

УДК 621.372.8

В.В. Ермошин, Т.В. Кожевникова, А.В. Назаров, И.Д. Слестникова

**РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ОТ ВОЛНОВОДНОЙ НАГРУЗКИ
МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИЙ**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Показана возможность применения метода коллокаций при расчете коэффициента отражения от волноводной нагрузки. При выборе распределения узлов коллокаций использован математический аппарат теории корреляции. Представлены результаты исследования сходимости, расчета невязки касательных составляющих электромагнитного поля на границе раздела областей. Приведена частотная зависимость коэффициента отражения.

Ключевые слова: прямоугольный волновод, волноводная нагрузка, дифракционная задача, метод коллокаций, коэффициент отражения.

Экранированные волноводы с резистивными пленками широко применяются в технике СВЧ при создании фильтров паразитных мод, широкодиапазонных аттенюаторов, вентиляционных устройств, направленных ответвителей, согласованных нагрузок и др. [1].

Волны в таких волноводах обладают рядом особенностей: у большинства из них отсутствуют критические частоты; несмотря на принципиальную диссипативность направляющих систем, некоторые из волн в широких частотных интервалах распространяются практически без затухания; при введении в волноводы резистивных пленок существенно меняются энергетические характеристики волн, возникают неоднозначные дисперсионные зависимости, аномальная дисперсия, частотные зависимости формы фазовых фронтов и т.д.

Экспериментальный подбор оптимальных параметров таких структур, обеспечивающих заданные рабочие характеристики в широкой полосе частот, требует больших материальных и временных затрат, поэтому актуальной задачей является разработка инженерных алгоритмов для конструкторского расчета.

В работе приводится алгоритм расчета коэффициента отражения от волноводной нагрузки, которая представляет собой закороченный отрезок прямоугольного волновода, перегороженный в продольном сечении диэлектрической вставкой с нанесенными на ее поверхность резистивными пленками. Расчет коэффициента отражения сводится к решению задачи дифракции электромагнитных волн на стыке волноводов. Ранее было показано [2], что при алгебраизации граничных условий в данной задаче удобнее применять метод коллокаций. Однако, как известно, существенным недостатком метода коллокаций является отсутствие правила, строго определяющего выбор распределения точек, в которых записываются граничные условия (так называемых узлов коллокаций). В данной работе рассматриваются два варианта распределения узлов коллокаций: равномерное распределение узлов как наиболее простое с точки зрения численной реализации и распределение, полученное на основе корреляционного подхода [3].

Во втором случае выбор оптимального распределения узлов коллокаций осуществляется на основе методов теории корреляции путем максимизации (на стыке структур) коэффициента корреляции касательных составляющих электромагнитного поля, что соответствует наилучшему выполнению граничных условий.

Рассмотрим процедуру расчета коэффициента отражения от стыка полого прямоугольного волновода и волноводной нагрузки. Стенки волноводов считаем идеально проводящими. Продольное и поперечное сечения системы «волновод – нагрузка» показаны на рис. 1. В полом волноводе (рис. 1, а, область I) распространяется основная волна H_{10} , тогда

на стыке при симметричном расположении резистивной пленки будут возбуждаться только волны H_{m0} , где индекс m принимает лишь нечетные значения.

На первом этапе рассмотрим процедуру получения дисперсионных характеристик волн H_{m0} в нагрузке. В силу симметрии структуры относительно продольного центрального сечения дисперсионное уравнение можно составлять на основе половины поперечного сечения. Для применения метода частичных областей поперечное сечение разбивается на области I и 2 (рис. 1, б).

