания этих волн необходимо вводить вместо (1) интегральное представление поля и соответственно непрерывный спектр собственных значений, хотя термин «собственные значения» в данном случае не является строгим, поскольку вытекающие волны не удовлетворяют условию излучения, в результате чего краевая задача для них не является однородной.

В случае несимметричных волн ( $n \neq 0$ ) второе условие самосопряженности оператора не выполняется (в независимости от граничного условия на бесконечности), в результате чего в спектре решений дисперсионного уравнения краевой задачи, которая является несамосопряженной, присутствуют комплексные значения, соответствующие различным типам комплексных волн. Для собственных комплексных волн, удовлетворяющих условию излучения, они соответствуют однородной краевой задаче, для несобственных (не удовлетворяющих условию излучения) - полуюднородной.

Несобственные комплексные волны подразделяются [19, 20] на вытекающие и медленные несобственные волны. Дисперсионные характеристики вытекающих волн, первое упоминание о которых было в [18], являются продолжениями характеристик поверхностных волн на частотах ниже критических. Комплексность их волновых чисел обусловлена потерями на излучение. Вытекающие волны могут переходить в собственные комплексные волны.

Термин «собственные» означает, что они при тех же параметрах рассматриваемой структуры будут присутствовать и в спектре решений однородной задачи. В случае малых  $n$  такие волны существуют при достаточно высоком значении отношения диэлектрических проницаемостей слоев ОДВ. В случае больших  $n$  они появляются при меньших значениях этого отношения [21]. Характерной особенностью таких волн является равенство нулю среднего за период потока мощности, переносимой через поперечное сечение структуры.

С уменьшением частоты собственные комплексные волны снова переходят [19] в вытекающие, а те, в свою очередь, в медленные несобственные. Физическая природа комплексности решений, соответствующих медленным несобственным комплексным волнам, не вполне ясна.

Если в рассматриваемом ОДВ учесть потери на поглощение хотя бы в одном из слоев, то краевая задача будет несамосопряженной независимо от того, накладывается условие излучения или не накладывается. Все собственные значения будут комплексными, а значит, и решения дисперсионного уравнения также будут комплексными. В данном случае комплексность волновых чисел обусловлена потерями на поглощение, приводящими к уменьшению амплитуд полей по продольной координате ОДВ.

Дисперсионное уравнение двухслойного ОДВ имеет [19] вид

$$\frac{n^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{a^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4} (\varepsilon_2 \mu_2 \alpha_1^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \alpha_2^2) - \left[ \frac{\varepsilon_1 J'_n(\alpha_1 a)}{\alpha_1 J_n(\alpha_1 a)} - \frac{\varepsilon_2 H_n^{(2)'}(\alpha_2 a)}{\alpha_2 H_n^{(2)}(\alpha_2 a)} \right] \cdot \left[ \frac{\mu_1 J'_n(\alpha_1 a)}{\alpha_1 J_n(\alpha_1 a)} - \frac{\mu_2 H_n^{(2)'}(\alpha_2 a)}{\alpha_2 H_n^{(2)}(\alpha_2 a)} \right] = 0, \tag{2}$$

где  $J_n$  - функция Бесселя;  $H_n^{(2)}$  - функция Ханкеля 2-го рода.

На рис.1 приведены качественные частотные зависимости фазовых постоянных и коэффициентов затухания, для гибридных волн с  $n = 1$ , взятые из [19]. На рисунке обозначено:  $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 / k_0$  - нормированная фазовая постоянная (сплошные линии),  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ ;  $\tilde{\beta}_2 = -\beta_2 a$  - нормированный коэффициент затухания (пунктир),  $a$  - радиус ОДВ. Продольное волновое число в общем случае комплексное:  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ ;  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ .

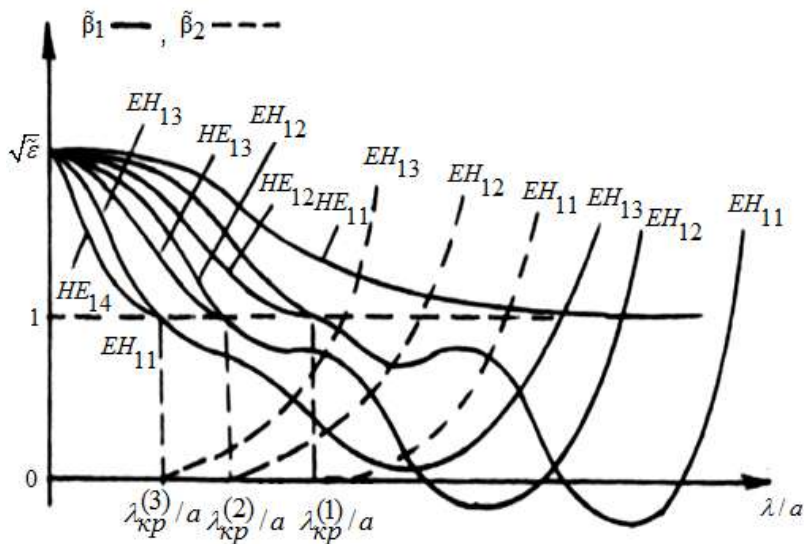


Рис. 1. Частотные зависимости фазовых постоянных и коэффициентов затухания волн круглого ОДВ

Из рисунка видно, что с уменьшением длины волны  $\lambda$  нормированные фазовые постоянные поверхностных волн  $EH_{1m}$  и  $HE_{1m}$  стремятся к  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ . На критических частотах (в точках  $\lambda_{\text{кр}}^{(i)}/a$ ) волны  $EH_{1m}$  переходят в вытекающие. При достаточно больших значениях  $\tilde{\varepsilon}$  на характеристиках волн  $EH_{11}$  и  $EH_{12}$  есть участки, соответствующие собственным комплексным волнам ( $\tilde{\beta}_1 < 0$ ), которые при уменьшении частоты переходят сначала в вытекающие, а затем в медленные несобственные. Волны  $HE_{1m}$ , как, впрочем, и все волны  $HE_{nm}$ , продолжения в виде вытекающих на частотах ниже критических в структуре без диссипации энергии не имеют.

