

УДК 531.7.084/.085

С. Ю. Юрманов

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРУГОГО ПОДВЕСА ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДАТЧИКОВ В СИСТЕМАХ НАВИГАЦИИ

ОАО «Арзамасский приборостроительный завод», г. Арзамас

Приведены конструктивные варианты многобалочных подвесов. Проведен анализ жесткости упругого подвеса. Выведена зависимость оптимального числа балок от различных параметров упругого подвеса.

Ключевые слова: Упругий подвес, конструкция, математическая модель, оптимизация.

Наибольшее распространение в приборостроении получили подвесы балочного типа за их простоту, надежность и технологичность. Целью данной работы является анализ и выбор оптимальной конфигурации упругого подвеса чувствительных элементов, являющихся основой приборов первичной информации, в том числе в МЭМС.

Основными требованиями к характеристикам упругого подвеса являются [2]:

- минимальная жесткость по оси чувствительности;
- максимальная жесткость по осям нечувствительности;
- максимальная величина допустимой нагрузки при механических воздействиях.

Исходя из данных требований, проанализируем различные варианты конфигурации упругого подвеса (УП), показанные на рис. 1. Наибольшее распространение в датчиках первичной информации получили УП с балкой переменного сечения (рис. 1, б) за простоту в изготовлении. Его коэффициент жесткости на продольный изгиб (угол β , лежащий в плоскости YOZ (рис. 2), вычисляется по следующей формуле [1]:

$$g_{\beta} = \frac{E_1 b}{24} \int_0^L \frac{dl}{h(l)^3}, \quad (1)$$

где $h(l) = h_0 + 2\sqrt{R^2 - (L-l)^2}$; E_1 – модуль упругости первого рода материала балки; b – ширина балки; h_0 – минимальная толщина балки; R – радиус кривизны балки; L – длина половины балки.

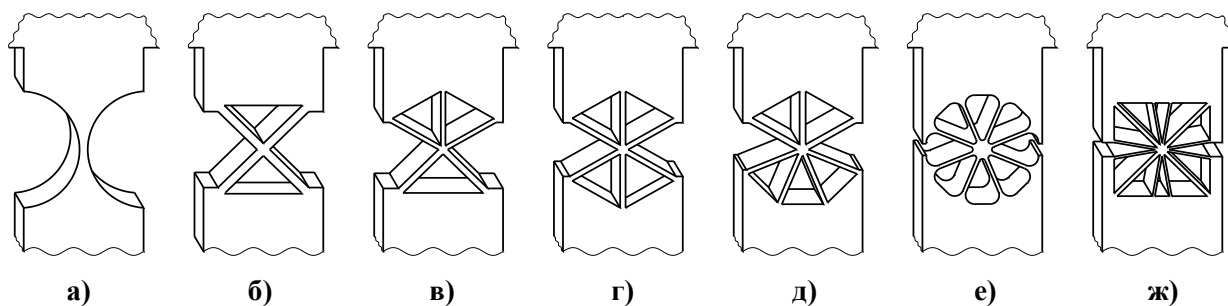


Рис. 1. Варианты конфигурации упругого подвеса:

a – упругий подвес балкой переменного сечения; *б* – четырехбалочный упругий подвес; *в* – пятибалочный упругий подвес; *г* – шестибалочный упругий подвес; *д* – семибалочный упругий подвес; *е* – восьмибалочный упругий подвес со скруглением у основания; *ж* – двенадцатибалочный упругий подвес с балками различной конфигурации и под различным углом между балками

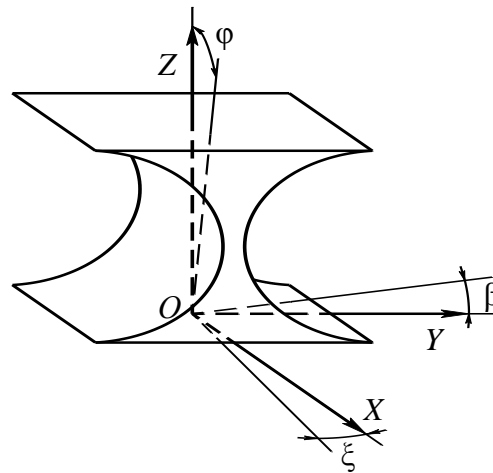


Рис. 2. Схема расположения углов отклонения УП относительно системы координат

Коэффициент жесткости УП на поперечный изгиб (угол φ , лежащий в плоскости XOZ (рис. 2), равен

$$g_{\varphi} = \frac{E_1 b^3}{24} \bigg/ \int_0^L \frac{dl}{h(l)}. \quad (2)$$

Коэффициент жесткости УП на кручение, угол ξ , лежащий в плоскости XOY (рис. 2), равен

$$g_{\xi} = \frac{E_2 b}{2} \bigg/ \int_0^L \frac{dl}{h(l)^3}, \quad (3)$$

где E_2 – модуль упругости второго рода материала балки.