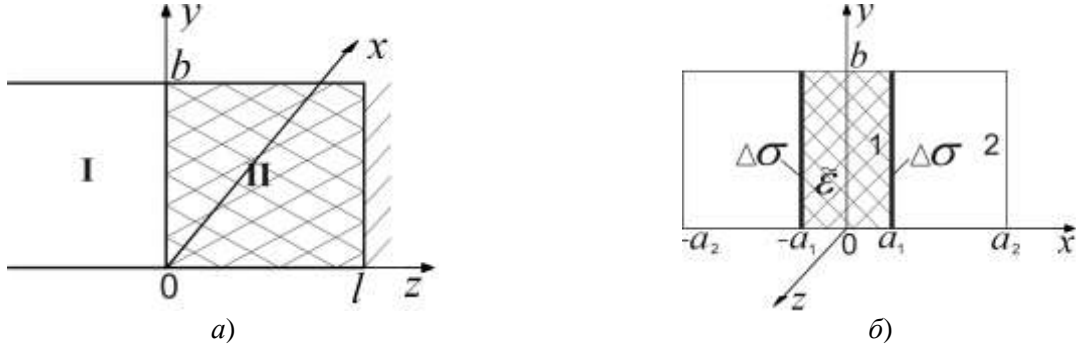


Рис. 1

В каждой из частичных областей формулируется краевая задача относительно продольной составляющей магнитного вектора Герца:

$$\Delta \Pi_{z_{1,2}}^m + \omega^2 \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \Pi_{z_{1,2}}^m = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_{z_{1,2}}^m}{\partial x} \right|_{x=a_2} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Pi_{z_{1,2}}^m}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0, \quad (2)$$

где ε_1, μ_1 – диэлектрическая и магнитная проницаемости материала в области I; ε_2, μ_2 – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в области 2; ω – частота электромагнитного поля.

Уравнение (1) решается методом разделения переменных. Общие решения ищутся в виде

$$\Pi_{z_{1,2}}^m = (A \cos \chi_x x + B \sin \chi_x x)(C \cos \chi_y y + D \sin \chi_y y) e^{-i\beta z}, \quad (3)$$

где A, B, C, D – неизвестные амплитудные коэффициенты; χ_x, χ_y – поперечные волновые числа; β – продольное волновое число.

Подставив решения в виде (3) в граничные условия (2) и учитывая, что у волн H_{m0} отсутствует зависимость поля от координаты y , получаем выражения для продольной составляющей магнитного вектора Герца в каждой из выделенных областей:

$$\Pi_{z_1}^m = \tilde{B} \sin(\chi_1 x) e^{-i\beta z},$$

$$\Pi_{z_2}^m = \tilde{A} \cos[\chi_2(x - a_2)] e^{-i\beta z}.$$

Выражая составляющие электромагнитного поля через векторы Герца по формулам

$$\vec{E} = -i\omega \mu \text{rot} \vec{\Pi}_z^m; \quad (4)$$

$$\vec{H} = \text{grad} \text{div} \vec{\Pi}_z^m + \varepsilon \mu \omega^2 \vec{\Pi}_z^m,$$

имеем

$$H_{x1} = -i\beta \tilde{B} \chi_1 \cos(\chi_1 x) e^{-i\beta z};$$

$$E_{y1} = i\omega \mu_1 \tilde{B} \chi_1 \cos(\chi_1 x) e^{-i\beta z}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
H_{z1} &= \chi_1^2 \tilde{B} \sin(\chi_1 x) e^{-i\beta z}; \\
H_{x2} &= -i\beta \tilde{A} \chi_2 \sin[\chi_2(x - a_2)] e^{-i\beta z}; \\
E_{y2} &= -i\omega \mu_2 \tilde{A} \chi_2 \sin[\chi_2(x - a_2)] e^{-i\beta z}; \\
H_{z2} &= \chi_2^2 \tilde{A} \cos[\chi_2(x - a_2)] e^{-i\beta z}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для составления дисперсионного уравнения запишем граничные условия при $x = a_1$ (рис. 1, б). На границе раздела областей 1 и 2 должны быть непрерывными касательные составляющие вектора напряженности электрического поля:

$$\vec{E}_{\tau 1} = \vec{E}_{\tau 2}.$$

Наличие тонкой (по сравнению с толщиной скин-слоя) резистивной пленки на границе раздела частичных областей учтем, воспользовавшись методом поверхностного тока, согласно которому для касательных составляющих вектора напряженности магнитного поля записываются разрывные граничные условия на границе раздела областей 1 и 2:

$$[\vec{n}, (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \Delta\sigma \vec{E}_1,$$

где $\Delta\sigma$ – поверхностная проводимость материала резистивной пленки; \vec{n} – нормаль к границе раздела, направленная в сторону области 2.