## 2. Критические частоты HE и EH-волн двухслойного ОДВ

Традиционно считается [6], что поверхностные волны  $EH_{nm}$  и  $HE_{n,m+1}$  имеют одинаковые критические частоты, ниже которых только волны  $EH_{nm}$  имеют продолжения в виде вытекающих. Однако численные расчеты показывают, что на частотах, близких к критическим, дисперсионные характеристики волн  $HE_{nm}$  не просчитываются, на них  $\tilde{\beta}$  очень близко подходит к  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2}$  ( $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ ), но не достигает этого значения.

Проведем анализ дисперсионного уравнения двухслойного ОДВ (2) вблизи критических частот поверхностных волн, которое, как известно [22], может быть записано в виде

$$P_n(\alpha_1 a) = \frac{1}{2} F_n(\alpha_2 a) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{\varepsilon_2 + \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} F_n^2(\alpha_2 a) \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 \left( \frac{\varepsilon_2 - \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\varepsilon_1 \mu_1} Q}, \quad (3)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - поперечные волновые числа внутри ОДВ и в окружающей среде соответственно;  $\varepsilon_1, \mu_1$  и  $\varepsilon_2, \mu_2$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости ОДВ и окружающей среды;  $a$  - радиус ОДВ;

$$P_n(\alpha_1 a) = \frac{J'_n(\alpha_1 a)}{J_n(\alpha_1 a)}; \quad Q = \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\varepsilon_2 \mu_2 \alpha_1^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \alpha_2^2)}{a^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4}.$$

В общем случае поле во внешней среде описывается (1) функциями Ханкеля, при этом

$$F_n(\alpha_2 a) = H_n^{(2)'}(\alpha_2 a) / H_n^{(2)}(\alpha_2 a). \quad (4)$$

Поля поверхностных волн во внешней среде могут быть также представлены [23] функциями Мак-Дональда. В этом случае

$$F_n(\alpha_2 a) = -K_n'(\alpha_2 a) / K_n(\alpha_2 a). \quad (5)$$

В (5)  $K_n$  - функции Мак-Дональда; штрих в (4) и (5) означает дифференцирование по всему аргументу. Поперечное волновое число во внутренней области вычисляется как

$$\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 - \beta^2}. \quad (6)$$

Поперечное волновое число в окружающей среде в (4) определяется аналогичным соотношением

$$\alpha_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 - \beta^2}, \quad (7)$$

а в формуле (5) – соотношением:

$$\alpha_2 = \sqrt{-\varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 + \beta^2}.$$

Два знака перед радикалом в уравнении (3) указывают [6] на существование у дисперсионного уравнения двух ветвей решений. При использовании представления (5) знак минус соответствует [6] волнам  $HE_{nm}$ , знак плюс – волнам  $EH_{nm}$ . При использовании представления (4) знак минус соответствует [19] волнам  $EH_{nm}$ , знак плюс – волнам  $HE_{nm}$ . Поверхностная волна  $HE_{11}$ , как известно, не имеет критической частоты. Критические частоты других гибридных волн, считается, попарно совпадают:  $EH_{11}$  и  $HE_{12}$ ,  $EH_{12}$  и  $HE_{13}$  и т.д. [6].

Используя представление функции  $F_n(\alpha_2 a)$  в виде (5), уравнение (3) при  $n=1$  вблизи критических частот поверхностных волн ( $\omega \rightarrow \omega_{кр}$ ), взятое со знаком плюс перед радикалом, приводим к виду

$$\frac{y^2}{x^2} f(x) = \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{\tilde{\mu}} \right), \tag{8}$$

со знаком минус – к виду

$$f(x)/x^2 = -\frac{2}{\tilde{\varepsilon} + \tilde{\mu}} \left[ \ln\left(\frac{y}{2}\right) + C \right], \tag{9}$$

где  $x = \alpha_1 a$ ;  $y = \alpha_2 a$ ;  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ ;  $\tilde{\mu} = \mu_1 / \mu_2$ ;  $f(x) = x J_1'(x) / J_1(x)$ ;  $C$  – постоянная Эйлера. Уравнение (8) дает участки дисперсионных характеристик поверхностных волн  $EH_{1m}$  вблизи их критических частот, уравнение (9) – волн  $HE_{1,m+1}$  также вблизи критических частот ( $m=1,2,3,\dots$ ).

Нетрудно показать, что ветвь решений уравнения (8) доходит до точки  $x = h_{1m}$ ,  $y = 0$ , где  $h_{1m}$  –  $m$ -й корень уравнения  $J_1(x) = 0$ , соответствующий критической частоте волны  $EH_{1m}$ . Действительно, при  $\omega \rightarrow \omega_{кр}$  имеем  $x \rightarrow h_{1m}$ ;  $\tilde{\beta} = \frac{\beta\lambda}{2\pi} \rightarrow 1$ ,  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}-1} \frac{2\pi a}{\lambda} \rightarrow h_{1m}$ , в результате чего уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 (\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}-1) - x^2}{x(x-h_{1m})} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{\tilde{\mu}}. \tag{10}$$

Численный анализ показывает, что величина  $\frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}-1}$  при  $\omega \rightarrow \omega_{кр}$  стремится к  $h_{1m}$  медленнее, чем  $x \rightarrow h_{1m}$ . В результате левая часть уравнения (10) вблизи  $\omega_{кр}$  всегда положительная и решение этого уравнения устойчиво сходится к точке  $x = h_{1m}$ ,  $y = 0$ ,  $\tilde{\beta} = 1$ .

Поскольку левая и правая части уравнения (9) при  $x \rightarrow h_{1m}$ ,  $y \rightarrow 0$  стремятся к бесконечности, создается впечатление, что решение этого уравнения в пределе также стремится к точке  $x = h_{1m}$ ,  $y = 0$ ,  $\tilde{\beta} \rightarrow 1$ , в результате чего критические частоты волн  $EH_{1m}$  и  $HE_{1,m+1}$  совпадают. Однако в действительности такого совпадения нет, потому что при  $\omega \rightarrow \omega_{кр}$  в левой и правой частях уравнения (9) получаются бесконечности разного порядка.

