

УДК 539.4+539.37

Ю.В. Немировский, Т.П. Романова

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИН СО СВОБОДНЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ИХ ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

В рамках модели идеального жесткопластического тела рассмотрен динамический изгиб произвольной полигональной шарнирно опертой или защемленной пластины с произвольным внутренним свободным отверстием под действием динамической нагрузки высокой интенсивности взрывного типа. Решения могут быть использованы в различных инженерных расчетах.

*Ключевые слова:* идеальное жесткопластическое тело, пластина, нагрузка взрывного типа, динамический изгиб, инженерные расчеты.

В рамках модели идеального жесткопластического тела и на основе общих идей, изложенных в [1], рассмотрим пластину с выпуклым  $n$ -угольным произвольным контуром  $L_1$ , у которого каждая сторона  $L_{i1}$  ( $i=1, \dots, n$ ) шарнирно опертая или защемленная. Длина  $L_{i1}$  равна  $a_i$ , угол между  $L_{i-1,1}$  и  $L_{i1}$  равен  $\varphi_i$ . В центральной части пластина имеет произвольное свободное отверстие  $L_2$  (рис. 1). На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка взрывного типа высокой интенсивности  $P(t)$ , которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени  $t=0$  с последующим быстрым ее уменьшением.

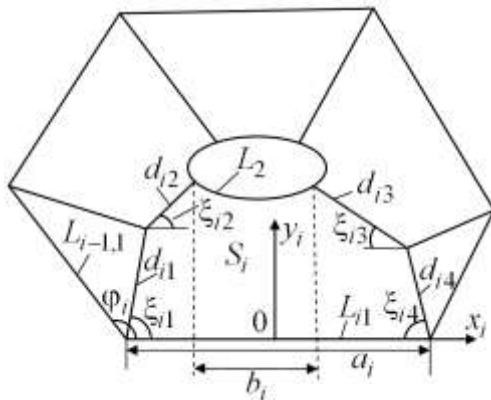


Рис. 1

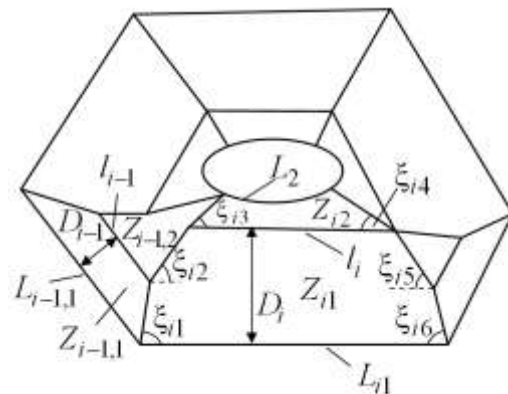


Рис. 2

Для такой пластины возможны две схемы деформирования в зависимости от  $P_{\max}$  [1]. При нагрузках, не превышающих предельные (“низких” нагрузках,  $P_{\max} < P_0$ ), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные (“средних” нагрузках,  $P_0 < P_{\max} < P_1$ ), схему движения пластины можно представить в виде областей  $S_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), которые жестко вращаются вокруг опорных участков  $L_{i1}$  с угловой скоростью  $\dot{\alpha}_i$  (рис. 1). Области  $S_i$  разделены кусочно-линейными пластическими шарнирами. Назовем

схему при “средних” нагрузках схемой 1. При достаточно высоких значениях  $P_{\max}$  (“высоких” нагрузках,  $P_{\max} > P_1$ ) схема 1 переходит в схему 2 (см. [1]), в которой деформирование пластины сопровождается возникновением в областях  $S_i$  (возможно, не во всех) нестационарных пластических линейных шарниров  $l_i$ , движущихся поступательно (рис. 2). В схемах 1 и 2 нормальный изгибающий момент на внутренних шарнирных линиях равен предельному моменту  $M_0$ ; на участке  $L_{i1}$  ( $i=1, \dots, n$ ) он равен  $M_{nn} = -(1-\eta_i)M_0$ , где  $\eta_i = 0$  при защемлении  $L_{i1}$  и  $\eta_i = 1$  при его шарнирном опирании.