Для волн типа H_{m0} граничные условия при $x = a_1$ примут вид

$$\begin{aligned}
E_{y1}(x = a_1) &= E_{y2}(x = a_1), \\
H_{z2}(x = a_1) - H_{z1}(x = a_1) &= -\Delta\sigma E_{y1}(x = a_1).
\end{aligned} \tag{7}$$

Подставив составляющие электромагнитного поля (5) и (6) в граничные условия (7), получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных амплитудных коэффициентов \tilde{A} и \tilde{B} . Условие нетривиальности решений этой системы дает дисперсионное уравнение (ДУ) волн волноводной нагрузки.

Поскольку рассматриваемая направляющая структура является диссипативной системой, продольные и поперечные волновые числа будем искать на комплексных плоскостях с использованием метода вариации фазы.

Дисперсионные характеристики волны H_{10} , полученные при различных значениях относительной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1 / \epsilon_0$ и нормированной поверхностной проводимости пленки $\Delta\sigma_n = \Delta\sigma \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$, приведены на рис. 2, где β_1 и β_2 – вещественная и мнимая части продольного волнового числа, соответственно сплошными линиями представлены частотные зависимости фазовой постоянной (β_1) и коэффициента затухания (β_2) при $\tilde{\epsilon}_1 = 9,6$, пунктирными – при $\tilde{\epsilon}_1 = 5$.

Из рис. 2, а видно, что в волноводе с резистивной пленкой волна H_{10} не имеет критической частоты, кроме того, при малой проводимости резистивной пленки дисперсионная характеристика волны H_{10} данной структуры близка к дисперсионной характеристике волны H_{10} полого волновода.

Из рис. 2, б следует, что на частотах выше критической частоты основной волны полого волновода (при $ka_2 > \pi$) волна распространяется с малым затуханием. При любых значениях поверхностной проводимости коэффициент затухания при стремлении частоты к бесконечности стремится к нулю. Это объясняется увеличением экранирующего действия резистивной пленки на высоких частотах: с ростом частоты уменьшается амплитуда электрического поля на пленке, а следовательно, и тепловые потери в пленке, связанные с протеканием в ней тока.

Следует также отметить, что в интервале значений нормированной поверхностной проводимости $\Delta\sigma_n = 3 \div 5$ можно найти такое значение $\Delta\sigma_n$, при котором постоянная затухания

хания волны H_{10} будет мало изменяться в широкой полосе частот, а замедление будет практически постоянным. Это явление может быть использовано при создании широкополосных СВЧ-устройств.

