УДК 532.5.011.12

О.С. Кошелев, С.Е. Пилипосян

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Для измерения коэффициента лобового сопротивления A осесимметричного твердого тела, обладающего плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, рассмотрено его колебательное движение в вязкой среде. При малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$, являющихся обязательным условием для измерения A, колебательное движение не возникает. Этот результат можно использовать для гашения упругих колебаний, возникающих в элементах и узлах машин и механизмов.

Приведена схема гасителя, действующего по этому принципу.

Быстрая и локальная диссипация энергии вынужденных колебаний в среде с высокой вязкостью приводит к локальному повышению температуры и снижает вязкость в области трущихся поверхностей. Этот эффект можно использовать для повышения подвижности пластов вязких природных битумов в процессе их добычи.

Ключевые слова: осесимметричное твердое тело, коэффициент лобового сопротивления, вязкая жидкость, логарифмический декремент затухания, число Рейнольдса, гаситель упругих колебаний.

Экспериментальное определение коэффициента лобового сопротивления A твердого тела, движущегося в вязкой среде, представляет интерес потому, что теоретический расчет значения A в случае тела произвольной формы не представляется возможным. Аналитическое решение уравнения Навье-Стокса для равномерного поступательного движения однородного шара в бесконечной вязкой жидкости, найденное Стоксом в 1851 году, привело к результату $A = 6\pi$.

Сила лобового сопротивления F_z, испытываемого телом при прямолинейном равномерном (поступательном) движении в жидкости, отличается от нуля $F_z \neq 0$ только в случае движения в неидеальной жидкости, обладающей ненулевой динамической вязкостью η [1].

Полная сила $\vec{\mathrm{F}}$, действующая на тело, зависит от формы и размеров тела, его ориентации по отношению к потоку, скорости потока v (на бесконечно отдалённой точке) и свойств жидкости. Согласно теории размерности [1], существует функциональная связь между величинами $\vec{\mathrm{F}}$, v, ρ, η, S, где ρ – плотность жидкости, S - характерная площадь поперечного сечения тела, а $l \cong \sqrt{S}$ считается характерным линейным размером тела. Эта функция представляется в виде

$$\left|\vec{\mathrm{F}}\right| = C(\mathrm{Re}) S\rho v^2/2; \quad F_z = C_z(\mathrm{Re}) S\rho v^2/2; \quad F_y = C_y(\mathrm{Re}) S\rho v^2/2. \tag{1}$$

Безразмерные коэффициенты $C_z(\mathrm{Re})$ и $C_y(\mathrm{Re})$, зависящие от числа Рейнольдса, - это коэффициенты лобового сопротивления и подъёмной силы соответственно. При больших значениях числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \rho v_0 l/\eta = v_0 l/\nu \gg 1, \tag{2}$$

когда движение в жидкости определяется силами инерции и роль вязкости незначительна и для скоростей порядка или больше скорости звука, коэффициенты $C_z(\mathrm{Re})$ и $C_y(\mathrm{Re})$ зависят не только от числа Рейнольдса, но и от числа Маха: $\mathrm{M} = v_0/c$ [1, 2], то есть, $C_z = C_z(\mathrm{Re}, \mathrm{M})$ и $C_y = C_y(\mathrm{Re}, \mathrm{M})$.

В случае $\mathrm{Re} \ll 1$, когда инерция, то есть скорость v и плотность ρ жидкости не играют существенной роли, F_z определяется почти исключительно вязкостью η. Независимость лобового сопротивления F_z от плотности ρ жидкости возможно только в том случае, если зависящий только от числа Рейнольдса безразмерный коэффициент $C_z(\mathrm{Re})$ будет иметь следующий явный вид:

$$C_z(\mathrm{Re}) = A\frac{1}{\mathrm{Re}} = A\frac{\eta}{\rho v l}, \tag{3}$$

где A – безразмерная постоянная. Действительно, в этом случае сила лобового сопротивления F_z принимает вид, не зависящий от плотности жидкости:

$$F_z = C_z(\mathrm{Re}) S\rho v^2/2 = A\frac{\eta}{\rho v l} S\rho v^2/2 = A\eta v l, \tag{4}$$

где $l = \sqrt{S/2}$.

Теоретический расчёт коэффициента A в общем случае является сложной, кропотливой задачей, требующей интегрирования уравнений движения вязкой жидкости (уравнение Навье - Стокса) [2]. Поэтому представляет интерес экспериментальное измерение коэффициента A. В 1851 году английский физик и математик Джордж Стокс рассчитал значение коэффициента A для случая медленного, поступательного движения твердотельного шара радиуса R в неограниченной вязкой жидкости. Для коэффициента A получено значение $A = 6\pi$, принимая за характерный размер тела радиус шара $l = R$.

Значение параметра A для тел, обладающих осевой симметрией и плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, можно найти экспериментальным путем.

