УДК 517.2

Ю.А. Иларионов, А.И. Ермолаев

ВЫВОД РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Предлагается методика вывода рекуррентных формул для цилиндрических функций первого, второго, третьего рода и модифицированных функций Бесселя первого и второго рода непосредственно из дифференциальных уравнений для них.

Ключевые слова: цилиндрические функции, комплексный аргумент, модифицированные функции Бесселя, рекуррентные формулы, произвольный индекс.

Как известно [1,2,3], дифференциальное уравнение для цилиндрических функций $\mathrm{J}_\nu(z)$, $\mathrm{N}_\nu(z)$, $\mathrm{H}_\nu^{(1,2)}(z)$ с произвольным индексом ν от комплексного аргумента z имеет вид:

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+(z^2-\nu^2)u=0. \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение для модифицированных функций Бесселя $\mathrm{I}_\nu(z)$, $\mathrm{K}_\nu(z)$ от комплексного аргумента z с произвольным индексом ν получается из (1) заменой z на iz:

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{v}}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}\mathrm{v}}{\mathrm{d}z}-(z^2+\nu^2)\mathrm{v}=0. \tag{2}$$

Рекуррентные формулы для рассматриваемых функций $\mathrm{J}_\nu(z)$, $\mathrm{N}_\nu(z)$, $\mathrm{H}_\nu^{(1,2)}(z)=\mathrm{J}_\nu(z)\pm i\,\mathrm{N}_\nu(z)$; $\mathrm{I}_\nu(z)$, $\mathrm{K}_\nu(z)$ общеизвестны [1, 2, 3] и представляются соотношениями:

$$\begin{cases}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)=\dfrac{2\nu\,\mathrm{J}_\nu(z)}{z},\\ \mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)=2\,\mathrm{J}'_\nu(z);\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\mathrm{N}_{\nu-1}(z)+\mathrm{N}_{\nu+1}(z)=\dfrac{2\nu\,\mathrm{N}_\nu(z)}{z},\\ \mathrm{N}_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu+1}(z)=2\,\mathrm{N}'_\nu(z);\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\mathrm{H}_{\nu-1}^{(1,2)}(z)+\mathrm{H}_{\nu+1}^{(1,2)}(z)=\dfrac{2\nu\,\mathrm{H}_\nu^{(1,2)}(z)}{z},\\ \mathrm{H}_{\nu-1}^{(1,2)}(z)-\mathrm{H}_{\nu+1}^{(1,2)}(z)=2\,\mathrm{H}_\nu^{(1,2)\prime}(z);\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)=\dfrac{2\nu}{z}\mathrm{I}_\nu(z),\\ \mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)=2\,\mathrm{I}'_\nu(z);\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases}\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_{\nu+1}(z)=-\dfrac{2\nu}{z}\mathrm{K}_\nu(z),\\ \mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{K}_{\nu+1}(z)=-2\,\mathrm{K}'_\nu(z).\end{cases} \tag{7}$$

© Иларионов Ю.А., Ермолаев А.И., 2011.

В формулах (2), (4), (5), (6), (7) штрих означает дифференцирование по аргументу z. Формулы для цилиндрических функций $\mathrm{J}_\nu(z)$, $\mathrm{N}_\nu(z)$, $\mathrm{H}_\nu^{(1,2)}(z)$ совпадают, а формулы для модифицированных функций различаются только знаком в правых частях (6) и (7).

Рекуррентные формулы играют важную роль при разработке алгоритмов и программ расчёта цилиндрических функций любого индекса ν (целого или дробного, действительного или комплексного) от комплексного аргумента [4].

В известной литературе [1, 2, 3] по теории бесселевых функций приведены различные способы вывода рекуррентных формул (3), (4), (5), (6), (7). Например, в [1] рекуррентные соотношения (3) выводятся для действительного аргумента x и целого индекса n на основе представления функции Бесселя первого рода $\mathrm{J}_n(x)$ в виде определённого интеграла. Полученные рекуррентные формулы обобщаются на функцию Бесселя $\mathrm{J}_\nu(z)$ любого порядка ν путём представления её в виде степенного ряда.

В [2] для вывода рекуррентных соотношений (3) используется представление функции $\mathrm{J}_\nu(z)$ в виде степенного ряда, с использованием которого находится функция $\dfrac{\mathrm{J}_\nu(z)}{z^\nu}$. Дифференцирование её по аргументу z приводит к формуле:
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{\mathrm{J}_\nu(z)}{z^\nu}\right) = -\dfrac{\mathrm{J}_{\nu+1}(z)}{z^\nu}$, связывающей функции Бесселя порядков ν и $\nu+1$. Эта формула является основой вывода рекуррентных соотношений для функции Бесселя первого рода $\mathrm{J}_\nu(z)$.

Представляет интерес разработать методику вывода рекуррентных формул для цилиндрических $\mathrm{J}_\nu(z)$, $\mathrm{N}_\nu(z)$, $\mathrm{H}_\nu^{(1,2)}(z)$ и модифицированных $\mathrm{I}_\nu(z)$, $\mathrm{K}_\nu(z)$ функций Бесселя любого индекса ν от комплексного аргумента z, исходя только из дифференциальных уравнений для них (1) и (2).