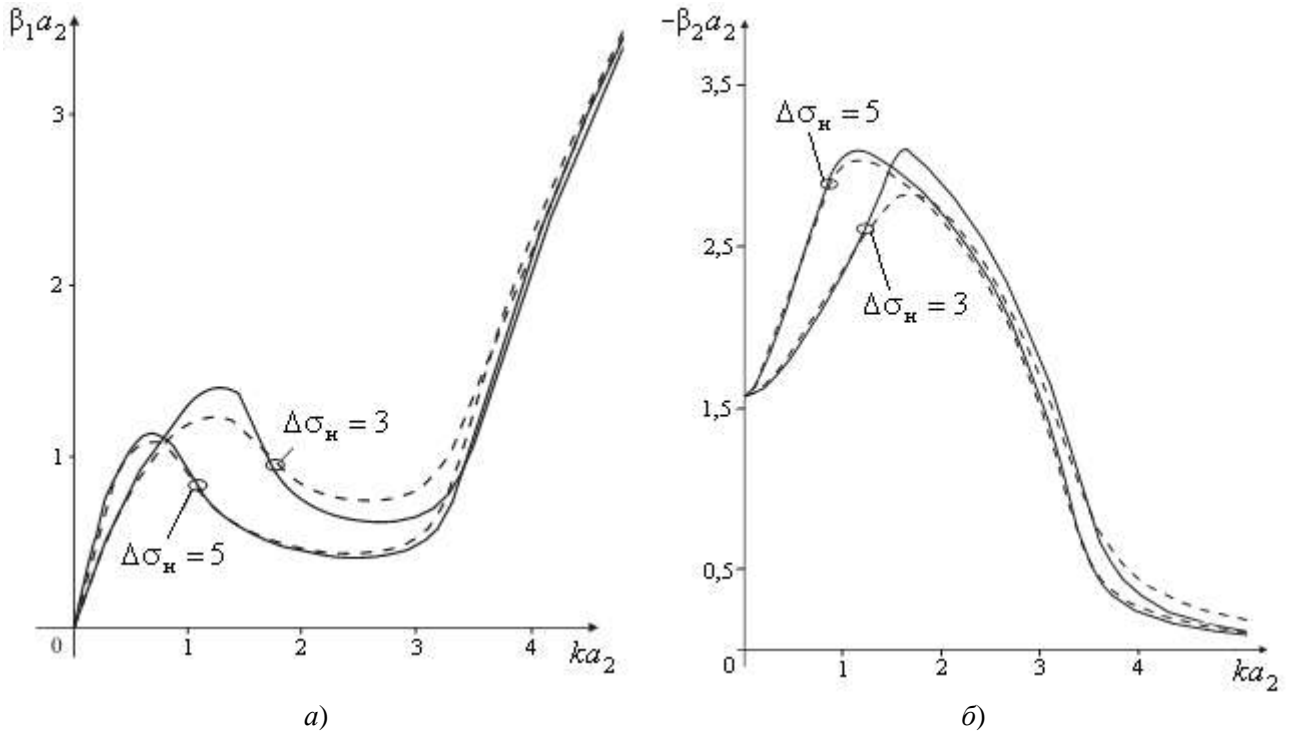


Рис. 2

На втором этапе решим задачу о стыке (рис. 1, а) полого прямоугольного волновода и волновода с резистивной пленкой (волноводной нагрузкой). При этом поля в волноводах представим в виде сумм полей их собственных волн: в первом (I) волноводе – в виде суммы полей первоначально распространяющейся в нем волны H_{10} (возбуждающей стык) и отраженных от стыка волн H_{m0} ($m = 1, 3, 5, \dots$), во втором (II) волноводе – в виде суммы полей прошедших волн и волн, отраженных от закорачивающей поверхности $z = l$.

Продольные составляющие магнитного вектора Герца в волноводах I и II будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Pi_{zI}^m &= A \cos\left[\frac{\pi}{2a_2}(x-a_2)\right] e^{-i\beta_{10}z} + \sum_m R_{m0} \cos\left[\frac{\pi m}{2a_2}(x-a_2)\right] e^{i\beta_{m0}z}, \\ \Pi_{zII}^m &= \sum_m T_{m0} \sin(\chi_{1m0}x) e^{-i\beta_{m0}z} + \sum_m \tilde{T}_{m0} \sin(\chi_{1m0}x) e^{i\beta_{m0}(z-l)} \quad \text{при } 0 < x < a_1, \\ \Pi_{zII}^m &= \sum_m T_{m0} \cos[\chi_{2m0}(x-a_2)] e^{-i\beta_{m0}z} + \sum_m \tilde{T}_{m0} \cos[\chi_{2m0}(x-a_2)] e^{i\beta_{m0}(z-l)} \quad \text{при } a_1 < x < a_2, \end{aligned}$$

где A , T_{m0} – амплитудные коэффициенты волн, распространяющихся вдоль оси z ; R_{m0} , \tilde{T}_{m0} – амплитудные коэффициенты волн, распространяющихся навстречу оси z ; χ_{1m0} (χ_{2m0}), β_{m0} – поперечные и продольные волновые числа соответственно; $m = 1, 3, 5, \dots$

Составляющие электромагнитного поля выражаются через вектор Герца $\Pi_{zI,II}^m$ по формулам (4).