Действительно, уравнение (9), переписанное в виде

$$\frac{f(x)}{x^2 [\ln((y/2) + C)]} = -\frac{2}{\tilde{\varepsilon} + \tilde{\mu}}, \tag{11}$$

в левой части при  $\omega \rightarrow \omega_{кр}$  имеет неопределенность вида  $\infty/\infty$ . Только в том случае, когда предел левой части уравнения (11) при  $x \rightarrow h_{1m}$  будет конечной величиной, это уравнение будет иметь решение в точке  $x = h_{1m}$ ,  $y = 0$ ,  $\tilde{\beta} = 1$ .

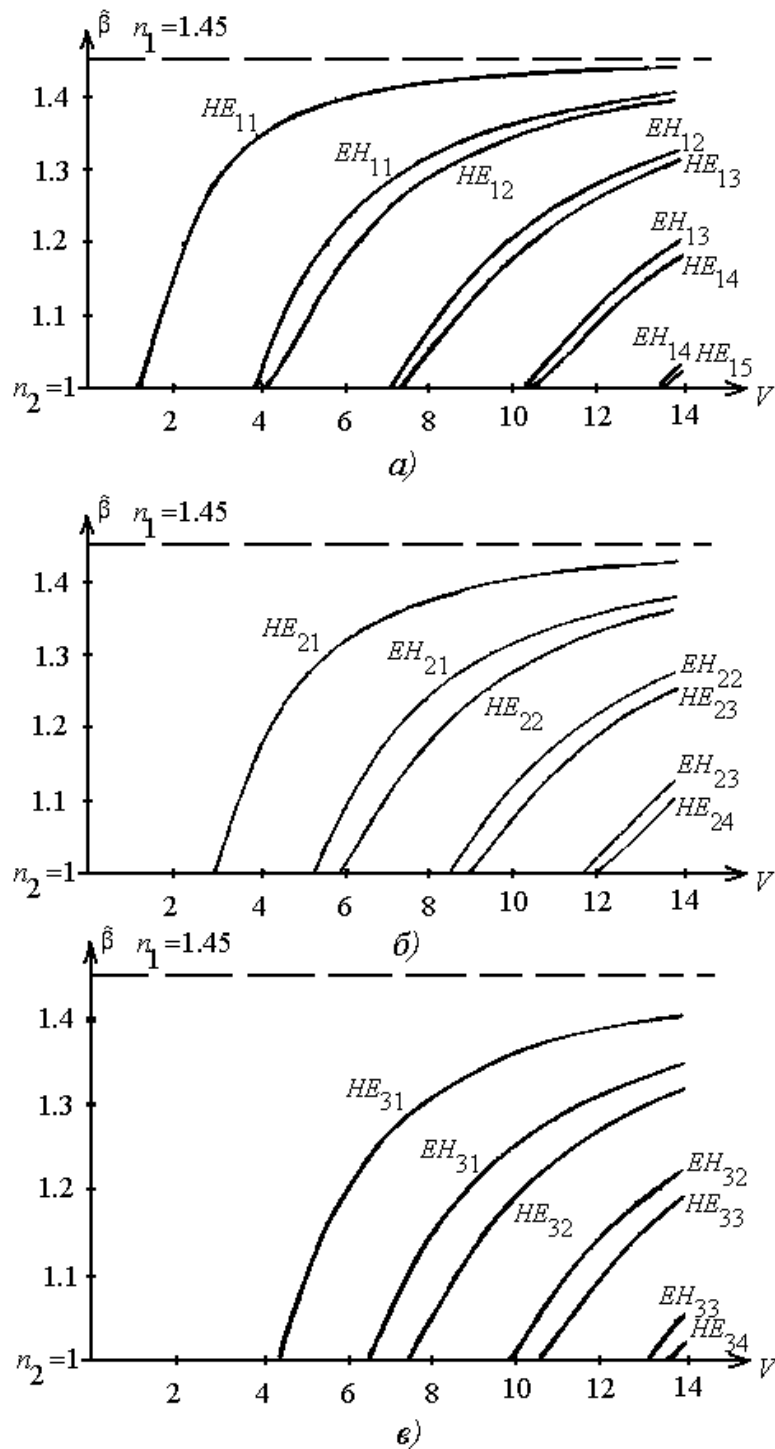


Рис. 2. Дисперсионные характеристики волн ОДВ с параметрами:  
 $\tilde{\epsilon}_1 = 2,1025$  ;  $\tilde{\epsilon}_2 = 1$

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow h_m} \frac{f(x)}{x^2 \left( \ln \left( \frac{y}{2} \right) + C \right)} = \lim_{x \rightarrow h_m} \frac{2}{h_m (h_m - x)} \rightarrow \infty,$$

можно утверждать, что уравнение (11) не может иметь решения в точке  $x = h_m, y = 0$ , соответствующей критической частоте волны  $EH_{1m}$ . Как показывают численные расчеты, дис-

персионные характеристики волн  $HE_{1,m+1}$ , начиная с определенных частот, достаточно удаленных от  $\omega_{кр}(EH_{1m})$ , находятся на линии  $\tilde{\beta} = 1$  в пределах точности получаемых результатов. Таким образом, утверждение [6] о том, что критические частоты поверхностных волн  $HE_{1,m+1}$  и  $EH_{1m}$  совпадают, является ошибочным.

На рис. 2, а приведены дисперсионные характеристики гибридных волн ОДВ с  $n=1$  для  $\varepsilon_1 = 2,1025$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ . Видно, что фактически критические частоты волн  $HE_{1,m+1}$ , на которых  $\tilde{\beta}$  начинает отличаться от  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2}$ , находятся несколько выше критических частот волн  $EH_{1m}$ . Из рис. 2, б в видно, что при  $n = 2, 3$  эта тенденция усиливается.

### 3. Трансформация поверхностных волн в комплексные

Рассмотрим характеристики несимметричных волн ОДВ вблизи их критических частот.

Дисперсионное уравнение волн ОДВ, составленное методом согласования полей на границе раздела сред, имеет вид (2). Это уравнение решается совместно с уравнениями, связывающими волновые числа (6) и (7).