Коэффициент жесткости УП на сжатие вдоль оси OZ (рис. 2) равен

$$g_{\delta} = \frac{E_1 b}{2} \bigg/ \int_0^L \frac{dl}{h(l)}. \quad (4)$$

Коэффициент жесткости УП на продольный сдвиг вдоль оси OY (рис. 2) равен

$$g_{\gamma} = \frac{E_1 b}{24 L^2} \bigg/ \int_0^L \frac{dl}{h(l)^3}. \quad (5)$$

Коэффициент жесткости УП на поперечный сдвиг вдоль оси OX (рис. 2) равен

$$g_{\lambda} = \frac{E_1 b^3}{24 L^2} \bigg/ \int_0^L \frac{dl}{h(l)}. \quad (6)$$

Рассмотрим балку, находящуюся под углом α к оси OZ (рис. 3, а). Длина балки определяется по уравнению:

$$l_i = L - \frac{1}{2} h \operatorname{ctg}(\alpha_i). \quad (7)$$

Если рассматривать величины углов отклонений УП β , φ и ξ как предельно малые, то при продольном изгибе УП угол наклона балки (рис. 3, б) равен:

$$\beta_i = \beta L/l_i,$$

а увеличение длины равно

$$\delta_{\beta i} = \beta^2 L^2 / l_i. \quad (9)$$

При поперечном изгибе УП (рис. 3, в) угол поперечного изгиба балки равен

$$\varphi_i = \varphi \cos(\alpha_i), \quad (10)$$

угол кручения балки равен

$$\xi_i = \varphi \sin(\alpha_i). \quad (11)$$

При кручении УПа угол поперечного изгиба балки равен

$$\varphi_i = \xi \sin(\alpha_i), \quad (12)$$

угол кручения балки равен

$$\xi_i = \xi \cos(\alpha_i). \quad (13)$$

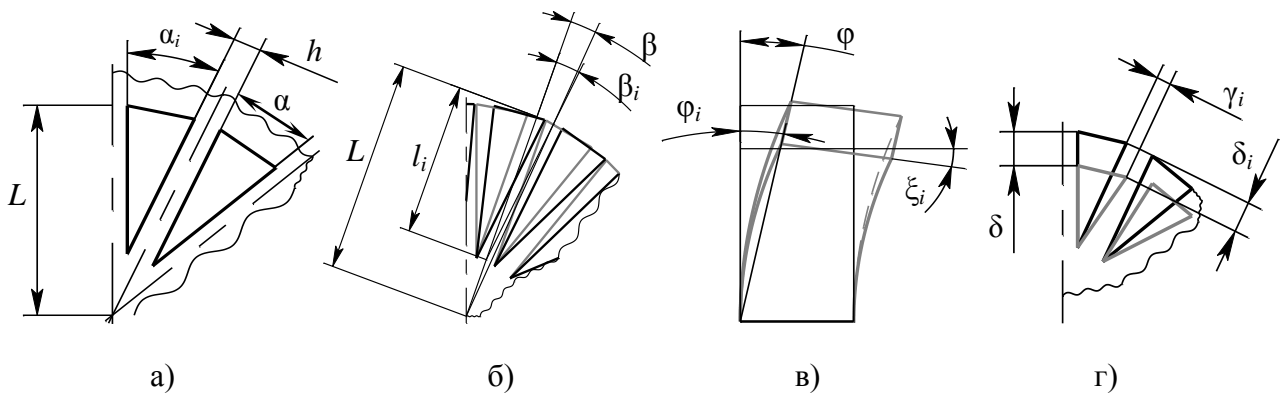


Рис. 3. Схема расположения балки при различных видах деформации:
a – схема расположения балки в состоянии покоя; *б* – при продольном изгибе;
в – при поперечном изгибе; *г* – при сжатии

Аналогично, при δ, γ и $\lambda \ll L$, при сжатии УП (рис. 3, д) величина сжатия балки равна

$$\delta_i = \delta \cos(\alpha_i), \quad (14)$$

величина продольного сдвига балки равна

$$\gamma_i = \delta \sin(\alpha_i). \quad (15)$$

При продольном сдвиге УП величина продольного сдвига балки равна

$$\gamma_i = \gamma \cos(\alpha_i), \quad (16)$$

величина сжатия балки равна

$$\delta_i = \gamma \sin(\alpha_i), \quad (17)$$

При поперечном сдвиге УП величина поперечного сдвига балки равна

$$\lambda_i = \lambda. \quad (18)$$

Проекция реакции опоры, создаваемой балкой при деформации, определяемой по выражениям (7)-(18), на линию воздействия равна