На закорачивающей поверхности $z = l$ должно выполняться условие равенства нулю касательной составляющей электрического поля:

$$E_{yII}(z=l) = 0,$$

что позволяет установить связь между амплитудными коэффициентами T_{m0} и \tilde{T}_{m0} :

$$\tilde{T}_{m0} = -T_{m0}e^{-i\beta_{m0}l}.$$

Записав условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей в плоскости стыка волноводов I и II:

$$\begin{aligned} E_{yI}(z=0) &= E_{yII}(z=0); \\ H_{xI}(z=0) &= H_{xII}(z=0), \end{aligned} \quad (8)$$

получаем систему линейных функциональных уравнений (СЛФУ), которая после алгебраизации, в общем случае, приобретает бесконечную размерность. При ее численном решении будем учитывать лишь ограниченное число членов в каждой из сумм.

Для перехода от СЛФУ к СЛАУ используем метод коллокаций: в плоскости $z=0$ выберем N точек (узлов коллокаций) и приравняем касательные составляющие полей в этих точках. Коэффициент A положим равным единице ($A=1$). В результате получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно нормированных на A неизвестных амплитудных коэффициентов R_{m0} и T_{m0} в разложениях полей. Количество N выбранных узлов коллокаций определяет номер приближения, в котором решается задача.

Корректность работы программы расчета коэффициента отражения от волноводной нагрузки была проверена путем выполнения предельного перехода от нагрузки с металлическим напылением, нанесенным на диэлектрическую подложку, к нагрузке с тонкой резистивной пленкой ($a_1 \rightarrow 0$) в продольном сечении.

В табл. 1 приведены значения коэффициента отражения основной волны $|R_{10}|$ от волноводной нагрузки с параметрами: $\Delta\sigma_n = 2,5$, $\Delta\sigma_n = 5$; $l = 3a_2$; число волн в полом волноводе – 11, в отрезке волновода с резистивной пленкой – 3, полученные при равномерном распределении узлов коллокаций вдоль оси Ox в плоскости стыка (от координаты у электромагнитное поле не зависит), а также результаты работы [2].

Таблица 1

Результаты выполнения предельного перехода

ka_2	$ R_{10} $			
	$\Delta\sigma_n = 2,5$		$\Delta\sigma_n = 5,0$	
	$a_1 \rightarrow 0$	Результаты работы	$a_1 \rightarrow 0$	Результаты работы
1,8	0,6400	0,6200	0,7800	0,7665
1,9	0,4800	0,5003	0,7000	0,6912
2,1	0,4300	0,4417	0,6100	0,6158
2,2	0,4000	0,4089	0,5800	0,5850

Из табл. 1 видно, что относительное расхождение результатов, полученных двумя разными методами, не превышает 5%, что позволяет сделать вывод о корректной работе созданной в соответствии с описанным алгоритмом программы.

В табл. 2 и табл. 3 приведены результаты исследования сходимости по значению коэффициента отражения $|R_{10}|$ и амплитудного коэффициента T_{10} соответственно, при равномерном распределении узлов коллокаций. Параметры структуры: $\Delta\sigma_n = 1$, $\tilde{\epsilon}_1 = 5$, $a_1 = 0,05a_2$, $l = 2a_2$.

Исследование сходимости показало, что значения $|R_{10}|$ и T_{10} , полученные в низких приближениях ($N < 5$), существенно отличаются от значений, полученных в более высоких приближениях. Это свидетельствует о том, что при равномерном распределении «сшивание» касательных составляющих полей на стыке волноводов необходимо производить не менее чем в пяти точках. В то же время при $N > 8$ значения амплитудных коэффициентов пере-

стают изменяться при увеличении N , поэтому в качестве рабочего следует брать восьмое приближение ($N_{\text{раб}} = 8$).