Спектр волн ОДВ, определяемый по корням дисперсионного уравнения (2), включает в себя [20] поверхностные (направляемые) волны и различные типы волн излучения: вытекающие, медленные несобственные и собственные комплексные волны. Считается [6], что все поверхностные волны, за исключением волны  $HE_{11}$ , имеют критические частоты, на которых поперечное волновое число во второй области (окружающая среда)  $\alpha_2 = 0$ . При этом фазовая постоянная  $\beta_1 = k_0 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2$ . На частотах выше критических у поверхностных волн  $\alpha_2$  — чисто мнимое отрицательное, что приводит к экспоненциальному убыванию поля при удалении от ОДВ.

Рассмотрим поведение волновых чисел волн ОДВ в закритической области. Обратимся к несимметричным волнам с индексом  $n = 1$ . Известно [19], что для ОДВ краевая задача может быть поставлена с наложением нулевого условия на бесконечности и без него. В первом случае в спектре ОДВ, помимо поверхностных волн, могут присутствовать лишь собственные комплексные волны, поле которых убывает при удалении от ОДВ, поскольку у них  $Im(\alpha_2) < 0$ . Однако эти волны возникают лишь при определенных параметрах направляющей структуры и не могут являться продолжением поверхностных волн в закритической области. Во втором случае в спектре ОДВ дополнительно появляются комплексные волны, которые являются несобственными ( $Im(\alpha_2) > 0$ , поле нарастает с удалением от ОДВ). На рис. 3, а, б приведены дисперсионные характеристики волн при  $n = 1$ . Вытекающие волны являются непосредственным продолжением поверхностных волн в закритическую область. С уменьшением частоты при  $\beta_1 > k_0$  они переходят в медленные несобственные волны. Считается [24], что на критических частотах в вытекающие при  $n \neq 0$  переходят лишь поверхностные волны типа  $EH_{nm}$ . Как показано в [19], в спектре ОДВ присутствуют также волны  $HE_{1m}^k$ , комплексные во всем частотном диапазоне, также являющиеся несобственными. Характеристики указанных комплексных волн, приведенные на рис. 3, соответствуют параметрам  $\varepsilon_1 = 2,129\varepsilon_0$ ;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ .

Собственных комплексных волн при этом нет. Помимо комплексных волн, характеристики которых ранее приводились [19], были обнаружены [22, 25] волны, появляющиеся на критических частотах поверхностных волн ( $K_{11}$  на рис. 3) и имеющие дисперсионные характеристики, сближающиеся с ростом частоты с характеристиками поверхностных волн  $HE_{1m}$ . Однако у этих волн  $Im(\alpha_2) > 0$  и растет с увеличением частоты, т.е. по характеру зависимости поля от радиальной координаты эти волны относятся к медленным несобственным волнам. С математической точки зрения эти комплексные волны, имеющие  $Im(\alpha_2) > 0$ , не являются собственными волнами ОДВ, поскольку описываются решениями полуоднородной задачи. Таким образом, при смене знака у  $Im(\alpha_2)$  происходит качественный скачок в опреде-

лении типа краевой задачи для ОДВ, заключающийся в переходе однородной задачи в полую однородную.

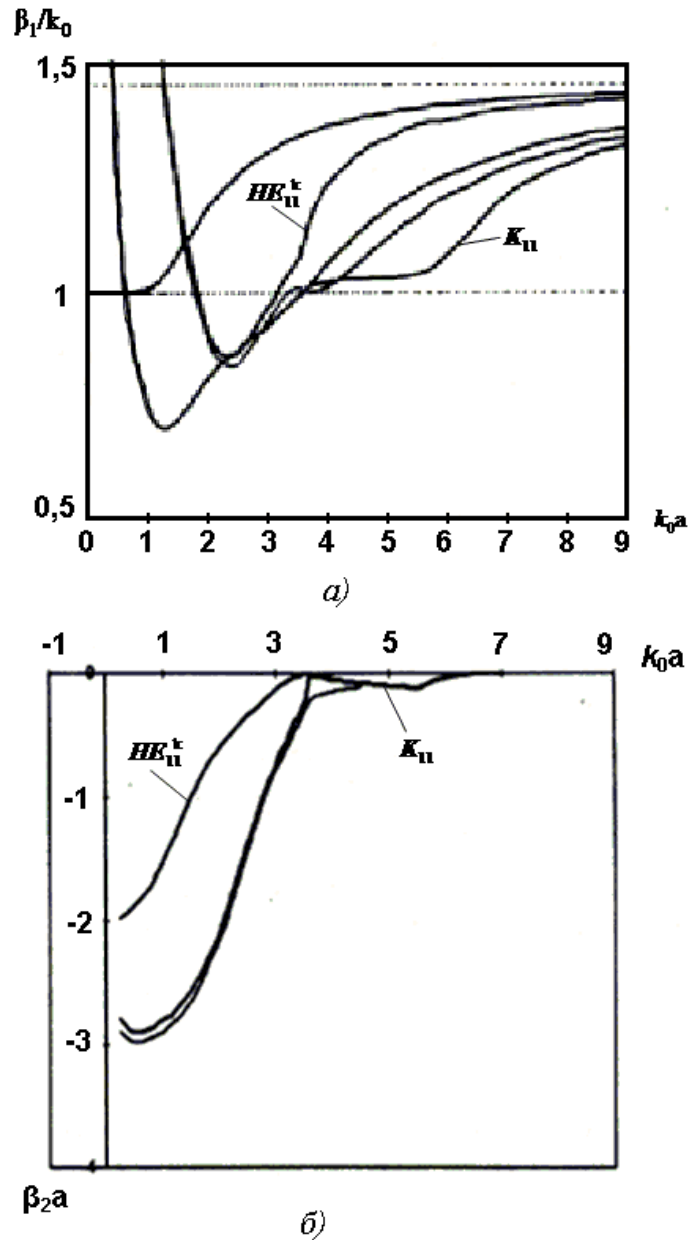


Рис. 3. Дисперсионные характеристики волн ОДВ с параметрами:  $\varepsilon_1 = 2,129$  ;  $\varepsilon_2 = 1$