- при продольном изгибе

$$M_{\beta i} = \frac{E_1 b h^3 L}{12(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))^2} \beta + \frac{E_1 b h L^3}{(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))^2} \beta^3, \quad (19)$$

- при поперечном изгибе

$$M_{\varphi i} = \left(\frac{\cos(\alpha_i)^2 E_1 b^3 h L}{12(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))^2} + \frac{\sin(\alpha_i)^2 E_2 b h^3}{(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))} \right) \varphi, \quad (20)$$

- при кручении

$$M_{\xi i} = \left(\frac{\sin(\alpha_i)^2 E_1 b^3 h L}{12(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))^2} + \frac{\cos(\alpha_i)^2 E_2 b h^3 L}{(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))} \right) \xi, \quad (21)$$

- при сжатии

$$F_{\delta i} = \left(\frac{\cos^2(\alpha_i) E_1 b h}{(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))} + \frac{\cos(\alpha_i) \sin(\alpha_i) E_1 b h^3 L}{(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))^4} \right) \delta, \quad (22)$$

- при продольном сдвиге

$$F_{\gamma i} = \left(\frac{\sin^2(\alpha_i) E_1 b h}{(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))} + \frac{\cos(\alpha_i) \sin(\alpha_i) E_1 b h^3 L}{(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))^4} \right) \gamma, \quad (23)$$

- при поперечном сдвиге

$$F_{\lambda i} = \frac{E_1 b^3 h L}{12(L - 0.5h \operatorname{ctg}(\alpha))^4} \lambda. \quad (24)$$

УП с несколькими балками (рис. 1 *в, з, д, е*) представляет из себя две полуокружности, соединенные балками с постоянным сечением, которые выходят из центра данных полуокружностей. Очевидно, что для равномерного распределения нагрузок конструкция УП должна иметь четное число балок с равным сечением и под равными углами друг к другу, как показано на рис. 1 *в, з, д*. Далее целесообразно рассматривать УП данной конструкции, где n – число балок, соединяющих центр УП с одной из полуокружностей.

Для сравнения характеристик подвесов по максимальной жесткости по осям нечувствительности и максимальной величине допустимой нагрузки при механических воздействиях необходимо, чтобы УП имели одинаковые длину, ширину и жесткость на продольный изгиб (c_0). Исходя из этого, толщина балки n -балочного УП (рис. 1 *в, з, д*) определяется из уравнения

$$c_0 = \int_0^{\beta_{\max}} \frac{2nEb h_n L}{(2L - h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n))^2} \left(\frac{h_n^2}{12} \beta + \beta^3 L^2 \right) d\beta \Big/ \frac{\beta_{\max}^2}{2} = \frac{2nEb h_n L}{(2L - h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n))^2} \left(\frac{h_n^2}{12} + \frac{\beta_{\max}^2 L^2}{2} \right), \quad (25)$$

откуда

$$h_n = \frac{H_n}{6A_n} - \frac{6A_n C_n - 2B_n^2}{3A_n H_n} + \frac{B_n}{3A_n}, \quad (26)$$

где $A_n = \frac{nE_1 bL}{24}$, $B_n = \frac{c_0 \operatorname{ctg}(\pi/2n)}{4}$, $C_n = nE_1 bL^3 \beta_{\max}^2 / 4 + Lc_0 \operatorname{ctg}(\pi/2n)$, $D_n = c_0 L^2$,
 $F_n = 4A_n C_n^3 - B_n^2 C_n^2 - 18A_n B_n C_n D_n + 27A_n^2 D_n^2 + 4B_n^3 D_n$,
 $H_n = \sqrt[3]{108A_n^2 D_n - 36A_n B_n C_n + 8B_n^3 + 12A_n \sqrt{3F_n}}$.