Таблица 2
Исследование сходимости по значению
коэффициента отражения $|R_{10}|$

ka_2	Номер приближения N				
	5	6	7	8	9
1,6	0,7820	0,7820	0,7820	0,7820	0,7820
2,0	0,4048	0,4049	0,4050	0,4050	0,4050
2,4	0,2893	0,2894	0,2895	0,2895	0,2895
2,8	0,2328	0,2330	0,2331	0,2331	0,2331
3,2	0,1960	0,1962	0,1963	0,1963	0,1963
3,6	0,1564	0,1567	0,1568	0,1569	0,1569
4,0	0,1110	0,1113	0,1115	0,1115	0,1116

Таблица 3
Исследование сходимости по значению амплитудного коэффициента T_{10}

ka_2	Номер приближения N				
	5	6	7	8	9
3,0	0,1853-0,0164i	0,1856-0,0169i	0,1858-0,0172i	0,1860-0,0172i	0,1861-0,0172i
3,2	0,1494+0,004i	0,1497+0,0035i	0,1499+0,0033i	0,1501+0,0033i	0,1502+0,0034i
3,4	0,1132+0,0167i	0,1136+0,0163i	0,1138+0,0161i	0,1140+0,0161i	0,1141+0,0162i
3,6	0,0809+0,0212i	0,0813+0,0209i	0,0815+0,0208i	0,0816+0,0208i	0,0817+0,0209i

Проверим качество выполнения граничных условий (8). На рис. 3 приведены результаты расчета нормированных невязок для составляющих $E_{y,I,II}$ (рис. 3, а) и $H_{x,I,II}$ (рис. 3, б) при следующих параметрах структуры: $\Delta\sigma_n = 1$, $\tilde{\epsilon}_1 = 5$, $a_1 = 0,05a_2$, $l = 2a_2$, $N = 8$, $ka_2 = 1,6$.

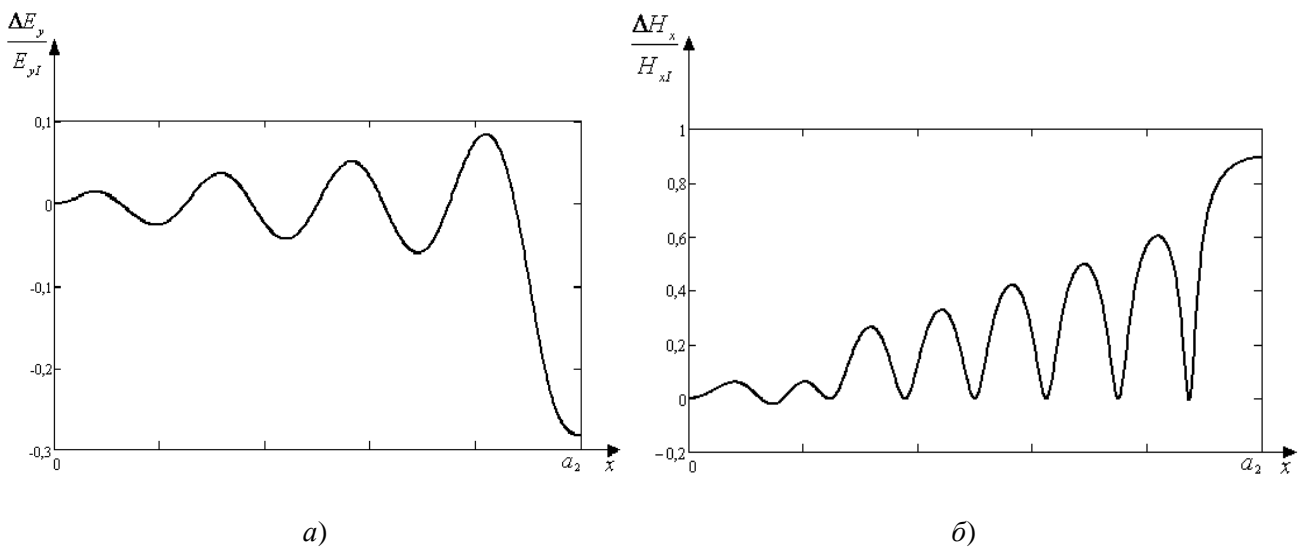


Рис. 3

Как видно из рис. 3, при равномерном распределении узлов коллокаций относительная невязка касательных составляющих электрического поля не превышает 20%, в случае же магнитного поля невязка достигает 70%.