Чтобы приблизить постановку задачи к реальным условиям, введем во внешней области потери, то есть запишем  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 (1 - i \operatorname{tg} \delta)$ . Из рис. 4 видно, что при  $\operatorname{tg} \delta = 0,001$  дисперсионная характеристика волны  $HE_{11}^k$  переходит в характеристику волны  $HE_{12}$ , в результате чего волна  $HE_{11}^k$  как таковая перестает существовать. Обнаруженный эффект с математической точки зрения можно объяснить, используя уравнение (7) для внешней области ОДВ. Из него следует

$$\gamma_2 \delta_2 = -\beta_1 \beta_2 / 2 k_2 \operatorname{tg} \delta . \tag{12}$$

Поскольку  $\beta_2 < 0$ , при определенном значении  $\operatorname{tg} \delta$  правая часть (12) обращается в нуль и далее с ростом  $\operatorname{tg} \delta$  становится отрицательной. При этом, поскольку  $\gamma_2 > 0$ , для выполнения равенства (12) должно быть:  $\delta_2 < 0$ , то есть несобственная комплексная волна исчезает. Для волны  $K_{11}$  отмеченный эффект не наблюдается.



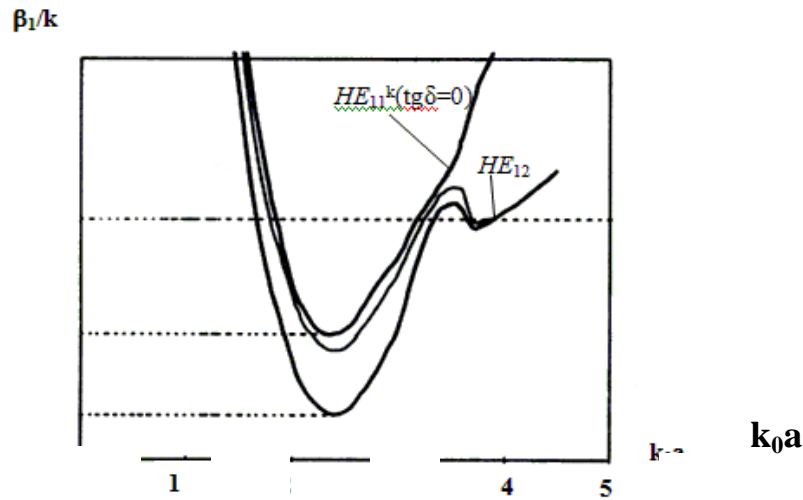


Рис. 4. Трансформация волны  $HE_{11}^k$  в волну  $HE_{12}$  при введении потерь

Все отмеченные эффекты наблюдаются также для несимметричных волн при  $m=2$ . При определенном значении  $\text{tg}\delta$  характеристика волны  $HE_{12}^k$  при  $\beta_1 = k_0$  переходит в характеристику волны  $HE_{13}$ . На характеристику волны  $K_{12}$  введение потерь в окружающей ОДВ области качественного влияния не оказывает.

Таким образом, на основании изложенного можно сделать следующие выводы. Во-первых, при введении потерь во внешней области волны типа  $HE_{1m}^k$  исчезают, а у характеристик волн  $HE_{1,m+1}$  возникают продолжения в виде вытекающих волн, то есть они становятся подобными характеристикам волн  $EH_{1m}$ . Во-вторых, если в краевой задаче для ОДВ не накладывается нулевое граничное условие на бесконечности среди решений дисперсионного уравнения существуют явно нефизичные (волна  $K_{1m}$ ). В-третьих, по-видимому, модель ОДВ, находящегося в среде с потерями, наиболее хорошо соответствует физической реальности. Например, волоконные световоды, используемые в технике оптической связи, имеют защитное полимерное покрытие, которое является для инфракрасного излучения слабопрозрачной средой. Сложность заключается в установлении критерия: каким брать значение  $\text{tg}\delta$  для установления перехода поверхностных волн  $HE_{1,m+1}$  в вытекающие.

#### 4. Круглый ДВ, помещенный в диссипативную среду

Рассмотрим изменение характеристик комплексных волн круглого диэлектрического волновода при введении потерь в окружающей среде.

Волны в круглом регулярном диэлектрическом волноводе (ДВ), в общем случае это может быть многослойный волновод, описываются решениями краевой задачи, состоящей из уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{13}$$

и граничного условия

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u = f|_L, \tag{14}$$

где контур  $L$  соответствует внешней границе направляющей структуры;  $n$  - нормаль к этому контуру, лежащая в плоскости поперечного сечения; под функцией  $u$  подразумеваются продольные компоненты электрического и магнитного полей, связанные между собой в гибридной волне (в волне, имеющей азимутальную зависимость поля) дисперсионным уравнением.

Без нарушения общности в (14) можно полагать  $\alpha = 1$  (действительно, все граничное условие можно разделить на постоянную  $\alpha$ ). Тогда любые две функции  $u_m$  и  $u_k$ , являющиеся решениями краевой задачи (13), (14), будут удовлетворять уравнению

$$(k_k^2 - k_m^2) \int_S u_m u_k ds = \int_L \left[ u_k \left( \frac{\partial u_m}{\partial n} + \gamma u_m \right) - u_m \left( \frac{\partial u_k}{\partial n} + \gamma u_k \right) \right] dl, \quad (15)$$

вытекающему из формулы Грина [17]. В формуле (15)  $k_m$  и  $k_k$  - поперечные волновые числа, являющиеся решениями дисперсионного уравнения и связывающие в неявном виде электрические и магнитные потенциальные функции гибридной волны.