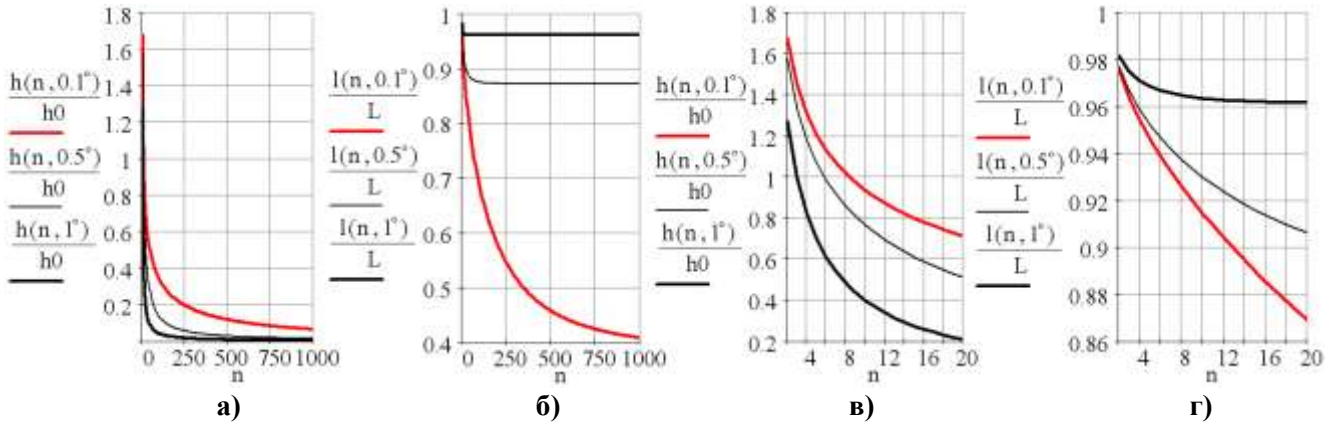


Рис. 4. Зависимость отношений толщин и рабочих длин балки n -балочного УП и балки УП балкой переменного сечения от числа балок и угла прокатки:

a, v – зависимости отношений толщины балки n -балочного УП к минимальной толщине балки УП с балкой переменного сечения; b, z – зависимости отношений рабочей длинны балки n -балочного УП к длине балки УП с балкой переменного сечения

Зависимости изменения толщины и рабочей длины балки n -балочного УП, определяемые выражениями (7) и (25), показаны на рис. 4 для подвеса с $R = L = 2$ мм, $b = 0.85$ мм, $c_0 = 6.2 \times 10^{-3}$ Н м / рад (как и для всех последующих рисунков), при этом максимальное число балок определяется из неравенства

$$l_n = L - \frac{1}{2} h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n) > 0, \tag{27}$$

откуда при $\beta_{\max} \rightarrow 0$

$$n_{\max} \leq L \sqrt{\pi^3 b E_1 / c_0} / 2. \tag{28}$$

Из уравнений (19)–(24) следует, что коэффициенты жесткости n -балочного УП при различных воздействиях равны:

- при продольном изгибе

$$g_{\beta n} = \frac{nE_1 b h_n L}{2(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n))^2} \left(\frac{h_n^2}{12} + \frac{\beta_{\max}^2 L^2}{2} \right), \tag{29}$$

- при поперечном изгибе

$$g_{\varphi n} = \frac{b h_n}{2(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n))} \sum_{i=1}^n \left(\frac{E_1 \cos^2(\alpha_i) b^2 L}{12(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n))} + E_2 \sin^2(\alpha_i) h_n^2 \right), \tag{30}$$

- при кручении

$$g_{\xi n} = \frac{b h_n}{2(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n))} \sum_{i=1}^n \left(\frac{E_1 \sin^2(\alpha_i) b^2 L}{12(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi/2n))} + E_2 \cos^2(\alpha_i) h_n^2 \right), \tag{31}$$

- при сжатии

$$g_{\delta n} = \frac{E_1 b h_n}{2(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi / 2n))} \sum_{i=1}^n \left(\cos^2(\alpha_i) + \frac{\cos(\alpha_i) \sin(\alpha_i) h_n^2 L}{(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi / 2n))^3} \right), \quad (32)$$

- при продольном сдвиге

$$g_{\gamma n} = \frac{E_1 b h_n}{2(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi / 2n))} \sum_{i=1}^n \left(\sin^2(\alpha_i) + \frac{\cos(\alpha_i) \sin(\alpha_i) h_n^2 L}{(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi / 2n))^3} \right), \quad (33)$$

- при поперечном сдвиге

$$g_{\lambda n} = \frac{n E_1 b^3 h_n L}{24(L - 0.5 h_n \operatorname{ctg}(\pi / 2n))^4}. \quad (34)$$