Уравнения движения пластины получим из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [1]:

$$K = A - N, \tag{1}$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} \dot{u}^* ds, \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds, \tag{2}$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m. \tag{3}$$

Здесь  $K$ ,  $A$ ,  $N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $S$  – площадь;  $\rho$  – поверхностная плотность материала пластины;  $u$  – прогиб;  $l_m$  – линии разрыва угловых скоростей;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $[\dot{\theta}^*]_m$  – разрыв угловой скорости на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ . Величины с верхним индексом “\*” – допустимые скорости,  $(\dot{\phantom{x}}) = \partial / \partial t$ .

Рассмотрим подробно схему 1. Обозначим длину линейных внутренних шарниров в области  $S_i$  через  $d_{ij}$  ( $i=1, \dots, n$ ,  $j=1, \dots, 4$ ), а их угол наклона к участку контура  $L_{i1}$  – через  $\xi_{ij}$  (рис. 1). Тогда

$$d_{ij} = d_{i-1, k+1-j}, \quad \xi_{ij} + \xi_{i-1, k+1-j} = \Phi_i, \quad (i=1, \dots, n, j=1, \dots, k/2), \tag{4}$$

где  $k=4$  для схемы 1 (и  $k=6$  для схемы 2). Везде считается  $(\bullet)_0 \equiv (\bullet)_n$ .

В каждой области  $S_i$  введем декартовую систему координат  $(x_i, y_i)$ , в которой ось  $x_i$  проходит по стороне  $L_{i1}$ , а ось  $y_i$  направлена внутрь пластины (рис. 1). Начало координат  $(x_i, y_i)$  выбирается произвольно на участке  $L_{i1}$ . Тогда скорости прогибов пластины для схемы 1 будут представлены в виде:

$$(x_i, y_i) \in S_i: \quad \dot{u}(x_i, y_i, t) = \dot{\alpha}_i(t) y_i. \quad (i=1, \dots, n). \tag{5}$$

Выражения (2), (3) принимают вид:

$$K = \rho \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \dot{\alpha}_i^* \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i, \quad A = P(t) \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i^* \iint_{S_i} y_i dy_i dx_i, \tag{6}$$

$$N = M_0 \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i^* \left[ a_i (1 - \eta_i) + \sum_{j=1}^4 (d_{ij} \cos \xi_{ij}) \right] = M_0 \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i^* [a_i (2 - \eta_i) - b_i], \tag{7}$$

где  $b_i(t)$  – проекция на контур  $L_{i1}$  свободной границы области  $S_i$ , которая является частью контура  $L_2$  (рис. 1):

$$b_i(t) = a_i - \sum_{j=1}^k d_{ij}(t) \cos \xi_{ij}(t) \quad (i=1, \dots, n, k=4 \text{ или } 6).$$

Подставляя выражения (6), (7) в (1), учитывая независимость  $\dot{\alpha}_i^*$ , получим

$$\rho \ddot{\alpha}_i \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i = P(t) \iint_{S_i} y_i dy_i dx_i - M_0 [a_i (2 - \eta_i) - b_i]. \quad (i = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Условие непрерывности скоростей на границах областей  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) дает

$$\dot{\alpha}_i d_{i1} \sin \xi_{i1} = \dot{\alpha}_{i-1} d_{i1} \sin \xi_{i-1,4},$$

тогда справедливо

$$\dot{\alpha}_i = \dot{\alpha}_{i-1} \sin \xi_{i-1,4} / \sin \xi_{i1}. \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (9)$$

Начальные условия для  $\dot{\alpha}_i$ ,  $\alpha_i$  имеют вид

$$\dot{\alpha}_i(0) = \alpha_i(0) = 0. \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10)$$

Величины  $d_{ij}$ ,  $\xi_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ) в общем случае являются функциями времени. Система (8), (9), (4) с начальными условиями (10) и  $d_{ij}(0) = d_{ij}^0$ ,  $\xi_{ij}(0) = \xi_{ij}^0$  описывает поведение пластины при деформировании по схеме 1. Начальные значения  $d_{ij}^0$ ,  $\xi_{ij}^0$  определяются в зависимости от величины  $P_{\max}$ , как это будет показано ниже.

