

УДК 629.113

В.И. Котляренко¹, С.Е. Манянин², И.А. Соколов²

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕСНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

Московский государственный технический университет (МАМИ)¹,
ООО «ТрансМаш»²

Разработана математическая модель колесного транспортного средства. Рассмотрены методы описания возмущающего воздействия со стороны дорог при помощи вероятностных характеристик микропрофиля и на основе данных, описывающих действительный микропрофиль опорных поверхностей на конкретных маршрутах движения. Построена математическая модель взаимодействия колесной машины с грунтом.

Ключевые слова: динамическая система транспортного средства, математическое описание движения, микропрофиль, взаимодействие колесной машины с грунтом.

При описании динамики транспортного средства (ТС) сформулированы следующие основные принципы их математического моделирования:

- принцип комплексности, отражающий необходимость построения математической модели таким образом, чтобы задачи динамического исследования решались с учетом всех значимых характеристик элементов, систем и процессов, влияющих на динамическую систему;
- принцип модульности, позволяющий разбивать динамическую систему на отдельные модули (силовой агрегат, трансмиссия, подвеска, движители) и разрабатывать математические модели для каждого модуля отдельно;
- принцип взаимосвязи, отражающий необходимость учитывать взаимное влияние основных подсистем, входящих в модули, и самих модулей друг на друга: чем больше связность между частными математическими моделями подсистем машины, тем должно быть важнее соединение именно этих подсистем и подробнее их математическое описание;
- принцип задающих воздействий, отражающий необходимость задания и математического описания основных управляющих (оператор, антиблокировочные и противобуксовочные системы и т.п.) и возмущающих воздействий со стороны внешней среды;
- принцип соответствия частотных диапазонов, отражающий соответствие степени детализации расчетной схемы диапазону определяющих возмущающих факторов;
- принцип истинной координаты, величину или значение которой можно непосредственно измерить или получить расчетным путем без использования понятия «приведенная координата».

Последний принцип обеспечивает равные возможности исследования динамической системы машины как при расчетах, так и при натурных испытаниях, с сохранением адекватности при сравнении полученных результатов.

Особенностью модели является то, что в ней внешние и внутренние кинематические и силовые характеристики формируются в микроподвижной системе, то есть задаются от колеса. Это позволяет учитывать одновременно продольно-угловые и поперечно-угловые колебания, буксование колеса, более точно отслеживать воздействие со стороны дороги и т.п. Другой особенностью модели является наличие нескольких систем координат (рис. 1), что объясняется структурой и формой уравнения движения ТС. Положение ТС и его систем в пространстве в любой момент времени определяется взаимным расположением следующих систем координат: подвижной (ПСК) – O_c, X_c, Y_c, Z_c ; неподвижной (НСК) – O_H, X_H, Y_H, Z_H и микроподвижной (МСК) – O_M, X_M, Y_M, Z_M .