Численные эксперименты показали, что при расчете коэффициента отражения необходимо учитывать одинаковое количество слагаемых в суммах, описывающих «сшиваемые» поля. При этом значение коэффициента отражения практически не изменяется, но значительно улучшается выполнение граничных условий.

Рассмотрим результаты, полученные с использованием корреляционного подхода к выбору узлов коллокаций.

В табл. 4 и табл. 5 приведены результаты исследования сходимости по значению коэффициента отражения $|R_{10}|$ и амплитудного коэффициента T_{10} соответственно при следующих параметрах структуры: $\Delta\sigma_{\text{н}} = 1$, $\tilde{\varepsilon}_1 = 5$, $a_1 = 0,05a_2$, $l = 2a_2$. В каждом из стыкуемых волноводов учитывалось по 8 волн.

Таблица 4

Исследование сходимости по значению
коэффициента отражения $|R_{10}|$

ka_2	Номер приближения N				
	5	6	7	8	9
1,6	0,7820	0,7815	0,7812	0,7814	0,7814
2,0	0,4032	0,4041	0,4038	0,4032	0,4035
2,4	0,2879	0,2880	0,2874	0,2877	0,2877
2,8	0,2332	0,2306	0,2307	0,2309	0,2309
3,2	0,1989	0,1939	0,1946	0,1940	0,1939
3,6	0,1523	0,1543	0,1530	0,1537	0,1543
4,0	0,1277	0,1210	0,1202	0,1197	0,1202

Таблица 5

Исследование сходимости по амплитудному коэффициенту T_{10}

ka_2	Номер приближения N				
	5	6	7	8	9
3,0	0,1845-0,0160i	0,1874-0,0175i	0,1875-0,0171i	0,1879-0,0171i	0,1877-0,0171i
3,2	0,1471+0,0044i	0,1505+0,0038i	0,1487+0,0039i	0,1517+0,0037i	0,1517+0,0037i
3,4	0,1156+0,0161i	0,1158+0,0163i	0,1148+0,0165i	0,1160+0,0170i	0,1153+0,0167i
3,6	0,0831+0,0221i	0,0834+0,0213i	0,0830+0,0214i	0,0822+0,0214i	0,0826+0,0216i

Из табл. 4 и табл. 5 следует, что при использовании корреляционного подхода в качестве рабочего можно брать шестое приближение ($N_{\text{раб}} = 6$).



Рис. 4

Расчеты показывают (рис. 4), что значения коэффициента отражения $|R_{10}|$, полученные в рабочих приближениях при равномерном распределении узлов коллокаций и при использовании корреляционного подхода, совпадают.

На рис. 5 представлены результаты исследования точности «сшивания» касательных составляющих электрического (рис. 5, а) и магнитного (рис. 5, б) полей в плоскости стыка $z = 0$ при равномерном распределении узлов (сплошная линия) и распределении, полученном на основе корреляционного подхода (пунктирная линия). Параметры структуры: $\Delta\sigma_n = 2$, $\tilde{\epsilon}_1 = 9,6$, $a_1 = 0,1a_2$, $l = 2a_2$, $N = 8$, $ka_2 = 2,2$.