Предельную нагрузку  $P_0$  определим из (8) при  $\ddot{\alpha}_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда получим

$$P = M_0 [a_i (2 - \eta_i) - b_i] / \iint_{S_i} y_i dy_i dx_i. \quad (i = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Из (11) имеем следующие  $n-1$  равенств:

$$\frac{a_i(2 - \eta_i) - b_i}{\iint_{S_i} y_i dy_i dx_i} = \frac{a_{i+1}(2 - \eta_{i+1}) - b_{i+1}}{\iint_{S_{i+1}} y_{i+1} dy_{i+1} dx_{i+1}}. \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (12)$$

Из (4), (12) можно все функции  $d_{ij}$ ,  $\xi_{ij}$  выразить через одну, например,  $\xi_{11}$ :

$$d_{ij} = F_{ij}(\xi_{11}), \quad \xi_{ij} = G_{ij}(\xi_{11}). \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, 4). \quad (13)$$

Тогда из (11) следует, что предельная нагрузка  $P_0$  равна

$$P_0 = M_0 \min_{\xi_{11}} [a_1 (2 - \eta_1) - b_1] / \iint_{S_1} y_1 dy_1 dx_1, \quad (14)$$

где величины  $d_{1j}$ ,  $\xi_{1j}$ , определяющие область  $S_1$ , выражены через  $\xi_{11}$ . Значение функций  $d_{ij}$ ,  $\xi_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ) при действии предельной нагрузки  $P_0$  обозначим через  $d_{ij}^p$ ,  $\xi_{ij}^p$ . Тогда величина  $\xi_{11}^p$  определяется как значение  $\xi_{11}$ , на котором реализуется минимум в выражении (14), а остальные  $d_{ij}^p$ ,  $\xi_{ij}^p$  определяются по  $\xi_{11}^p$  из соотношений (13).

Начальные значения  $d_{ij}^0$ ,  $\xi_{ij}^0$  ( $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ) для схемы 1 определяются по  $P_{\max}$  из (4) и системы (11) при  $t = 0$ , которая примет вид (где  $S_i^0$  – это  $S_i$  при  $t = 0$ ):

$$P_{\max} = M_0 [a_i (2 - \eta_i) - b_i] / \iint_{S_i^0} y_i dy_i dx_i. \quad (i = 1, \dots, n).$$

Рассмотрим схему 2 (рис. 2). Обозначим часть области  $S_i$  между отрезками  $L_{i1}$  и  $l_i$  через  $Z_{i1}$ , а оставшуюся часть – через  $Z_{i2}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Поскольку шарнир  $l_i$  движется поступательно, то все его точки движутся с одинаковой скоростью, которую обозначим через  $\dot{w}_i(t)$ . Из непрерывности скоростей на  $l_i$  следует, что  $l_i \parallel L_{i1}$ , и расстояние  $D_i$  между  $L_{i1}$  и  $l_i$  не зависит от координат  $(x_i, y_i)$ , а является только функцией времени. Обозначим скорость поворота области  $Z_{i2}$  вокруг шарнира  $l_i$  через  $\dot{\beta}_i$ . Тогда скорости прогибов пластины для схемы 2 будут представлены в виде:

$$(x_i, y_i) \in Z_{i1}: \quad \dot{u}(x_i, y_i, t) = \dot{\alpha}_i(t) y_i, \quad (i=1, \dots, n) \quad (15)$$

$$(x_i, y_i) \in Z_{i2}: \quad \dot{u}(x_i, y_i, t) = \dot{w}_i(t) + \dot{\beta}_i(t)(y_i - D_i).$$