Значения отношения жесткостей n -балочных УП при различном количестве балок и

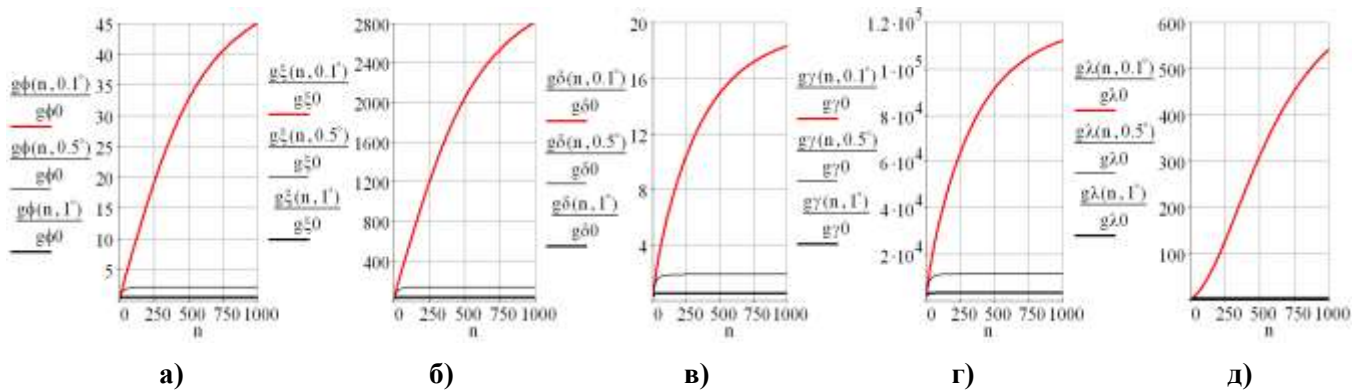


Рис. 5. Соотношение жесткостей УП упругого подвеса различной конфигурации:
 а – соотношение жесткостей УП на поперечный изгиб; б – соотношение жесткостей УП на кручение;
 в – соотношение жесткостей УП на сжатие; г – соотношение жесткостей УП на продольный сдвиг;
 д – соотношение жесткостей УП на поперечный сдвиг

угле прокачки и УП с балкой переменного сечения, полученных из выражений (2)-(6) и (30)-(34) показаны на рис. 5 (g_0 – жесткость для оси с балками переменного сечения, определяемая по (2)-(6)).

Поскольку на одной оси УП, как правило, находятся два УП, то коэффициенты жесткости оси УП равны:

- жесткость оси при продольном изгибе

$$G_{\beta} = 2g_{\beta}, \quad (35)$$

- жесткость оси при поперечном изгибе, где θ – угол между осями симметрии УП в оси (как правило, $\theta = 0$), r – половина расстояния между УП (как правило, $r > L$)

$$G_{\varphi} = 2(\cos(\theta/2)g_{\varphi} + \sin(\theta/2)g_{\xi} + \cos(\theta/2)r^2g_{\delta} + \sin(\theta/2)r^2g_{\gamma}), \quad (36)$$

- жесткость оси при кручении

$$G_{\xi} = 2(\cos(\theta/2)g_{\xi} + \sin(\theta/2)g_{\varphi} + \cos(\theta/2)r^2g_{\gamma} + \sin(\theta/2)r^2g_{\delta}), \quad (37)$$

- жесткость оси при сжатии

$$G_{\delta} = 2(\cos(\theta/2)r^2g_{\delta} + \sin(\theta/2)r^2g_{\gamma}), \quad (38)$$

- жесткость оси при продольном сдвиге

$$G_{\gamma} = 2(\cos(\theta/2)r^2g_{\gamma} + \sin(\theta/2)r^2g_{\delta}), \quad (39)$$

- жесткость оси при поперечном сдвиге

$$G_{\lambda} = 2g_{\lambda}. \quad (40)$$

Зависимости жесткостей осей при различном количестве балок в УП и угле прокатки и для оси с УП с балкой переменного сечения показаны на рис. 6 (G_0 – жесткость для оси с балками переменного сечения, где $\theta = 90^\circ$).

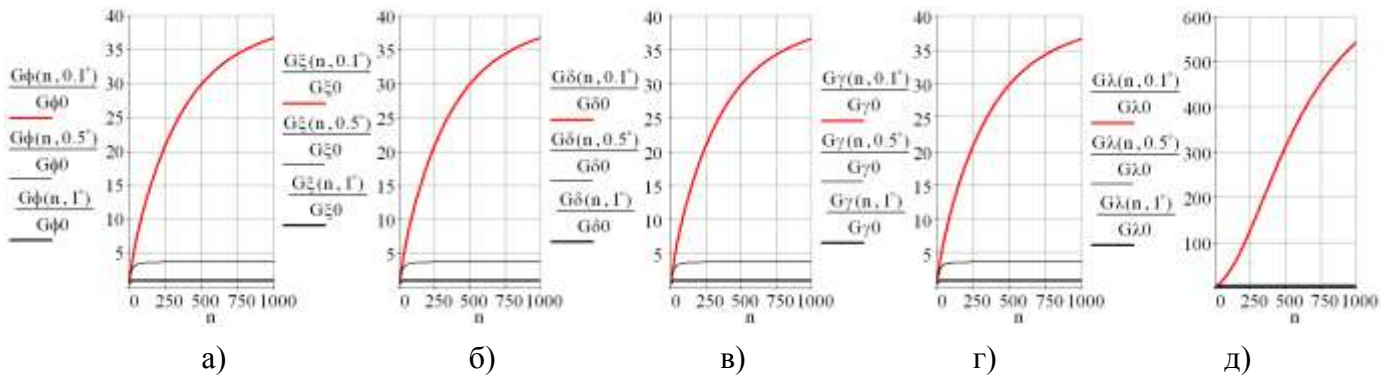


Рис. 6. Отношение жесткостей осей упругих подвесов различной конфигурации:
 а – отношение жесткостей осей УП на поперечный изгиб; б – отношение жесткостей осей УП на кручение; в – отношение жесткостей осей УП на сжатие; г – отношение жесткостей осей УП на продольный сдвиг; д – отношение жесткостей осей УП на поперечный сдвиг