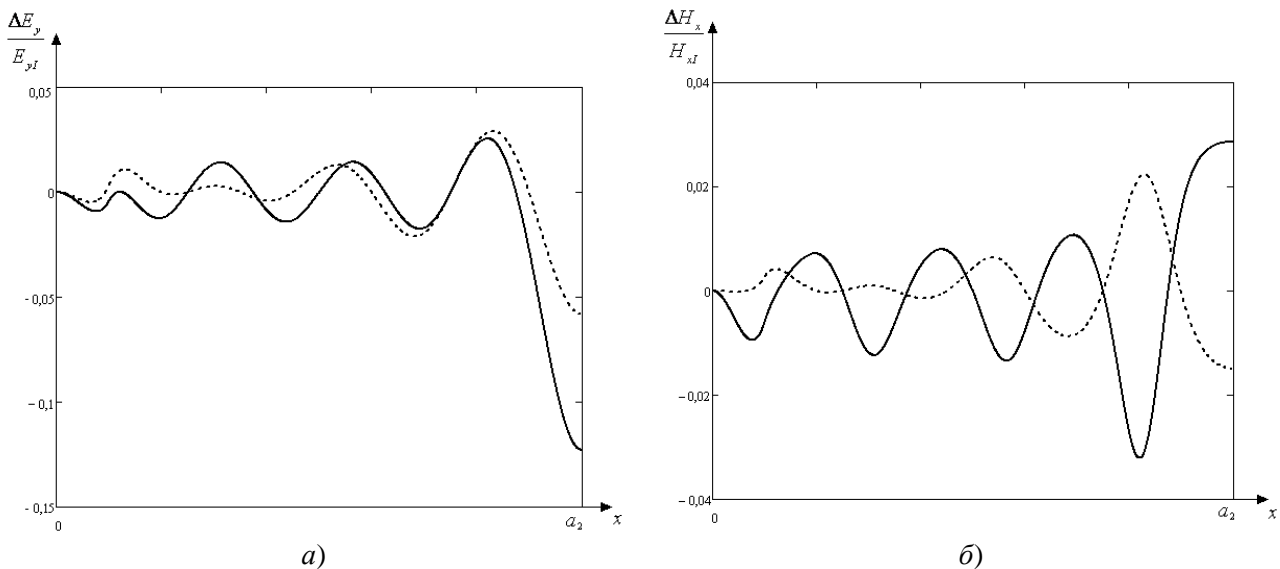


Рис. 5

Как видно из рис. 5, использование корреляционного подхода при выборе узлов коллокаций обеспечивает лучшее выполнение граничных условий: при равномерном распределении относительная невязка касательных составляющих электрического поля достигает 12%, что вдвое больше максимального значения невязки, полученной при использовании корреляционного подхода; для магнитного поля максимальное значение относительной невязки при равномерном распределении составляет 3%, при использовании корреляционного подхода – 2%.

Таким образом, проведенные исследования позволяют сделать вывод о возможности применения метода коллокаций при решении дифракционных электродинамических задач. При этом использование корреляционного подхода к выбору распределения узлов коллокаций позволяет получить решение, обеспечивающее более быструю сходимость результатов и лучшее выполнение граничных условий в плоскости стыка направляющих структур (по сравнению с равномерным распределением).

Библиографический список

1. **Веселов, Г.И.** Слоистые металлодиэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М.: Радио и связь, 1988. – 248 с.
2. **Иванов, А.Е.** Расчет волноводной нагрузки на базе отрезка волновода с резистивной пленкой / А.Е. Иванов, В.А. Калмык, Т.В. Кожевникова // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1982. Т.25. № 11. С. 62-65.

3. **Ермошин, В.В.** К вопросу о выборе узлов коллокаций при исследовании открытого прямоугольного диэлектрического волновода / В.В. Ермошин, А.В. Назаров // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. №10.– С. 1189-1193.

*Дата поступления
в редакцию 17.06.2010*

V.V. Ermoshin, T.V. Kozhevnikova, A.V. Nazarov, I.D. Slastnikova

**CALCULATION OF REFLECTION COEFFICIENT FROM WAVEGUIDE
LOAD BY COLLOCATION METHOD**

The possibility of application of collocation method to the calculation of reflection coefficient from waveguide load is shown. The mathematical apparatus of the correlation theory is used to choose the distribution of collocation nodes. Convergence of the solution is investigated, the components of the electromagnetic field on the medium interface are calculated. A frequency dependence of reflection coefficient is shown.

Key words: rectangular waveguide, waveguide load, diffraction problem, collocation method, reflection coefficient.