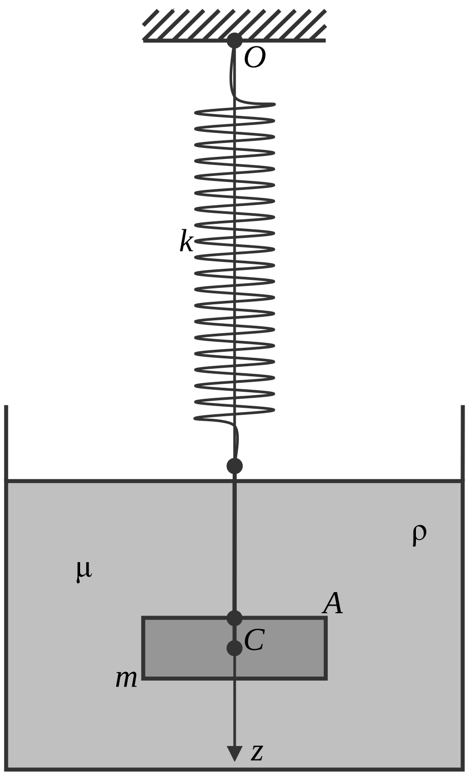

Рис. 1

Метод гармонических колебаний

Рассмотрим возможность измерения параметра A с помощью гармонических колебаний испытуемого тела в вязкой жидкости [3]. Крутильные колебания цилиндра вокруг оси симметрии использовались для измерения вязкости жидкости Ш. Кулоном. Напомним, что сила лобового сопротивления представляется простым выражением (4) только в условиях, когда число Рейнольдса много меньше единицы.

Измерение периода гармонических колебаний однородного твердого тела массы m определенной формы и размеров, подвешенного на упругой пружине с жёсткостью k в вакууме (разреженном газе) и в жидкости (с известной вязкостью η), позволяет исключить параметр k из окончательных результатов и определить число A. Ось пружины совпадает с осью симметрии твёрдого тела и, следовательно, проходит через его центр масс (рис. 1). Гармонические колебания в воздухе, если массой пружины и сопротивлением воздуха пренебречь, происходят по закону [4]:

$$mz'' = -kz \qquad \text{или} \qquad z'' + \omega_0^2 z = 0. \tag{5}$$

Угловая частота и период этих колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}; \quad T_0 = 2\pi/\omega_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}. \tag{6}$$

Ось Z направлена вертикально вниз, по вектору ускорения $\vec{g}$.

Если учесть, что сила Архимеда меняет только равновесную начальную длину пружины, а сила лобового сопротивления направлена против вектора скорости тела $\vec{v}$, то колебания тела в жидкости будут подчиняться уравнению

$$mz'' = -kz - A\eta l v = -kz - A\eta l z' \quad \text{или} \quad z'' + 2\beta z' + \omega_0^2 z = 0. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид [3]

$$z = a_0 \exp(-\beta t)\sin(\omega t + \gamma). \tag{8}$$

$$\beta = A\eta l/(2m), \tag{9}$$

где β – коэффициент затухания. Это затухающие колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{k/m - \left(A\eta l/(2m)\right)^2}, \tag{10}$$

с начальной амплитудой a_0 и начальной фазой γ. Период незатухающих колебаний, когда $\beta = 0$, представляется выражением (6). Очевидно, что при наличии сил сопротивления (9) колебания (10) возникнут, если выполняется условие

$$\omega_0^2 - \beta^2 > 0, \quad \text{или} \quad k > (A\eta l)^2/(4\text{m}).$$

Период затухающих колебаний будет

$$T = T_0 \frac{\sqrt{k/m}}{\sqrt{k/m - \left(A\eta l/(2m)\right)^2}} = T_0 \left(1 - \frac{(A\eta l)^2}{4mk}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Следовательно,

$$A = 4\pi m \sqrt{\left(T^2 - T_0^2\right)} / \left(\eta l T_0 T\right). \tag{12}$$

Логарифмируя выражение (12) и дифференцируя $\ln A$, получим

$$d[\ln A] = d\left(\ln(4\pi) + \ln(m) + \frac{1}{2}\ln(T - T_0) + \frac{1}{2}\ln(T + T_0) - \ln\eta - \ln l - \ln T_0 - \ln T\right)$$

или

$$\frac{dA}{A} = \frac{dm}{m} + \frac{1}{2}\frac{d(T - T_0)}{(T - T_0)} + \frac{1}{2}\frac{d(T + T_0)}{(T + T_0)} - \frac{d\eta}{\eta} - \frac{dl}{l} - \frac{dT_0}{T_0} - \frac{dT}{T}.$$

В измерениях периоды колебаний T_0 и T определяются одинаковой абсолютной погрешностью $\Delta T_0 = \Delta T$. Учитывая, что

$$\varepsilon_{(T-T_0)} = \frac{\Delta(T - T_0)}{|T - T_0|} = \frac{\Delta T + \Delta T_0}{|T - T_0|} = \frac{2\Delta T}{(T - T_0)},$$

для относительной погрешности ε_A в измерениях коэффициента A, получим

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{|T - T_0|}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{|T + T_0|}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}, \tag{13}$$

где абсолютная погрешность Δu случайной величины u со средним значением $\langle u\rangle$ для N испытаний с доверительной вероятностью P = 95 % определяется с помощью коэффициента Стьюдента $t_{P,N}$ по формуле

$$\Delta u = t_{P,N}\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - \langle u\rangle\right)^2\right] / \left[N(N-1)\right]}. \tag{14}$$

Погрешность измерения ε_A быстро растет, при $|T - T_0| \to \Delta T$. Следовательно, во время эксперимента должно соблюдаться условие $\Delta T << |T - T_0|$. В ходе колебательного движения скорость тела v меняется, но если при этом удовлетворяется условие $\text{Re} = vl\rho/\eta = vl/\nu << 1$, то A практически не будет зависеть от v. Чтобы число Рейнольдса оставалось много меньше единицы при не слишком малых размерах тела и его скорости, необходимо использовать жидкость с наибольшим значением кинематической вязкости ν. В табл. 1 приведены значения величин ρ, η, ν, Re для некоторых газов и жидкостей при комнатной температуре $t = 25^{\circ}C$ и при атмосферном давлении (ν – кинематическая вязкость).