С учетом того, что поперечное сечение рассматриваемой направляющей структуры состоит из двух областей, уравнение (15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (k_{1k}^2 - k_{1m}^2) \int_{S1} u_m^{(1)} u_k^{(1)} ds + (k_{2k}^2 - k_{2m}^2) \int_{S2} u_m^{(2)} u_k^{(2)} ds = \\ & = \int_L \left[ u_k \left( \frac{\partial u_m}{\partial n} + \gamma u_m \right) - u_m \left( \frac{\partial u_k}{\partial n} + \gamma u_k \right) \right] dl. \end{aligned} \quad (16)$$

Решения дисперсионного уравнения волн открытого ДВ могут соответствовать двум вариантам граничного условия (14) на контуре  $L$ , удаленном в бесконечность:  $f=0$ ;  $f \neq 0$ . В структуре без диссипации энергии первый вариант соответствует поверхностным и собственным комплексным волнам, второй - вытекающим и медленным несобственным комплексным волнам [20]. В первом случае правая часть уравнения (16) обращается в нуль, во втором, поскольку на контуре  $L$ , удаляемом в бесконечность,  $f \rightarrow \infty$ , в правой части (16) получается расходящийся интеграл. Представляет интерес рассмотрение записи уравнения (16) для волн ДВ, помещенного в диссипативную среду.

В работах [25, 26] показано, что в точках, соответствующих критическим частотам поверхностных волн, в круглом ДВ возникают вытекающие волны, которые с уменьшением частоты при определенных параметрах волновода переходят в собственные комплексные волны. Последние в свою очередь при дальнейшем уменьшении частоты вновь переходят сначала в вытекающие, а затем в медленные несобственные волны. Таким образом, в определенных точках частотного диапазона происходит как бы стыковка решений однородной и неоднородной краевых задач.

В слабонаправляющих световодах спектр волн оболочки практически совпадает со спектром указанных комплексных волн однослойного круглого ДВ. Поскольку оболочка световода, как правило, ограничена чехлом, представляет интерес исследование характеристик комплексных волн ДВ, помещенного в диссипативную среду с достаточно большим значением тангенса угла диэлектрических потерь ( $\text{tg} \delta$ ).

При решении различных дифракционных задач, связанных с расчетом полей на неоднородностях диэлектрических волноводов (в частности, световодов), возникает вопрос об учете вытекающих волн, диапазоны существования которых перекрываются с диапазонами поверхностных волн. Для этого необходима информация об особенностях их распространения при наличии поглощения в среде.

Дисперсионное уравнение волн круглого ДВ (2) решается совместно с уравнениями (6) и (7), связывающими волновые числа, которые в общем случае являются комплексными величинами. При расчетах полагали, что входящая в дисперсионное уравнение (2) диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится ДВ, является комплексной величиной:  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' - i\varepsilon_2''$ .

На рис. 5 приведены дисперсионные характеристики (зависимости продольного волнового числа  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  от частоты  $k_0 a$ ) волны  $EH_{11}$  круглого ДВ при различных значениях диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_2$  окружающей среды. Всем характеристикам соответствует значение  $\varepsilon_1 = 18$ . Внутренний слой (сам ДВ) считаем недиссипативным. Кривая 1 соответствует  $\varepsilon_2'' = 0$ .

Как видно из рисунка, наличие потерь в окружающей среде приводит к качественным изменениям в поведении дисперсионных характеристик. Точки перехода поверхностных

волн в вытекающие смещаются в более низкочастотный диапазон. При этом, как иллюстрирует кривая 3 ( $\varepsilon_2 = 1,0 - i 2,0$ ), при понижении частоты в начальном участке диапазона своего существования вытекающая волна может переходить в медленную несобственную. При не очень большом поглощении характеристики собственных комплексных волн и диапазон их существования мало отличаются, от характеристик в случае  $\varepsilon_2'' = 0$ . Однако уже при  $\varepsilon_2'' = 4,0$  наблюдается качественное изменение: собственная комплексная волна не переходит при понижении частоты в вытекающую, а продолжает свое существование во всем нижнем участке частотного диапазона (кривая 5).

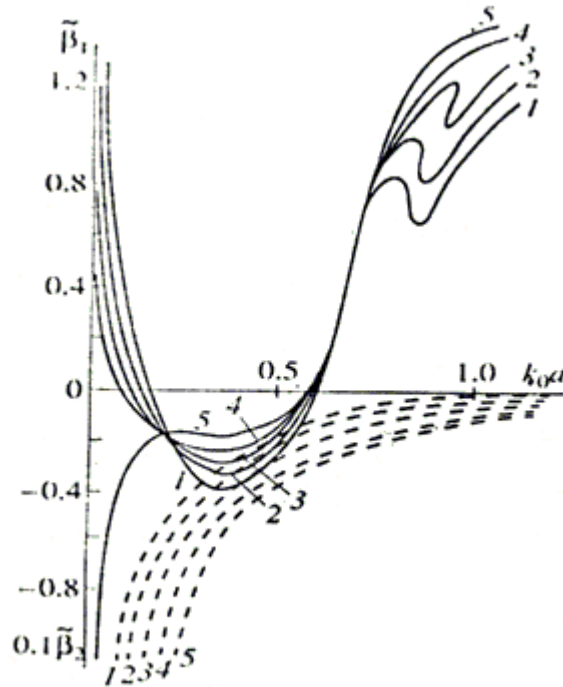


Рис. 5. Дисперсионные характеристики затухания волны  $EH_{11}$  круглого ДВ при  $\varepsilon_1 = 18,0$ .

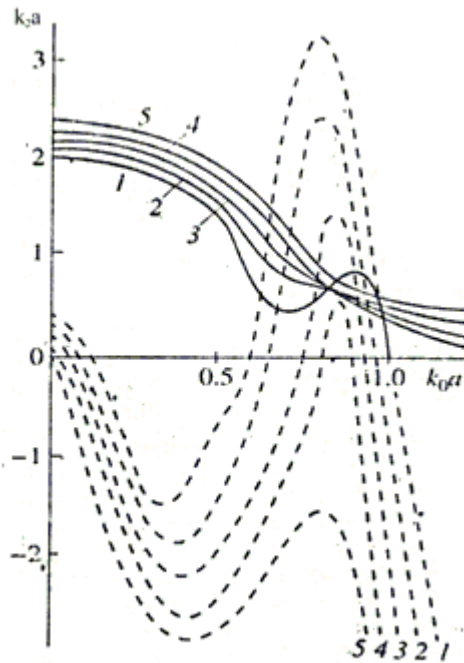
Кривые 1-5 соответствуют значениям  $\varepsilon_2'' = 0; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0$ . Сплошные линии -  $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 / k_0$ , штриховые линии -  $\tilde{\beta}_2 = \beta_2 / k_0$