Напряжение в балке при нагрузке M_0 (F_0) определяется, исходя из выражения

$$\sigma = F_{оп}/S_{\delta}, \quad (41)$$

где $F_{оп}$ – сила реакции опоры, возникающая в балке; S_{δ} – площадь балки.

Поскольку при нагрузке M_0 (F_0), действующей на УП, возникает деформация, равная M_0/g , то выражение (41) примет вид

- при изгибе или кручении

$$\sigma = M_0g_{\delta}/gIS_{\delta}, \quad (42)$$

- при сжатии или сдвиге, где g_{δ} – жесткость балки, l – плечо момента. Учитывая, что балка находится под углом α к линии действия нагрузки, уравнения (42) и (43) примут вид

$$\sigma = \frac{F_0g_{\delta}}{gS_{\delta}}, \quad (43)$$

- при сжатии или сдвиге, или

$$\sigma = F_0 \frac{\sqrt{(g_{\delta\delta} \cos(\alpha))^2 + (g_{\gamma\delta} \sin(\alpha))^2}}{g_{\delta,\gamma}S_{\delta}}. \quad (44)$$

- при поперечном изгибе или кручении

$$\sigma = M_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{g_{\phi\delta} \cos(\alpha)}{l_n}\right)^2 + \left(\frac{g_{\xi\delta} \sin(\alpha)}{b}\right)^2}}{g_{\phi,\xi} S_{\delta}}. \quad (45)$$

Очевидно, что максимальная величина внутреннего напряжения по (43)-(44) возникает в балке, находящейся вдоль линии воздействия ($\alpha = 0$), зависимости которого показаны на рис. 7 а, б.

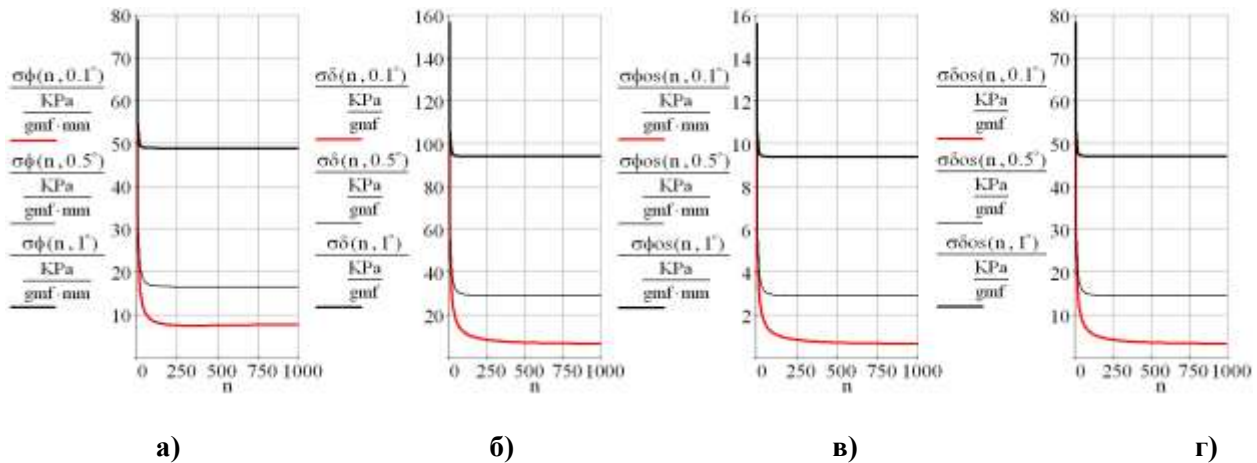


Рис. 7. Зависимости максимальных напряжений в балках n -балочного УП и оси n -балочных УП от числа балок и угла прокатки:

а – зависимость максимального напряжения в балках n -балочного УП от количества балок в УП при изгибе для различного угла прокатки; *б* – зависимость максимального напряжения балки n -балочного УП от количества балок в УП при сжатии для различного угла прокатки; *в* – зависимость максимального напряжения в балках оси n -балочных УП от количества балок в УП при изгибе для различного угла прокатки; *г* – зависимость максимального напряжения балки оси n -балочных УП от количества балок в УП при сжатии для различного угла прокатки