Уравнения движения пластины для схемы 2 получим из (1). Если шарниры  $l_i$  возникли во всех областях  $S_i$ , то выражения (2) имеют вид:

$$K = \rho \sum_{i=1}^n \left\{ \ddot{\alpha}_i \dot{\alpha}_i^* \iint_{Z_{i1}} y_i^2 dy_i dx_i + \iint_{Z_{i2}} [\ddot{\beta}_i (y_i - D_i) + \ddot{w}_i] [\dot{\beta}_i^* (y_i - D_i) + \dot{w}_i^*] dy_i dx_i \right\} = \quad (16)$$

$$= \rho \sum_{i=1}^n \left\{ \ddot{\alpha}_i \dot{\alpha}_i^* \iint_{Z_{i1}} y_i^2 dy_i dx_i + \dot{\beta}_i^* \left[ \ddot{\beta}_i \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i)^2 dy_i dx_i + \ddot{w}_i \iint_{Z_{i1}} (y_i - D_i) dy_i dx_i \right] + \dot{w}_i^* \left[ \ddot{\beta}_i \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i) dy_i dx_i + \ddot{w}_i \iint_{Z_{i2}} dy_i dx_i \right] \right\},$$

$$A = P(t) \sum_{i=1}^n \left[ \dot{\alpha}_i^* \iint_{Z_{i1}} y_i dy_i dx_i + \dot{w}_i^* \iint_{Z_{i2}} dy_i dx_i + \dot{\beta}_i^* \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i) dy_i dx_i \right]. \quad (17)$$

Учитывая что  $[\dot{\theta}^*]_{l_i} = |\dot{\alpha}_i^* - \dot{\beta}_i^*|$ , а  $\dot{\alpha}_i^* \geq \dot{\beta}_i^*$  ( $i=1, \dots, n$ ) (как и в [1, 2]), получим, что полная мощность внутренних сил (3) имеет выражение

$$N = M_0 \sum_{i=1}^n \left[ \dot{\alpha}_i^* (2 - \eta_i) a_i - \dot{\beta}_i^* b_i \right]. \quad (18)$$

Подставляя выражения (16) – (18) в равенство (1) и учитывая независимость функций  $\dot{\alpha}_i^*$ ,  $\dot{\beta}_i^*$ ,  $\dot{w}_i^*$ , получим следующие уравнения: ( $i=1, \dots, n$ )

$$\rho \ddot{\alpha}_i \iint_{Z_{i1}} y_i^2 dy_i dx_i = P(t) \iint_{Z_{i1}} y_i dy_i dx_i - M_0 (2 - \eta_i) a_i, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\beta}_i \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i)^2 dy_i dx_i + \rho \ddot{w}_i \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i) dy_i dx_i = \\ = P(t) \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i) dy_i dx_i + M_0 b_i, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\rho \ddot{\beta}_i \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i) dy_i dx_i + \rho \ddot{w}_i \iint_{Z_{i2}} dy_i dx_i = P(t) \iint_{Z_{i2}} dy_i dx_i. \quad (21)$$

После преобразований уравнения (20), (21) приводятся к виду: ( $i=1, \dots, n$ )

$$\rho \ddot{\beta}_i = M_0 b_i \iint_{Z_{i2}} dy_i dx_i / Q_i, \quad (Q_i = \iint_{Z_{i2}} dy_i dx_i \iint_{Z_{i2}} y_i^2 dy_i dx_i - (\iint_{Z_{i2}} y_i dy_i dx_i)^2 > 0) \quad (22)$$

$$\rho \ddot{w}_i = P(t) - M_0 b_i \iint_{Z_{i2}} (y_i - D_i) dy_i dx_i / Q_i. \quad (23)$$