На рис. 6 показано поведение поперечного волнового числа  $k_2$  внешней области, соответствующего характеристикам, изображенным на рис. 5. Как видно из рисунка, с увеличением  $\text{tg } \delta$  окружающей среды относительный диапазон существования вытекающей волны с нарастающим в радиальном направлении полем уменьшается. Так, при  $\varepsilon_2'' = 1,0$  указанный диапазон составляет 60 % от всего диапазона существования вытекающей волны, 40 % при  $\varepsilon_2'' = 2,0$ ; 30 % при  $\varepsilon_2'' = 3,0$ ; при  $\varepsilon_2'' = 4,0$  диапазон вытекающих волн исчезает совсем.

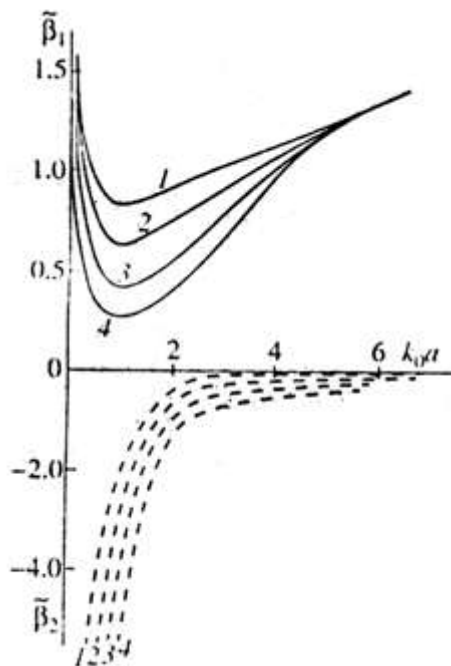
На рис. 7 приведены дисперсионные характеристики и характеристики затухания вытекающей волны  $EH_{11}$  волоконного световода из кварцевого стекла с  $\varepsilon_1 = 2,127$  ( $n_1 \approx 1,46$  на  $\lambda = 0,589$  мкм). На рис. 8 показано поведение поперечных волновых чисел  $k_2$ , соответствующих этим характеристикам.

Как видно из рис. 7, при небольших значениях  $\varepsilon_1$  качественный характер кривых  $\beta(k_0 a)$ , показанных на рис. 5, при изменении  $\varepsilon_2''$  сохраняется, исчезает лишь частотная область существования собственных комплексных волн вследствие того, что при малом параметре  $\varepsilon_1 / \varepsilon_2'$  дифракционные явления на криволинейной границе раздела сред слабо выражены и встречные потоки мощности, приводящие к возникновению собственных комплексных волн, не образуются. В этом случае при понижении частоты вытекающие волны переходят непосредственно в медленные несобственные. В поведении поперечных волновых чисел проявля-

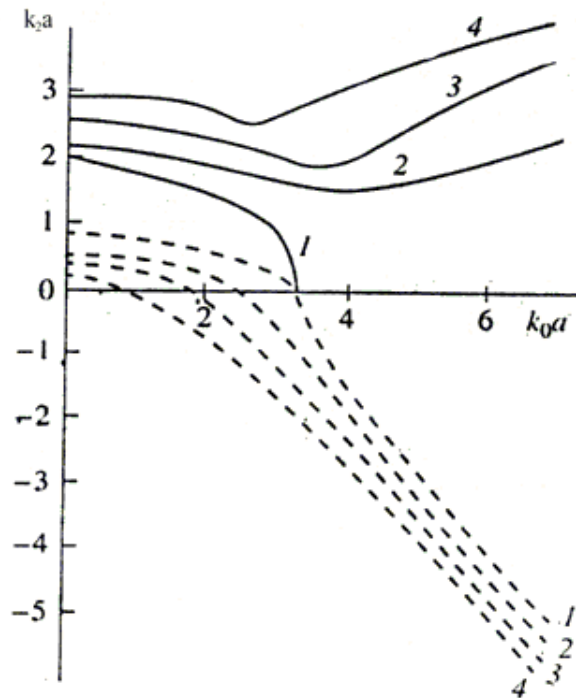
ется уже отмеченная ранее закономерность: с увеличением  $\text{tg } \delta$  относительный диапазон существования вытекающей волны с нарастающим в радиальном направлении полем уменьшается. Так, при  $\varepsilon_2''=0,5$  этот диапазон составляет  $\sim 65\%$  от всего диапазона существования вытекающей волны,  $\sim 40\%$  при  $\varepsilon_2''=1,0$ ;  $\sim 20\%$  при  $\varepsilon_2''=2,0$ .



**Рис. 6.** Частотные зависимости поперечного волнового числа  $k_2$  волны  $EH_{11}$  круглого ДВ при  $\tilde{\varepsilon}_1=18,0$  в области П: сплошные линии –  $\text{Re}(k_2 a)$ ; штриховые –  $\text{Im}(k_2 a)$



**Рис. 7.** Дисперсионные характеристики и характеристики затухания волны  $EH_{11}$  волоконного световода при  $\tilde{\varepsilon}_1=2,127$ . Кривые 1-4 соответствуют значениям  $\tilde{\varepsilon}_2''=0; 0,5; 1,0; 2,0$ : сплошные линии – для  $\tilde{\beta}_1$ ; штриховые – для  $\tilde{\beta}_2$



**Рис. 8 Частотные зависимости поперечного волнового числа  $k_2$  волны  $EH_{11}$  волоконного световода с  $\xi_1=2,127$  в области II: сплошные линии –  $\text{Re}(k_2a)$ ; штриховые –  $\text{Im}(k_2a)$**