Зависимости максимальных напряжений в балках осей УП, полученные по (41)-(44), от числа балок показаны на рис. 7 в, г. Из данных зависимостей видно, что величина напряжения в балке, расположенной вдоль линии воздействия, при сжатии уменьшается с увеличением числа балок, или при изгибе имеет минимум, который при угле прокатки, стремящемся к нулю, достигается, если число балок удовлетворяет выражению:

$$n_{\text{опт}} = L\sqrt{\pi^3 b E_1 / c_0} / 7. \quad (46)$$

Максимальная нагрузка на УП определяется, исходя из величины предельного внутреннего напряжения гибкости материала (если внутреннее напряжение выше предельного внутреннего напряжения гибкости происходит необратимая деформация УП). Из выражений (42)-(45) видно, что величина максимальной нагрузки обратно пропорционально отношению внутренних напряжений, возникающих при одинаковом воздействии, показанному на рис. 8, 9.

Зависимости максимального и оптимального числа балок ($n_{\text{опт}}$ – число балок, при котором соотношение максимальных внутренних напряжений в балках осей УП с балками переменного сечения под углом $\pi/2$ и n -балками составляет 98% от локального максимума, при нескольких значениях $n_{\text{опт}}$ берется наименьшее) от угла прокатки показаны на рис. 10. Локальный пик на рис. 10, б соответствует углу прокатки, при котором число балок с макси-

малым отношением внутренних напряжений в балках осей УП с балками переменного сечения под углом $\pi/2$ и n -балками совпадает с максимальным числом балок в УП.

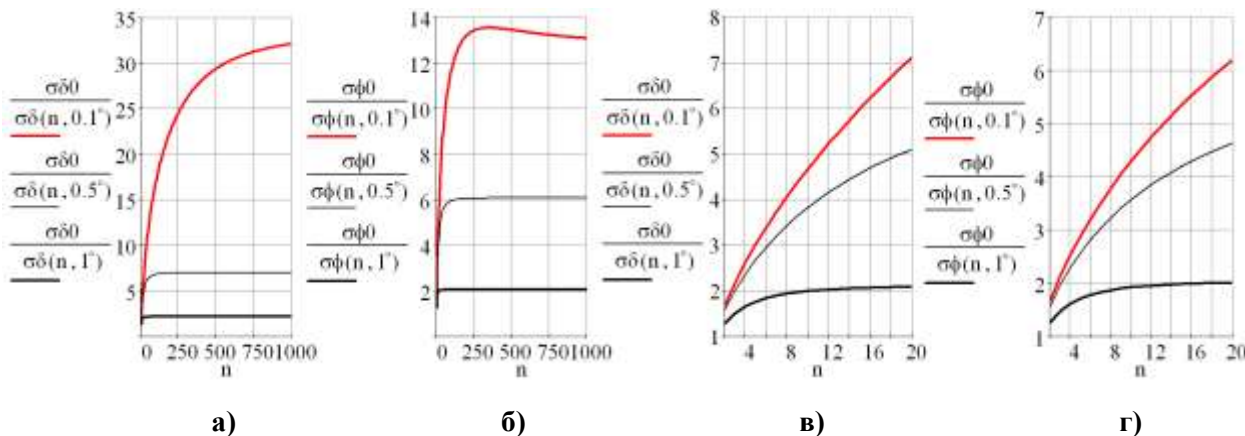


Рис. 8. Отношение максимальных внутренних напряжений в балках УП с балкой переменного сечения и n балками при одинаковой нагрузке:

a, v – отношение максимальных внутренних напряжений при сжатии в балках УП с балкой переменного сечения и n балками; b, z – отношение максимальных внутренних напряжений при поперечном изгибе в балках УП с балкой переменного сечения и n балками

Таким образом, число балок в упругом подвесе оси упругих подвесов, состоящей из пары упругих подвесов на расстоянии, должно составлять при угле прокатки, стремящемся к нулю n_{max} , определяемому из неравенства (28), число балок в одиночном упругом подвесе должно составлять n_{opt} (по (46) при угле прокатки, стремящемся к нулю). Это позволит увеличить допустимые нагрузки для датчиков первичной информации, что приведет к уменьшению чувствительности к внешним воздействиям и увеличению диапазона воздействий на датчики первичной информации при сохранении их точности и надежности.