Из непрерывности скоростей на границах областей  $Z_{i1}$  и  $Z_{i2}$ ,  $Z_{i2}$  и  $Z_{i-1,2}$  имеем

$$\dot{\alpha}_i D_i = \dot{w}_i, \quad (i=1, \dots, n) \quad (24)$$

$$\dot{\beta}_i = \dot{\beta}_{i-1} \psi_i, \quad \dot{\alpha}_i = \dot{\alpha}_{i-1} \omega_i, \quad (25)$$

где функции  $\psi_i$ ,  $\omega_i$  зависят от геометрических размеров областей  $Z_{i1}$ ,  $Z_{i2}$ .

Система уравнений (19), (22) – (25), (4) описывает поведение пластины в случае деформирования по схеме 2. Начальные условия имеют вид (10) и

$$\dot{\beta}_i(0) = \dot{\beta}_i(0) = \dot{w}_i(0) = \dot{w}_i(0) = 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

Нагрузка  $P_1$ , при превышении которой реализуется схема 2, и начальные значения  $D_0 = D(0)$ ,  $d_{ij}^0$ ,  $\xi_{ij}^0$  ( $i=1, \dots, n$ ,  $j=1, \dots, 4$ ) при  $P_{\max} > P_1$ , определяются далее.

Возможно, что при  $P_{\max} \geq P_1$  шарнир  $l_i$  возникает не во всех областях  $S_i$ . В тех областях  $S_j$ , где шарнира  $l_j$  нет, движение описывается уравнениями схемы 1: (8), (9), (4) при соответствующих значениях  $i = j$ . В остальных областях поведение описывается уравнениями схемы 2: (19), (22) – (25), (4). Из условия непрерывности скоростей на границе областей  $S_j$ , движущихся по схеме 1, и областей  $S_k$ , деформирующихся по схеме 2, получим:

$$\dot{\alpha}_k = \dot{\alpha}_j \delta_k, \quad \dot{\beta}_k = \dot{\alpha}_j \kappa_k,$$

где  $\delta_k, \kappa_k$  – функции от геометрических размеров областей  $S_j$  и  $S_k$ .

При отсутствии отверстия ( $b_i = 0, i = 1, \dots, n$ ) области  $Z_{i2}$  сливаются в одну область и, как видно из (23), движутся поступательно с одинаковой скоростью  $\dot{w}_i = P(t) / \rho$ .

Рассмотрим определение нагрузки  $P_1$ . Пусть пластина в силу симметрии имеет в схеме 2 три типа областей, например, как на рис. 3, где  $\varphi_i = \varphi = \text{const}$  (при  $\varphi = \pi/2$  пластина будет прямоугольной). В схеме 2 на рис. 3 шарнир  $l_1$  возник в области  $S_1$  и разбил ее на две области  $Z_{11}$  и  $Z_{12}$ , а в области  $S_2$  такого шарнира нет. Пусть  $P_{11}$  – нагрузка, при превышении которой пластина начнет деформироваться таким образом. Поведение определяется уравнениями (8) при  $i = 2$  и (19), (22) – (24) при  $i = 1$  и

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 \sin(\varphi - \xi_{11}) / \sin \xi_{11}, \tag{26}$$

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\alpha}_2 \sin(\varphi - \xi_{12}) / \sin \xi_{12}, \tag{27}$$

$$\xi_{1j} + \xi_{2j} = \varphi, \quad (j = 1, 2), \tag{28}$$

где  $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\beta}_1, \dot{w}_1, D_1, \xi_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – девять неизвестных функций времени.