Зависимость динамической вязкости η от абсолютной температуры T выражается формулой

$$\eta_T = \eta_{T_0}\sqrt{T/T_0}\left(1 + C/T_0\right)/\left(1 + C/T\right), \tag{15}$$

где C – постоянная Сезерленда. В интервале температур $20 \le t^{\circ}\mathrm{C} \le 280$ для воздуха $C = 106{,}8$, для азота - $C = 103{,}9$, для кислорода - $C = 126{,}6$, для аргона - $C = 140{,}2$, для углекислого газа - $C = 254{,}0$. Число Рейнольдса рассчитано для скорости $v = 1{,}0$ см/с и характерного размера поперечного сечения $l = 1{,}0$ см.

Из табл. 1 видно, что неравенство $\mathrm{Re} << 1$ имеет место при колебаниях в глицерине с температурой $t \le 25^{\circ}\mathrm{C}$ и в жидкой сере с температурой $t = 200^{\circ}\mathrm{C}$, когда вязкость серы максимальна. Измерение периода колебаний в воздухе лучше проводить, при малых плотностях воздуха.

Таблица 1

$l = 1{,}0$ см	$t^{\circ}\mathrm{C}$	$\rho\left(\text{кг}/\text{м}^3\right)$	$\eta\left(\text{Па}\cdot\text{с}\right)$	$\nu\left(\text{м}^2/\text{с}\right)$	$\mathrm{Re} = \rho l v/\eta$
Углекислый газ	0	1,9768	$0{,}1487 \cdot 10^{-4}$	$0{,}07522 \cdot 10^{-4}$	13,294
Аргон	0	1,7839	$0{,}2250 \cdot 10^{-4}$	$0{,}12613 \cdot 10^{-4}$	7,928
Воздух	0	1,2928	$0{,}1837 \cdot 10^{-4}$	$0{,}1421 \cdot 10^{-4}$	7,038
Азот	0	1,2505	$0{,}1775 \cdot 10^{-4}$	$0{,}14194 \cdot 10^{-4}$	7,045
Кислород	0	1,42904	$0{,}2047 \cdot 10^{-4}$	$0{,}1432 \cdot 10^{-4}$	6,981
Уксус. кислота	25	$1{,}049 \cdot 10^3$	$8{,}4 \cdot 10^{-4}$	$0{,}00801 \cdot 10^{-4}$	124,88
Вода	10	$\cong 1{,}0 \cdot 10^3$	$1303{,}7 \cdot 10^{-4}$	$1{,}3037 \cdot 10^{-4}$	0,767
Вода	25	$\cong 1{,}0 \cdot 10^3$	$890{,}9 \cdot 10^{-4}$	$0{,}8909 \cdot 10^{-4}$	1,122
Вода	50	$\cong 1{,}0 \cdot 10^3$	$798{,}2 \cdot 10^{-4}$	$0{,}7982 \cdot 10^{-4}$	1,253
Глицерин	10	$\cong 1{,}26 \cdot 10^3$	$39500 \cdot 10^{-4}$	$31{,}349 \cdot 10^{-4}$	0,0319
Глицерин	20	$1{,}26 \cdot 10^3$	$14800 \cdot 10^{-4}$	$11{,}746 \cdot 10^{-4}$	0,085
Глицерин	25	$\cong 1{,}26 \cdot 10^3$	$10000 \cdot 10^{-4}$	$7{,}9365 \cdot 10^{-4}$	0,126
Глицерин	30	$1{,}26 \cdot 10^3$	$6000 \cdot 10^{-4}$	$4{,}762 \cdot 10^{-4}$	0,21
Сера жидкая	200	$\cong 1{,}81 \cdot 10^3$	$215000 \cdot 10^{-4}$	$118{,}784 \cdot 10^{-4}$	$8{,}42 \cdot 10^{-3}$

Максимальной скоростью $v_{\max}$ тело обладает при прохождении положения равновесия. Согласно принятому условию, $v_{\max} \le 0{,}01$ м/с. Следовательно, энергия первоначальной деформации пружины должна удовлетворять условию

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{kz_0^2}{2}; \quad z_0 = v_{\max}\sqrt{m/k} = v_{\max}T_0/\left(2\pi\right), \tag{16}$$

$$mv_{\max}^2 = \rho_T V v_{\max}^2 = \rho_T\left(\sqrt[3]{V}\right)^3 v_{\max}^2 = \rho_T l^3 v_{\max}^2 = kz_0^2, \tag{17}$$

где l - характерный линейный размер тела.