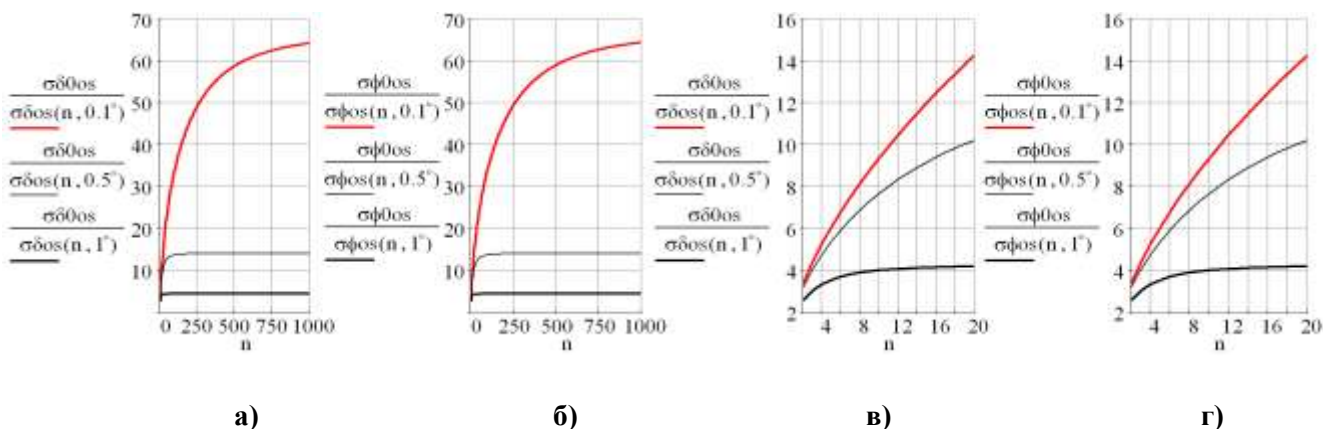


Рис. 9. Отношение максимальных внутренних напряжений в балках осей торсионов с балками переменного сечения под углом $\pi/2$ и n -балками при одинаковой нагрузке:

a, v – отношение максимальных внутренних напряжений при сжатии в балках осей торсионов с балкой переменного сечения под углом $\pi/2$ и n -балками; b, z – отношение максимальных внутренних напряжений при поперечном изгибе в балках осей торсионов с балками переменного сечения под углом $\pi/2$ и n -балками

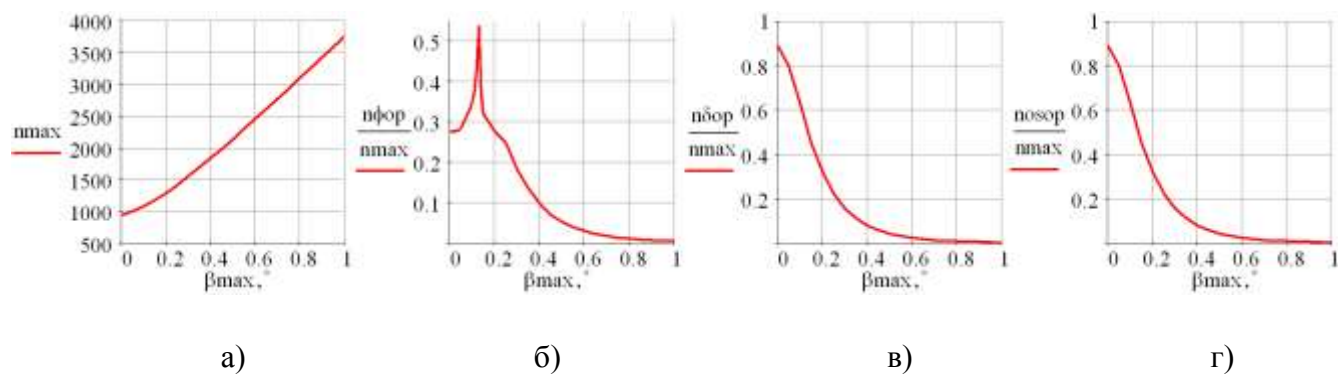


Рис. 10. Зависимости максимального и оптимального числа балок в торсионе при различных видах нагрузок на торсион и ось торсионов от угла прокатки:

a – зависимость максимального числа балок от угла прокатки; *б* – зависимость оптимального числа балок от угла прокатки при поперечном изгибе торсиона; *в* – зависимость оптимального числа балок от угла прокатки при сжатии торсиона; *г* – зависимость оптимального числа балок от угла прокатки при поперечном изгибе и сжатии осей торсионов

Библиографический список

1. **Феодосьев, В. И.** Сопrotивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1974.
2. **Волков, Н.В.** Проектирование измерительных устройств и оптимизация их характеристик / Н.В. Волков, О.Г. Гущин, В. И. Поздьяев. – Нижний Новгород: НГТУ, 1996.

Дата поступления
в редакцию 06.07.2010

S.Yu. Yurmanov

OPTIMIZATION SPRINGY SUPPORT OF SENSITIVE ELEMENTS FOR SENSORS BY NAVIGANION SYSTEMS

The variants of constructions of springy support with many strings are presents. The analyze of hardness of springy support are realized. The optimal number function of strings bay differential parameters of springy support is resaved.

Key words: springy support, construction, mathematical model, optimization.