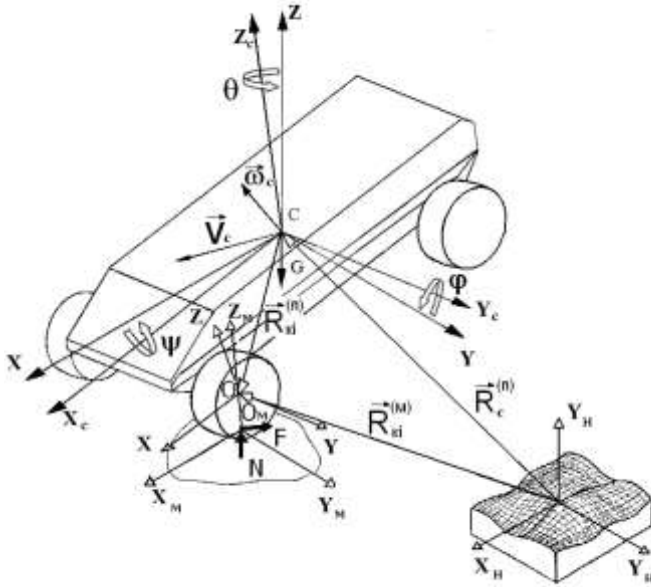


Рис. 1. Модель движения ТС по опорной поверхности

Систему дифференциальных уравнений, описывающих движение ТС, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 m\dot{V}_{cx} + m(\omega_y V_{cz} - \omega_z V_{cy}) &= G_x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 (N_{ij}^x + F_{ij}^x), \\
 m\dot{V}_{cy} + m(\omega_z V_{cx} - \omega_x V_{cz}) &= G_y + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 (N_{ij}^y + F_{ij}^y), \\
 m\dot{V}_{cz} + m(\omega_x V_{cy} - \omega_y V_{cx}) &= G_z + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 (N_{ij}^z + F_{ij}^z), \\
 I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 [M_x(N_{ij}) + M_x(F_{ij}) + M_x(R_{fij})], \\
 I_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 [M_y(N_{ij}) + M_y(F_{ij}) + M_y(R_{fij})], \\
 I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_x - I_y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 [M_z(N_{ij}) + M_z(F_{ij}) + M_z(R_{fij})],
 \end{aligned} \tag{1}$$

- где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости ТС на оси ПСК;
 $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ – проекции вектора углового ускорения ТС на оси ПСК;
 V_x, V_y, V_z – проекции вектора линейной скорости ТС на оси ПСК;
 $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$ – проекции вектора линейного ускорения ТС на оси ПСК;
 G_x, G_y, G_z – проекции силы тяжести на оси ПСК;
 $F_{ij}^x, F_{ij}^y, F_{ij}^z$ – проекции силы взаимодействия между двигателем и опорной поверхностью (ОП) на оси ПСК;
 $N_{ij}^x, N_{ij}^y, N_{ij}^z$ – проекции нормальной реакции ОП на оси ПСК;
 $M_x(N_{ij}), M_y(N_{ij}), M_z(N_{ij})$ – проекции момента от нормальной реакции ОП на оси ПСК;

Неподвижная система координат служит для моделирования заданных дорожных условий. Каждая точка поля однозначно описывается тремя координатами неподвижной системы координат.

Подвижная или связанная система координат, используемая для математического описания движения ТС, характеризуется тем, что ее оси совпадают с главными осями инерции машины, а центр находится в центре масс ТС. В этой системе моменты инерции тела являются постоянными.

Микроподвижная система координат связана с центром пятна контакта i -го колеса.

$M_x(F_{ij}), M_y(F_{ij}), M_z(F_{ij})$ – проекции момента от силы взаимодействия между двигателем и опорной поверхностью на оси ПСК;

I_x, I_y, I_z – моменты инерции ТС относительно осей ПСК.

Положение ТС в НСК определяется взаимным расположением координатных систем, которые характеризуются радиус-вектором центра масс $\vec{R}_c^{(H)}$ и тремя угловыми координатами. Эти угловые координаты являются углами Эйлера-Крылова: ψ – угол крена, φ – угол дифферента, θ – курсовой угол.

Связь между подвижной и неподвижной системами координат осуществляется с помощью матриц линейного преобразования.

Матрица преобразования из ПСК в НСК:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi - \sin\psi \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta & -\cos\psi \cdot \sin\theta & \sin\varphi \cdot \cos\theta + \cos\varphi \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta \\ \sin\theta \cdot \cos\varphi + \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi & \cos\psi \cdot \cos\theta & \sin\varphi \cdot \sin\theta - \sin\psi \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ -\cos\psi \cdot \sin\varphi & \sin\psi & \cos\varphi \cdot \cos\psi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Матрица преобразования из НСК в ПСК:

$$B^T = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi - \sin\psi \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta & \sin\theta \cos\varphi + \cos\theta \sin\varphi \sin\psi & -\cos\psi \sin\varphi \\ -\cos\psi \cdot \sin\theta & \cos\psi \cdot \cos\theta & \sin\psi \\ \sin\varphi \cos\theta + \cos\varphi \cdot \sin\psi \sin\theta & \sin\varphi \sin\theta - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \cos\varphi \cdot \cos\psi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Полная программная реализация математической модели, учитывающей случайный характер микропрофиля дорог, деформируемость грунтовых поверхностей и криволинейность движения колесных машин, вызывает ряд затруднений. Поэтому при решении конкретных задач вводились дополнительные допущения.