Логарифмический декремент λ, коэффициент затухания β, и число колебаний N_e , после которых амплитуда колебаний уменьшается в **e** раз, связаны соотношением [4]

$$\lambda=\ln\left(\frac{a(t)}{a(t+T)}\right)=\beta T=\frac{A\eta l}{2m}\frac{2\pi}{\sqrt{k/m-\left(A\eta l/(2m)\right)^2}}=\frac{1}{N_e},$$
$$N_e=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4km}{(A\eta l)^2}-1}=\frac{1}{\beta T}\gg 1,\quad T-T_0\gg\Delta T, \tag{18}$$

где ΔT – абсолютная погрешность измерения периода колебаний.

Чтобы уменьшить погрешность измерения периода колебаний ΔT во время эксперимента стараются измерить совокупное время как можно большего числа колебаний $N>>1$, после того, как систему вывели из состояния устойчивого равновесия. Но, как убедимся далее, условие малости числа Рейнольдса $\mathrm{Re}<<1$ несовместимо с условием $N_e>>1$, потому колебания быстро затухают, точнее, колебания не возникают.

Подставляя в формулу (11) значение параметра $A=6\pi$ и $l=R$ для шара, найдем связь между периодом незатухающих свободных колебаний шара в вакууме T_0 и периодом затухающих колебаний в вязкой жидкости T:

$$T=T_0\left(1-\frac{(6\pi\eta R)^2}{4k\frac{4}{3}\pi R^3\rho_T}\right)^{-\frac{1}{2}}=T_0\left(1-\frac{27\pi\eta^2}{4kR\rho_T}\right)^{-\frac{1}{2}};\quad T_0<T<\infty. \tag{19}$$

Введем параметр $\xi=\frac{27\pi\eta^2}{4kR\rho_T}$. Из (19) следует, что $0\le\xi\le1$.

Разложив выражение (19) в ряд по степеням $\xi<<1$, получим

$$T=T_0(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}=T_0\left(1+\frac{1}{2}\xi+\frac{3}{8}\xi^2+\frac{5}{16}\xi^3+\cdots\right). \tag{20}$$

$$\frac{T-T_0}{T_0}=\frac{\Delta T}{T_0}=\frac{1}{2}\xi+\frac{3}{8}\xi^2+\frac{5}{16}\xi^3+\cdots$$

Предположим $\xi=0,1$, тогда

$$T=T_0\left(1+0,05+\frac{3}{800}+\frac{5}{16000}+\cdots\right)=T_0\left(1+\frac{865}{16000}+\cdots\right)=T_0\left(1+0,05406+\cdots\right).$$

Очевидно, что чем меньше ξ, тем быстрее сходится ряд к своему пределу.

В случае $\xi=0,2$, получаем

$$T=T_0\left(1+0,1+\frac{3}{200}+\frac{5}{2000}+\cdots\right)=T_0\left(1+\frac{235}{2000}+\cdots\right)=T_0\left(1+0,1137+\cdots\right).$$

Предположим теперь, что $\xi=0,5$, тогда

$$T=T_0\left(1+0,25+\frac{3}{32}+\frac{5}{128}+\cdots\right)=T_0\left(1+\frac{49}{128}+\cdots\right)=T_0\left(1+0,3828125+\cdots\right).$$

В этом случае ряд значительно медленнее сходится к пределу.

Наконец, когда $\xi\to1$, то $T\to\infty$, то есть колебания не возникают.

Рассмотрим, какие ограничения накладывает одновременное выполнение малости числа Рейнольдса $\mathrm{Re}<<1$ и условие возникновения колебаний, то есть малости затухания $N_e>>1$, и убедимся в том, что они несовместимы. Пусть

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{27\pi\eta^2}{4kR\rho_T} = \dfrac{27\pi\rho_ж^2\nu^2}{4kR\rho_T} = 0,2 \\ \mathrm{Re} = \dfrac{\rho_ж vR}{\eta} = \dfrac{vR}{\nu} = 0,1; \quad \nu = 10vR \end{cases} \tag{21}$$

Подставляя значение вязкости ν из второго уравнения в первое, получаем равенство $\dfrac{27\pi\rho_ж^2 \cdot 100R^2v^2}{4kR\rho_T} = 0,2$, откуда находим жесткость пружины k:

$$k = \frac{2700}{0,8}\pi R\frac{\rho_ж^2 v^2}{\rho_T} = \frac{270}{0,8}\pi\frac{\rho_ж v\eta}{\rho_T} = \frac{27}{0,8}\pi\frac{\rho_ж^2\nu^2}{\rho_T R}. \tag{22}$$

Таким образом, если задана жидкость с известными $\rho_ж$, η и $\nu = \eta/\rho_ж$, а также известны плотность $\rho_т$, радиус R, и масса $m = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_т$ шара, то, определив сначала скорость движения шара $v = \dfrac{0,1\eta}{\rho_ж R} = \dfrac{0,1\nu}{R}$, удовлетворяющую условию малости числа Рейнольдса, далее находим значение жесткости k пружины, удовлетворяющее условию возникновения колебаний:

$$k = \frac{270}{0,8}\pi\frac{\rho_ж v\eta}{\rho_T}.$$

Но амплитудное значение растяжения пружины Δz_0 и максимальная скорость движения шара в жидкости $v_{\max}$ связаны условием закона сохранения энергии. При движении тела в диссипативной среде имеем

$$k\left(\Delta z_0\right)^2 \geq m\left(v_{\max}\right)^2, \text{ или} \tag{23}$$

$$\Delta z_0 \geq \sqrt{\frac{m}{k}}v_{\max} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho_т}{\frac{270}{0,8}\pi\frac{\rho_ж v\eta}{\rho_T}}}v_{\max} = \frac{\rho_T}{\rho_ж}\frac{v_{max}}{v}R\sqrt{\frac{3,2}{810}\frac{\rho_ж vR}{\eta}} = \frac{\rho_T}{\rho_ж}\frac{v_{\max}}{v}R\sqrt{\frac{3,2}{810}}\sqrt{\mathrm{Re}}. \tag{24}$$