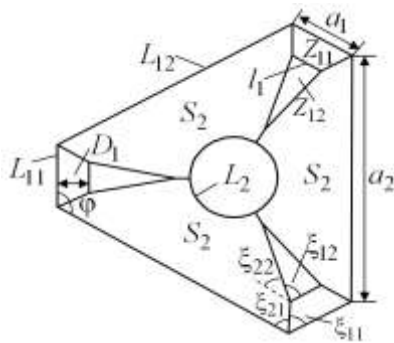


Рис. 3

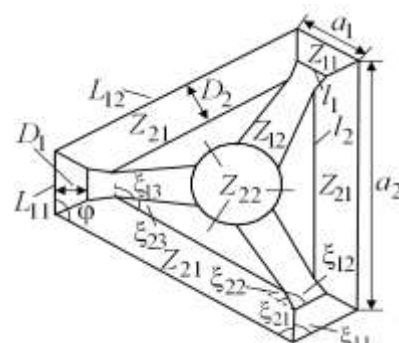


Рис. 4

Дифференцируя (24) при  $i = 1$  по времени, имеем выражение

$$\ddot{\alpha}_1 D_1 + \dot{\alpha}_1 \dot{D}_1 = \dot{w}_1,$$

которое подставляем в (23), (19) при  $i = 1$ . При  $t = 0$  из полученного равенства следует

$$\frac{P_{\max}}{M_0} = \frac{(2 - \eta_1) a_1 D_1^0 - b_1 \iint_{Z_{11}^0} y_1^2 dy_1 dx_1 \iint_{Z_{12}^0} (y_1 - D_1^0) dy_1 dx_1 / Q_1^0}{D_1^0 \iint_{Z_{11}^0} y_1 dy_1 dx_1 - \iint_{Z_{11}^0} y_1^2 dy_1 dx_1}, \tag{29}$$

где верхним индексом 0 обозначены области и функции при  $t = 0$ .

Дифференцируя (26) по времени, имеем равенство

$$\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\alpha}_2 \sin(\varphi - \xi_{11}) / \sin \xi_{11} - \dot{\alpha}_2 \dot{\xi}_{11} \sin \varphi / \sin^2 \xi_{11},$$

которое подставляем в (19) при  $i=1$  и (8) при  $i=2$ . При  $t=0$  из полученного выражения следует

$$\frac{P_{\max}}{M_0} = \frac{(2-\eta_1)a_1 \iint_{S_2^0} y_2^2 dy_2 dx_2 - [a_2(2-\eta_2) - b_2] \frac{\sin(\varphi - \xi_{11}^0)}{\sin \xi_{11}^0} \iint_{Z_{11}^0} y_1^2 dy_1 dx_1}{\iint_{Z_{11}^0} y_1 dy_1 dx_1 \iint_{S_2^0} y_2^2 dy_2 dx_2 - \frac{\sin(\varphi - \xi_{11}^0)}{\sin \xi_{11}^0} \iint_{S_2^0} y_2 dy_2 dx_2 \iint_{Z_{11}^0} y_1^2 dy_1 dx_1}. \quad (30)$$

Дифференцируя (27) по времени, имеем выражение,

$$\ddot{\beta}_1 = \ddot{\alpha}_2 \sin(\varphi - \xi_{12}) / \sin \xi_{12} - \dot{\alpha}_2 \dot{\xi}_{12} \sin \varphi / \sin^2 \xi_{12},$$

которое подставляем в (22) при  $i=1$  и (8) при  $i=2$ .

При  $t=0$  из полученного соотношения следует

$$\frac{P_{\max}}{M_0} = \frac{a_2(2-\eta_2) - b_2 + b_1 \sin \xi_{12}^0 \iint_{Z_{12}^0} dy_1 dx_1 \iint_{S_2^0} y_2^2 dy_2 dx_2 / [\sin(\varphi - \xi_{12}^0) Q_1^0]}{\iint_{S_2^0} y_2 dy_2 dx_2}. \quad (31)$$