При расчете плавности хода в общей модели сделаны следующие основные допущения: пренебрегаем деформируемостью грунтовых поверхностей и криволинейностью движения, движение машины прямолинейное. Вероятностные характеристики микропрофиля опорной поверхности можно охарактеризовать корреляционной функцией, отражающей вероятностную связь между координатами микропрофиля по длине участка пути, спектральной плотностью, характеризующей частотный состав микропрофиля, и дисперсией, характеризующей разброс случайной величины относительно ее среднего значения:

$$R_q(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_q(\omega) \cos\omega l d\omega,$$

$$S_q(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_q(l) \cos\omega l dl,$$

$$D_q = R_q(0).$$

Обширные исследования автомобильных и грунтовых дорог показали, что нормированные корреляционные функции и спектральные плотности ординат среднего сечения могут быть аппроксимированы соответственно следующими выражениями:

$$\rho_q(l) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\alpha_i |l|} \cos\beta_i l, \quad (4)$$

и

$$\bar{S}_q(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i \alpha_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \omega^2)}{\omega^4 + 2\omega^2 (\alpha_i^2 + \beta_i^2) + (\alpha_i^2 + \beta_i^2)^2}, \quad (5)$$

где $\rho_q(l), \bar{S}_q(l)$ – нормированные значения.

Значения коэффициентов аппроксимации (α_i, β_i) корреляционной функции и спектральной плотности микропрофиля некоторых типов дорог приведены в соответствующей технической литературе, которые могут быть использованы для оценки возмущающих воз-

действий на динамические системы ТС. Дифференциальные уравнения движения (1) носят явно выраженный нелинейный характер. Поэтому для их решения применяются численные методы, для которых необходимо задавать конкретные реализации микропрофиля. Кроме этого, в инженерной практике достаточно часто необходимо результаты расчетов проверять экспериментальными исследованиями, здесь возникают определенные трудности, так как практически невозможно идентифицировать предложенные в специальной литературе значения параметров различных типов дорог с конкретными маршрутами движения машины и, следовательно, адекватно оценить результаты расчетов и эксперимента.

Задавать возмущающее воздействие на динамические системы желательно на основе данных, описывающих действительный микропрофиль опорных поверхностей на конкретных маршрутах движения, обладающих достаточным постоянством характеристик дорожной поверхности на всей протяженности участков измерения как по длине, так и по времени. Таким постоянством обладают испытательные дороги автополигонов, в том числе и НИЦИАМТ. После утраты базы данных микропрофиля дорог НИЦИАМТ, записанных на магнитных носителях в 70-х годах прошлого столетия, а также модернизации ряда испытательных дорог работа по определению микропрофиля базовых дорог НИЦИАМТ стала актуальной. Проведенные в 2006–2008 годах замеры микропрофиля ряда дорог ФГУП НИЦИАМТ [1] позволили определить как непосредственно высоты неровностей микропрофиля, так и коэффициенты аппроксимации корреляционной функции, которые приведены в табл. 1 (приведены средние значения коэффициентов аппроксимации).

Таблица 1

Характеристики базовых дорог НИЦИАМТ

Вид дороги	$D_q, \text{см}^2$	α	β
Асфальтовая (Д) 1	6,6	0,02	0,04
Асфальтовая 2	9,85	0,32	1,53
Булыжная 1	12,7	0,11	0,07
Булыжная 2	21,1	0,17	0,18
Грунтовая 1	39,4	0,2	0,23
Грунтовая 2	52,1	0,05	0,15
Грунтовая 3	70,7	0,04	0,28
Грунтовая 4	97,6	0,12	0,31
Грунтовая 5	123,0	0,16	0,16
Грунтовая 6	140,7	0,07	0,43

Процесс моделирования можно представить в виде следующего пошагового алгоритма. Пусть в момент времени t_i известны радиус-векторы перемещения и скорости системы (начальные условия моделирования) в проекциях на обобщенные координаты. Тогда в этот момент времени могут быть определены текущие деформации упругих элементов и скорости нагружения демпфирующих элементов и по известным характеристикам вычислены значения силовых факторов, действующих на ТС. Далее по уравнениям динамики и выбранным методам численного интегрирования определяются временные производные высших порядков по обобщенным координатам. Значения производных служат для определения (прогнозирования) положения и скорости системы в момент времени $t_{i+1} = t_i + h$, где h – шаг прогноза или интегрирования. Полученные значения являются начальными условиями на следующем шаге. Далее определяются значения переменных состояния в следующий момент времени и вычисляются силы и моменты, действующие на втором шаге интегрирования, и т.д.