Максимальная скорость движения шара в жидкости не должна превышать значение, по которому определяется число Рейнольдса:

$$v_{\max} \cong v = \frac{0,1\eta}{\rho_ж R}. \tag{25}$$

Тогда первоначальное растяжение пружины представляется выражением

$$\Delta z_0 = \frac{\rho_T}{\rho_ж}R\sqrt{\frac{3,2}{810}}\sqrt{\mathrm{Re}} = \frac{\rho_T}{\rho_ж}R\sqrt{\frac{3,2}{8100}} = \frac{\rho_T}{\rho_ж}\frac{R}{50,3}. \tag{26}$$

Рассмотрим движение шара из вольфрама в глицерине при $t = 20^{\circ}$ C.

$\rho_ж = 1,26\cdot10^3$ кг/м^3, $\eta = 1,48$ Па·с. и $\nu = \eta/\rho_ж = 11,746\cdot10^{-4}$ м^2/с., а

$\rho_т = (18,6 \div 19,1)\cdot10^3$ кг/м$^3 = 18,85\cdot10^3$ кг/м^3, радиус $R = 5$ мм, масса

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_т = \frac{4\pi}{3}\frac{(2R)^3}{8}\rho_т = \frac{3,14159}{6}18,85\cdot10^{-3}\ \text{кг} = 9,87\cdot10^{-3}\ \text{кг}.$$

$$v=\frac{0,1\eta}{\rho_ж R}=\frac{0,1\cdot 1,48\text{ Па}\cdot\text{с}}{1,26\cdot 10^3\text{кг}/\text{м}^3\cdot 5\cdot 10^{-3}\text{м}}=\frac{0,148}{6,3}\text{м}/\text{с}=0,0235\text{ м}/\text{с},$$

$$k=\frac{270}{0,8}\pi\frac{\rho_ж v\eta}{\rho_T}=\frac{270}{0,8}3,14159\frac{1,26\cdot 0,0235\cdot 1,48}{18,85}\text{н/м}=\frac{37,172}{15,08}\text{н/м}=2,465\text{н/м},$$

$$\Delta z_0=\frac{\rho_T}{\rho_ж}\frac{R}{50,3}=\frac{18,85}{1,26}\cdot\frac{5\text{ мм}}{50,3}=\frac{94,25}{63,378}\text{мм}=1.487\text{мм}.$$

Эта пружина удлиняется около 36,64 мм, чтобы уравновесить силу тяжести шара с учетом силы Архимеда в глицерине. Дополнительное удлинение из этого состояния равновесия составляет 1,5 мм.

Найдем число колебаний, которые совершит шар, выведенный из состояния равновесия на величину Δz_0 до момента, когда первоначальная амплитуда уменьшится в e раз. Логарифмический декремент λ, коэффициент затухания β и число колебаний N_e, после которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз, связаны соотношением (18) [4]

$$N_e=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\beta T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4km}{\left(A\eta l\right)^2}-1},\quad T-T_0>>\Delta T,$$

где ΔT - погрешность измерения периода колебаний на эксперименте. Следовательно,

$$N_e=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4km}{\left(6\pi\eta R\right)^2}-1}=\frac{1}{6,28318}\sqrt{\frac{97,32\cdot 10^{-3}}{19456,98\cdot 10^{-6}}-1}=\frac{1}{2\cdot 3,14159}\sqrt{5,0018-1}=\frac{1}{\pi}.$$

Поскольку в процессе жидкого трения явление застоя отсутствует и амплитуда колебаний уменьшается по геометрической прогрессии [5], то в данном случае в конце первого колебания амплитуда уменьшится в $e^{\pi}=23,1407$ раз. Из общих выводов теории также следует, что колебательное движение в вязкой среде при $\mathrm{Re}<<1$ не должно возникать.

Действительно, для возникновения колебательного движения система, выведенная из состояния устойчивого равновесия, должна стремиться назад к состоянию устойчивого равновесия. Но в момент, когда система оказывается в состоянии равновесия, она должна обладать достаточно большой инерцией, чтобы продолжать движение от состояния равновесия.

Согласно условиям данной задачи, движение шара в вязкой среде при $\mathrm{Re}<<1$ обусловлено не силами инерции, а главным образом силами трения, то есть роль сил инерции незначительна, поэтому полученная численная оценка вполне закономерна.