Таким образом, можно сделать вывод, что при помещении ДВ в диссипативную среду его комплексные волны приобретают новые свойства. В частности, вытекающие волны в значительной части диапазона своего существования, а при больших  $\text{tg } \delta$  и во всем диапазоне имеют экспоненциально спадающее в радиальном направлении поле. В этом случае на контуре  $L$ , удаленном в бесконечность,  $f=0$ , в результате чего краевая задача становится однородной, а уравнение (16), записанное для собственных функций вытекающих волн, приводит к условию ортогональности последних:

$$\int_{S_1} u_m^{(1)} u_k^{(1)} ds + \int_{S_2} u_m^{(2)} u_k^{(2)} ds = \begin{cases} 0, m \neq k, \\ N_m, m = k, \end{cases} \quad (17)$$

где  $u_m$  и  $u_k$  - либо электрические, либо магнитные продольные компоненты поля гибридной волны, связанные между собой граничными условиями при  $r=a$ , из которых получается дисперсионное уравнение (2). Поперечные волновые числа, на которых определены эти потенциальные функции, находятся из совместного решения уравнений (2), (6) и (7). Амплитудные коэффициенты продольных компонент полей областей I и II в (17) связаны граничными условиями при  $r=a$ .

Выполнение условия (17) при решении дифракционных задач проекционными методами позволяет включать вытекающие волны в базис, по которому производится разложение дифракционного поля.

Отметим, что при наличии в окружающей среде диссипации энергии все свойства вытекающих волн (основное - это быстрые волны) сохраняются, однако их поле в значительном (или во всем) диапазоне частот становится экспоненциально убывающим при удалении от ДВ. При этом поперечные волновые числа для внешней области оказываются преимущественно в четвертом квадранте комплексной плоскости  $k_2$  (рис. 6, 8).

#### Библиографический список

1. **Вайнштейн, Л.А.** Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988.
2. **Каценеленбаум, Б.З.** Высокочастотная электродинамика / Б.З. Каценеленбаум. – М.: Наука, 1966.

3. **Взятыйшев, В.Ф.** Диэлектрические волноводы / В.Ф. Взятыйшев. – М.: Советское радио, 1970.
4. Интегральная оптика / под ред. Т. Тамира. – М.: Мир, 1978.
5. **Семенов, Н.А.** Оптические кабели связи. Теория и расчет/ Н.А.Семенов. – М.: Радио и связь, 1981.
6. **Унгер, Х.Г.** Планарные и волоконные оптические волноводы / Х.Г.Унгер. – М.: Мир, 1988.
7. **Гроднев, И.И.,** Оптические кабели / И.И. Гроднев, Ю.Т. Ларин, И.И. Теумин. – М.: Энергоиздат, 1991.
8. Волоконно-оптические системы передачи: учебник для вузов / М.М. Бутусов [и др.]; под ред. В.Н.Гомзина. – М.: Радио и связь, 1992.
9. **Беланов, А.С.** Трехслойные волноводы для широкополосных оптических линий связи // Изв. АН СССР. Сер. Физическая, 1978. Т. 42. № 12. С. 1522-1533.
10. **Адамс, М.** Введение в теорию оптических волноводов / М.Адамс. – М.:Мир, 1984.
11. Введение в интегральную оптику / под ред. М.Барноски.– М.:Мир, 1977.
12. **Маркузе, Д.** Оптические волноводы / Д.Маркузе. – М.: Мир, 1974.
13. **Теумин, И.И.** Волноводы оптической связи / И.И. Теумин. – М.: Связь, 1988.
14. **Чео, П.К.** Волоконная оптика / П.К. Чео. – М.: Энергоиздат, 1988.
15. **Семенов, А.С** Интегральная оптика для систем передачи и обработки информации/ А.С. Семенов, В.А. Смирнов, А.В. Шмалько. – М.: Радио и связь, 1990.
16. **Шевченко, В.В.** Плавные переходы в открытых волноводах / В.В.Шевченко. – М.: Наука, 1969.
17. **Маделунг, Э.** Математический аппарат физики / Э. Маделунг. – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961.
18. **Arnbak J.Leaky Waves an Dielectric Road** // Electronics Letts, 1969. V. 5. № 3. P. 41-42.
19. **Веселов, Г.И.** Слоистые металло-диэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М.: Радио и связь, 1988.
20. **Шевченко, В.В.** Наглядная классификация волн, направляемых регулярными открытыми волноводами // Радиотехника и электроника, 1969. Т. 12. №10. С. 36-49.
21. **Мурад-Мурадович, А.Н.** О комплексных волнах высших типов круглого диэлектрического волновода // Радиотехника и электроника, 1995. Т. 40. №9. С. 1359-1361.
22. **Раевский, А.С.** Волны HE и EH круглого диэлектрического волновода // Радиотехника и электроника, 1999. Т.44. №5. С. 517-519.
23. **Каценеленбаум, Б.З.** Возбуждение диэлектрического волновода произвольного сечения при частоте, близкой к критической / Б.З. Каценеленбаум // Радиотехника и электроника, 1980. Т. 25. №2. С. 241-246.
24. **Бритов, И.Е.** О характеристиках несимметричных волн открытого диэлектрического волновода вблизи критических частот / И.Е. Бритов, А.С. Раевский // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 1999. Т. 2. № 2. С. 33-36.
25. **Гетманцева, Т.Н.** О комплексных волнах в круглом диэлектрическом волноводе / Т.Н. Гетманцева, С.Б. Раевский // Изв. вузов. СССР. Радиофизика, 1978. Т. 21. № 9. С. 1332-1337.
26. **Веселов, Г.И.** Комплексные волны круглого диэлектрического волновода / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 2. С. 230-236.

*Дата поступления  
в редакцию 30.03.2010*

**A.S. Raevsky, S.B. Raevsky, O.V. Uskov**

## **THE WAVE SPECTRUM OF CIRCULAR OPEN LAYERED DIELECTRIC WAVEGUIDE**

By the theory of not self-adjoint operators is formulated boundary problem for a circular open dielectric waveguide. The full wave spectrum, including the proper and improper complex wave (CW). is considered. The special emphasis is placed for the characteristics of waves associated with not self-adjoint electrodynamics operators.

*Key words:* circular open dielectric waveguide, the wave spectrum, proper and improper complex waves.