При построении математической модели взаимодействия колесной машины с грунтом и оценке проходимости сделаны следующие основные допущения:

- поверхность движения ровная, т.е. пренебрегаем влиянием микропрофиля дороги;

- связь колес с корпусом машины является абсолютно жесткой во всех направлениях, за исключением относительного вращения колес;
- процесс движения машины установившийся.

Таким образом, при оценке проходимости машин решалась квазистатическая задача. Это вполне допустимо, так как передвижение колесных машин по грунтам с низкой несущей способностью происходит со скоростями движения, не превышающими 20...25 км/ч.

Тогда система уравнений, описывающих движение ТС, записывается в виде

$$\sum_{k=1}^n G_k^{(BH)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N F_{ij} = 0,$$

$$G - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N N_{ij} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_k^{(BH)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N (M_{ij} + N_{ij} L_{cij} + F_{ij} h_{cij}) = 0,$$

где $\sum_{i=1}^n G_i^{(BH)}$ – сумма продольных внешних сил, приложенных к машине;

$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N F_{ij}$ – сумма продольных реакций полотна пути по всем колесам движителя;

$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N N_{ij}$ – сумма вертикальных реакций полотна пути по всем колесам движителя;

b_k – ширина контакта колеса с полотном пути;

$\sum_{i=1}^n M_i^{(BH)}$ – сумма внешних моментов, приложенных к машине;

$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N (M_{ij} + N_{ij} L_{cij} + F_{ij} h_{cij})$ – сумма реактивных моментов полотна пути;

L_{cij} – горизонтальное расстояние от точки приложения реакций N_{ij} до центра масс;

h_{cij} – вертикальное расстояние от точки приложения реакций F_{ij} до центра масс.

Полученная система должна быть дополнена совокупностью уравнений, определяющих взаимодействие движителя машины с полотном пути [2]:

$$\int_{L_{k1}}^{L_{k2}} (\sigma_{x\kappa} - \sigma_{x\mu}) dx = 0,$$

$$\int_{L_{k1}}^{L_{k2}} (\sigma_{x\kappa} - \sigma_{x\mu}) dx = 0,$$

$$\int_{L_{k1}}^{L_{k2}} [(x\sigma_{z\kappa} + z\sigma_{x\kappa}) - (x\sigma_{z\mu} + z\sigma_{x\mu})] dx = 0,$$

где σ_x, σ_z – вертикальные и горизонтальные напряжения в зоне взаимодействия колеса с полотном пути от деформации шины и грунта;

L_{k1}, L_{k2} – длина зоны загрузки и разгрузки шины.

Приведенная выше модель позволяет рассчитать реакции на колесах машины, значения которых могут быть положены в основу расчета тягового усилия и сопротивления движению машины.

Библиографический список

1. **Котляренко, В.И.** Математическая модель системы поддресоривания и оценка плавности хода колесных машин на шинах сверхнизкого давления // Журнал ассоциации автомобильных инженеров. 2008. №5. С. 32–37.
2. **Беляков, В.В.** Взаимодействие со снежным покровом эластичных движителей специальных транспортных средств: дисс. ... докт. техн. наук. – Н. Новгород, 1999. – 485 с.

*Дата поступления
в редакцию 25.06.2010*

V.I. Kotlyarenko, S.E. Manyanin, I.A. Sokolov

MATHEMATICAL MODEL OF A WHEELED VEHICLE

On the basis of the stated basic principles the mathematical model of a wheeled vehicle is developed. Methods of description of disturbance from the road surface by means of the microprofile probabilistic characteristics and the data describing the actual microprofile of the specified routes are discussed. The mathematical model of the interaction between a wheeled vehicle and ground is built.

Key words: dynamic system of a vehicle, mathematical description of movement, microprofile, interaction between a wheeled vehicle and ground.