Следовательно, колебательное движение в вязкой среде при $\mathrm{Re}<<1$ невозможно. Возникновение колебаний – свидетельство того, что процесс движения тела в вязкой среде определяется силами инерции, а силы трения играют незначительную роль. Такие условия создаются при больших значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re}>>1$. Поэтому система (упругая пружина и шар), оказавшись в точке устойчивого равновесия, не может остановиться и по инерции продолжает движение. В данном же случае (при малости числа Рейнольдса) движение определяется вязкостью среды, и силы инерции существенной роли не играют. Поэтому как бы ни изменились вязкость среды, ее плотность и радиус шара (при условии постоянства числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=\mathrm{const}<<1$), характер движения практически не изменится и будет определяться значением числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=lv_0\rho/\eta=lv_0/\nu<<1$.

Коэффициент затухания, согласно формулам (9) и (20), при этом будет

$$\beta=\frac{1}{T\cdot N_e}=\frac{A\eta l}{2m}=\frac{A\rho_ж \nu l}{2m}=\frac{A}{2m}\frac{\rho_ж \nu l}{\eta}\frac{\eta^2}{\rho_ж \nu}=\frac{A}{2m}\mathrm{Re}\frac{\eta^2}{\rho_ж \nu}. \tag{27}$$

Сравним движения вольфрамового шара в глицерине и в уксусной кислоте при температуре $t=25^{\circ}$ С. Из таблицы видно, что динамические вязкости этих жидкостей при температуре $t=25^{\circ}$ С отличаются ровно в 1000 раз.

Поскольку плотности этих жидкостей мало отличаются, то в таком же соотношении находятся их кинематические вязкости.

Чтобы сохранить прежнее значение числа Рейнольдса при замене глицерина уксусной кислотой мы вынуждены уменьшить в 1000 раз или радиус шара, или скорость шара, или их произведение. Рассмотрим сначала первый вариант, когда скорость не меняется, а радиус шара уменьшается в 1000 раз. Согласно (21), в 1000 раз уменьшатся k и Δz_0: $k=\frac{270}{0,8}\pi\frac{\rho_ж v\eta}{\rho_T}$ и $\Delta z_0=\frac{\rho_T}{\rho_ж}\frac{R}{50,3}$, а значение параметра $\xi=0,2$ не изменится. Не изменится также значение числа колебаний, после которых амплитуда уменьшается в **e** раз.

$$N_e=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4km}{\left(6\pi\eta R\right)^2}-1}=\frac{1}{6,28318}\sqrt{\frac{97,32\cdot10^{-3}}{19456,98\cdot10^{-6}}-1}=\frac{1}{2\cdot3,14159}\sqrt{5,0018-1}=\frac{1}{\pi},$$

поскольку и числитель, и знаменатель дроби под квадратным корнем уменьшатся ровно в 10^{12} раз.

В случае, когда меняем только жидкость, а шар остается тот же, чтобы выполнялось условие $\mathrm{Re}=vR/\nu=0,1$, скорость движения шара нужно уменьшить в 1000 раз. Тогда k пружины уменьшиться в 10^6 раз, начальное отклонение пружины $\Delta z_0=v_{\max}\sqrt{m/k}=\frac{\rho_T}{\rho_ж}\frac{R}{50,3}$ останется неизменным.

Следовательно, значение параметра $\xi=\frac{27\pi\eta^2}{4kR\rho_T}=0,2$ останется неизменным. Число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в **e** раз, будет

$$N_e=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4km}{\left(6\pi\eta R\right)^2}-1}=\frac{1}{\pi},$$

то есть колебания опять не возникнут. Характер движения не изменится и тогда, когда для постоянства числа Рейнольдса в 1000 раз уменьшим значение произведения vR.

Если поверхность тела не является сферой, но обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной к его оси симметрии, то значение числа A будет зависеть от конкретной формы осевой симметрии тела (в случае тела вращения - конус, цилиндр, параболоид вращения положительной и отрицательной кривизны, шар, эллипсоид вращения и т. д.) и ориентации тела относительно вектора скорости относительного движения в жидкости.

Предполагается, что относительная скорость движения совпадает с осью симметрии тела, и поэтому подъемная сила отсутствует. Тело должно обладать плоскостью симметрии, перпендикулярной к его оси симметрии, поскольку колебательное движение происходит в обоих направлениях оси симметрии, то и лобовое сопротивление должно быть одинаковым в обоих направлениях движения. Сочетая перечисленные простые формы, можно получить осесимметричные тела, обладающие плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, и при этом имеющие довольно сложную форму. Для получения такой поверхности достаточно взять произвольную ограниченную четную функцию $y=f(z)$ $(0\le z\le a)$, отразить ее график в плоскости XOY и полученную плоскую кривую $y=f(z)$ $(-a\le z\le a)$ вращать вокруг оси OZ (рис. 2). Полученный результат справедлив для тел целого семейства форм.

Таким образом, при малых числах Рейнольдса возникшие в вязкой среде упругие колебания быстро затухают, и это обстоятельство можно использовать для создания гасителя упругих колебаний.