Поскольку при  $P_{\max} = P_{11}$  схема 1 переходит в схему 2, то при этом должно выполняться условие  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\beta}_1$ . Тогда из этого равенства и (19), (22) при  $i=1$  получим

$$\frac{P_{11}}{M_0} \iint_{Z_{11}^b} y_1 dy_1 dx_1 = (2-\eta_1)a_1 + b_1 \iint_{Z_{11}^b} y_1^2 dy_1 dx_1 \iint_{Z_{12}^b} dy_1 dx_1 / Q_1^b, \quad (32)$$

где верхний индекс  $b$  обозначает, что области и функции определены при  $D_1 = D_1^b$ ,  $\xi_{ij} = \xi_{ij}^b$  ( $i, j = 1, 2$ ), которые являются значениями  $D_1$  и  $\xi_{ij}$  при нагрузке  $P_{\max} = P_{11}$ .

Из системы уравнений (29) – (31) при  $P_{\max} = P_{11}$  и (32), (28) определяются значения  $P_{11}$ ,  $D_1^b$ ,  $\xi_{ij}^b$  ( $i, j = 1, 2$ ). А из системы (28) – (31) по величине  $P_{\max}$  определяются начальные значения  $D_1^0$ ,  $\xi_{ij}^0$ .

Поскольку заранее неизвестно, в какой из областей  $S_1$  или  $S_2$  возникнет пластический шарнир  $l_1$  или  $l_2$ , соответственно, то следует также рассмотреть случай, когда сначала в области  $S_2$  возникает пластический шарнир  $l_2$ , а в области  $S_1$  его нет. Нагрузку  $P_{\max}$ , соответствующую появлению шарнира  $l_2$  в области  $S_2$ , обозначим через  $P_{12}$ . Величина  $P_{12}$  определяется аналогично вычислению значения  $P_{11}$ . Тогда

$$P_1 = \min(P_{11}, P_{12}).$$

При нагрузке  $P_{\max} > P_1$  возможно возникновение пластического шарнира  $l_1$  (или  $l_2$ ) и в той области  $S_1$  (или  $S_2$ ), в которой его не было при  $P_{\max} = P_1$  (рис. 4). Поведение пластины в этом случае описывается уравнениями (19), (22) – (24) при  $i=1, 2$ , (26), (27), (28) при  $j=1-3$  и

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2 \sin(\varphi - \xi_{13}) / \sin \xi_{13},$$

где углы  $\xi_{13}$ ,  $\xi_{23}$  изображены на рис. 4. Нагрузка  $P_2$ , соответствующая началу развития схемы 2 с шарнирами  $l_1$  и  $l_2$ , изображенной на рис. 4, вычисляется аналогично нагрузке  $P_{11}$ , учитывая, что при этом выполняется  $\dot{\alpha}_2 = \dot{\beta}_2$ .

Уравнения, описывающие динамическое поведение пластины, решаются численно методом Рунге-Кутты. Для одинаково закрепленного правильного полигонального контура такой анализ подробно рассмотрен в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 15).

#### **Библиографический список**

1. **Немировский, Ю.В.** Моделирование динамического поведения жесткопластической криволинейной пластины с произвольным свободным отверстием / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический сборник, Белорусский Национальный тех. ун-т. 2007. № 23. С. 26–34.
2. **Немировский, Ю.В.** Динамика жесткопластической правильной полигональной пластины с отверстием под действием взрывных нагрузок / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. ст. 9-й Всероссийской науч. конф. – Новокузнецк. 2008. В 3 т. Т. 1. С. 93–97.

*Дата поступления  
в редакцию 09.11.2010*

**Y.V. Nemirovsky, T.P. Romanova**

#### **PHYSICAL MODELING OF VESSEL MOTION IN BROKEN ICE**

In the framework of ideal rigid-body discussed dynamic bending of the plate. Consider a plate with an arbitrary inner hole that is under the influence of dynamic loading of high-intensity explosive type. Solutions can be used in a variety of engineering calculations.

*Key words:* ideal rigid body, plate, load of explosive type, dynamic bending, engineering calculations.