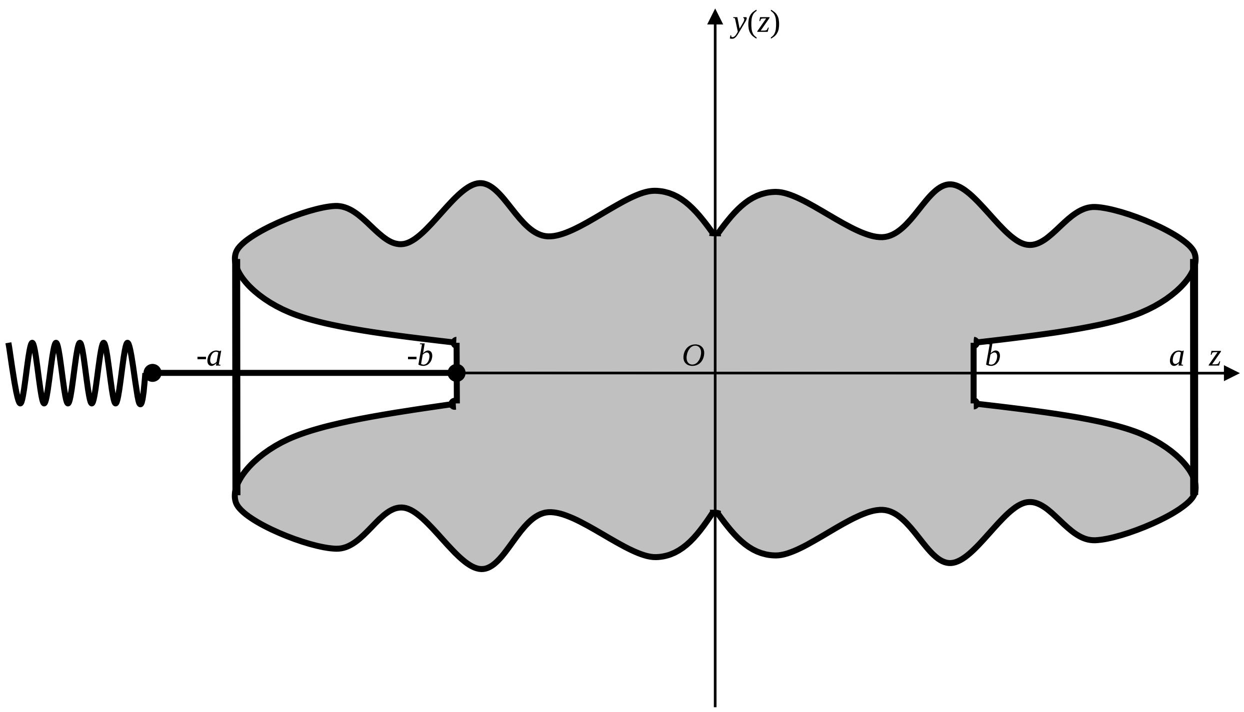

Рис. 2

При эксплуатации различных машин и механизмов часто возникают нежелательные колебания, которые могут вызывать усталость упругого материала, активизируя развитие микротрещин, а в случае резонанса могут привести к быстрому разрушению отдельных узлов и механизмов в целом.

Основным элементом гасителя колебаний (рис. 3) может служить некоторая матрица с большим числом регулярно расположенных отверстий малого диаметра. Матрицу необходимо изготавливать из материала с высокой теплопроводностью. Если ее устанавливать в герметичный двухкамерный контейнер с вязкой жидкостью, то при возникновении внешней силы, вызывающей упругую деформацию, появляется разность давлений жидкости в камерах, вследствие чего жидкость с некоторой скоростью перетекает из одной камеры в другую через матрицу гасителя. Согласно принципу относительности, такое движение жидкости равносильно движению каркаса матрицы через неподвижную жидкость той же скоростью. Для затухания колебаний такое движение в жидкости должно удовлетворять условию $\mathrm{Re} \ll 1$, где l - характерный линейный размер элемента каркаса гасителя, а v - скорость относительного движения.

Хорошая теплопроводность материала матрицы гасителя позволяет поддерживать стабильную температуру (постоянство η) в жидкости даже при интенсивном выделении тепла вследствие жидкого трения.

Очевидно, что в качестве матрицы гасителя можно использовать пористый, а точнее, композитный материал с ориентированными и упорядоченными мезотрубками, имеющими диаметр в несколько мкм и макроскопическую длину. В таком случае выполнение условия $\mathrm{Re} \ll 1$ становится проще.

Такие сеточные структуры уже нашли применение для гашения ударных волн [6], для которых скорость распространения в среде максимальна. Для газовой среды, например, скорость распространения ударной волны как сильного возмущения равновесного давления среды выше, чем скорость распространения слабых возмущений давления, каковыми являются упругие звуковые волны [7].

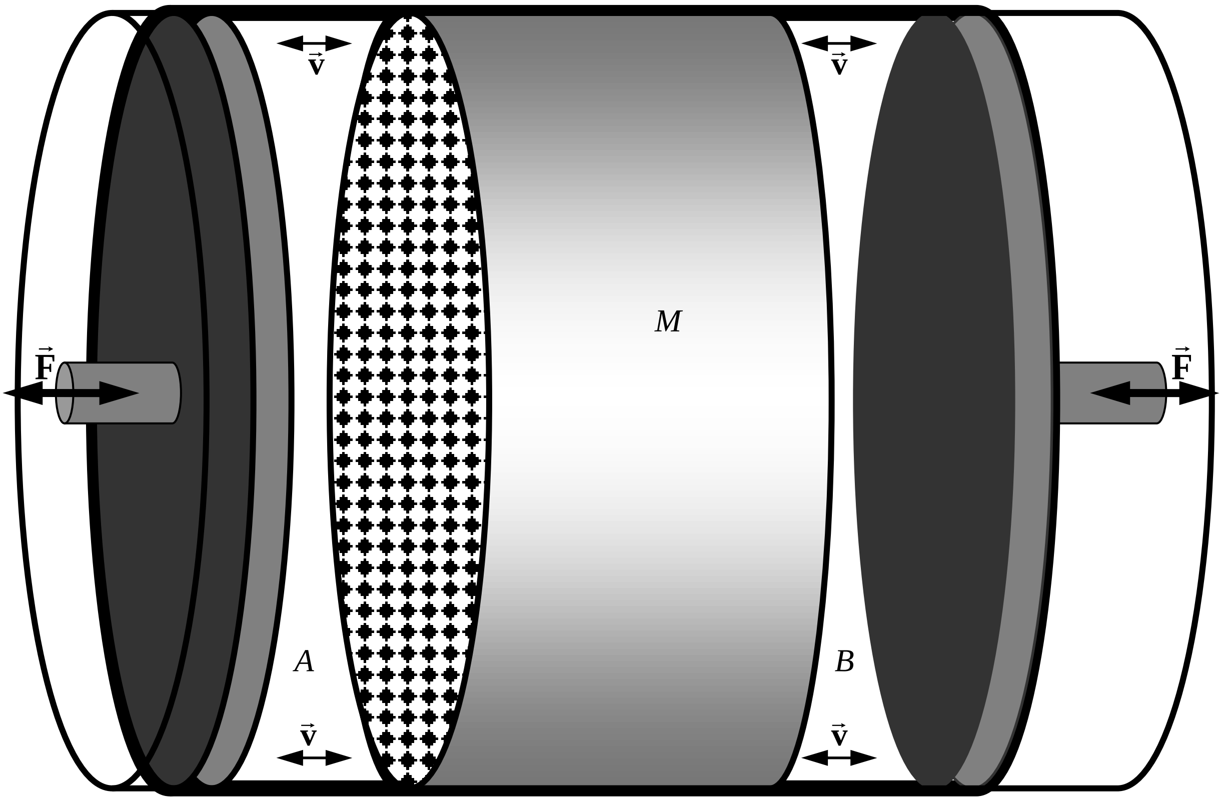

Рис. 3

Быстрое затухание вынужденных колебаний в среде с высокой вязкостью приводит к локальному повышению температуры и снижает вязкость в области трущихся поверхностей. Этот эффект можно использовать для низкозатратного и эффективного повышения подвижности в объемах пластов вязких природных битумов в процессе их более полной и качественной добычи [8].

Выводы

Упругие колебания твердых тел в вязкой среде, при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$ быстро затухают (не возникают). Это обстоятельство можно использовать для создания эффективных гасителей нежелательных (вредных) упругих колебаний, возникающих в узлах машин и механизмов.

Энергию вынужденных колебаний в среде с высокой вязкостью при $\mathrm{Re} \ll 1$ можно использовать для быстрого местного нагрева трущихся поверхностей и резкого снижения вязкости в этой области.

Библиографический список

1. **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики: учебное пособие для вузов: в 5 т. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2006. – 544 с.
2. **Циглер, Ф.** Механика твёрдых тел и жидкостей: пер. с англ. / Ф. Циглер; под ред. Ю.И. Няшина. - Москва-Ижевск.: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотичная динамика», 2002. – 885 с.
3. **Пилипосян, С.Е.** Сила трения: учеб. пособие/ С.Е. Пилипосян, И.Е. Бритов; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Н. Новгород, 2009. -132 с.
4. **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учебное пособие: в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика/И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2006. - 432 с.

5. **Голубева, О.В.** Теоретическая механика / О.В. Голубева. – М.: Физматлит, 1961. –701 с.
6. **Молотков Л.А.** О затухании в эффективной модели, описывающей пористые и трещиноватые среды, насыщенные жидкостью // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. 297. 216–229 с.
7. **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики: учебное пособие для вузов. В 5 т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2006. – 560 с.
8. **Марфин, Е.А.** О влиянии упругих волн на вязкость жидких углеводородов/ Е.А. Марфин, Я.И. Кравцов // Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой: НАНОМЕХ – 2009: тез. докл. 1-й Всероссийской конференции. Н. Новгород 21–23 сентября 2009 г. / НГТУ. – Н. Новгород. – С. 128-129.

Дата поступления
в редакцию 15.05.2010

O.S. Koshelev, S.E. Piliposian

VIBRATORY MOTION IN VISCOUS MEDIUM

The article contains the analysis of vibratory motion in viscous medium of an axially symmetrical solid body, which has plane of symmetry perpendicular to axis of symmetry, with the aim of its *A* head drag coefficient measurement. Vibratory motion does not occur at low Reynolds numbers Re<<1, which is an indispensable condition for *A* measurement. This result can be used for damping the elastic vibrations, which take place in engine and machine parts.

The article contains a diagram of a damper, which operated according to this principle.

Rapid and local energy dissipation of forced vibrations in high viscosity environment leads to local raise of temperature and decreases viscosity in the area of wear surfaces. This effect can be used to increase mobility of natural viscous bitumen in the process of recovery.

Key words: axially symmetrical solid body, head drag coefficient, viscous liquids, logarithmic decrement, Reynolds number, damping the elastic vibrations.