На основании (1) дифференциальное уравнение для цилиндрической функции $\mathrm{J}_\nu(z)$ имеет вид:

$$z^2\,\mathrm{J}_\nu''(z) + z\,\mathrm{J}_\nu'(z) + (z^2-\nu^2)\,\mathrm{J}_\nu(z) = 0\,. \tag{8}$$

Заменяя в (8) индекс функции ν на (ν-1) и (ν+1), имеем:

$$z^2\,\mathrm{J}_{\nu-1}''(z) + z\,\mathrm{J}_{\nu-1}'(z) + \left[z^2-(\nu-1)^2\right]\mathrm{J}_{\nu-1}(z) = 0\,; \tag{9}$$

$$z^2\,\mathrm{J}_{\nu+1}''(z) + z\,\mathrm{J}_{\nu+1}'(z) + \left[z^2-(\nu+1)^2\right]\mathrm{J}_{\nu+1}(z) = 0\,. \tag{10}$$

Складывая уравнения (9) и (10), получаем:

$$z^2\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]'' + z\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]' + z^2\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] - \left[(\nu-1)^2\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+(\nu+1)^2\,\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] = 0\,.$$

После алгебраических преобразований последняя квадратная скобка в полученном уравнении примет вид:

$$\left[(\nu-1)^2\,\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+(\nu+1)^2\,\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] = (\nu^2+1)\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] - 2\nu\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right].$$

Тогда одно из уравнений, связывающее между собой сумму $\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]$ и разность $\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]$ функций Бесселя, запишется как

$$\begin{aligned} &z^2\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]'' + z\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]' + \\ &+\left[z^2-(\nu^2+1)\right]\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] + 2\nu\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Другое уравнение, также связывающее между собой сумму и разность функций $\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$ и $\mathrm{J}_{\nu+1}(z)$, получаем, вычитая из уравнения (9) уравнение (10):

$$\begin{aligned} &z^2\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]'' + z\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right]' + \\ &+\left[z^2-(\nu^2+1)\right]\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] + 2\nu\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)\right] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Будем искать решение системы уравнений (11), (12) в виде:

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)+\mathrm{J}_{\nu+1}(z)=p_\nu(z)\mathrm{J}_\nu(z); \qquad (13)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(z)-\mathrm{J}_{\nu+1}(z)=q_\nu(z)\mathrm{J}'_\nu(z). \qquad (14)$$

Получим уравнения для коэффициентов $p_\nu(z)$ и $q_\nu(z)$ в правых частях уравнений (13) и (14).

Подставляя соотношения (13), (14) в уравнение (12) и используя (8), получаем:

$$\left[2z^2p'_\nu(z)+2\nu q_\nu(z)\right]\mathrm{J}'_\nu(z)+\left[z^2p''_\nu(z)+zp'_\nu(z)-p_\nu(z)\right]\mathrm{J}_\nu(z)=0. \qquad (15)$$

Для выполнения уравнения (15) при любых z и ν необходимо, чтобы квадратные скобки перед функциями $\mathrm{J}_\nu(z)$ и $\mathrm{J}'_\nu(z)$ обращались в нуль, т.е.

$$z^2p'_\nu(z)+\nu q_\nu(z)=0; \qquad (16)$$

$$z^2p''_\nu(z)+zp'_\nu(z)-p_\nu(z)=0. \qquad (17)$$

Общее решение уравнения (17) имеет вид:

$$p_\nu(z)=C_1z+\frac{C_2}{z}, \qquad (18)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Из уравнения (16) с учетом (18) находим:

$$q_\nu(z)=\frac{C_2}{\nu}-\frac{C_1z^2}{\nu}. \qquad (19)$$

Подставляя соотношения (13) и (14) в уравнение (11) и используя (8), получаем:

$$\left[z^2q''_\nu(z)-zq'_\nu(z)\right]\mathrm{J}'_\nu(z)-2\left[(z^2-\nu^2)q'_\nu(z)+\frac{\nu^2}{z}q_\nu(z)-\nu p_\nu(z)\right]\mathrm{J}_\nu(z)=0. \qquad (20)$$

Для выполнения уравнения (20) при любых z и ν необходимо, чтобы квадратные скобки перед функциями $\mathrm{J}_\nu(z)$ и $\mathrm{J}'_\nu(z)$ обращались в нуль, т.е.

$$zq''_\nu(z)-q'_\nu(z)=0; \qquad (21)$$

$$(z^2-\nu^2)q'_\nu(z)+\frac{\nu^2}{z}q'_\nu(z)-\nu p_\nu(z)=0. \qquad (22)$$

Общее решение уравнения (21) имеет вид:

$$q_\nu(z)=D_1+D_2z^2, \qquad (23)$$

где D_1 и D_2 – произвольные постоянные.

Из уравнения (22) с учетом (23) находим:

$$p_\nu(z)=-\nu D_2z+\frac{2}{\nu}D_2z^3+\frac{\nu}{z}D_1. \qquad (24)$$

Сравним между собой выражения для коэффициентов $p_\nu(z)$ и $q_\nu(z)$, найденные из уравнений (16), (17) и (21), (22).

Поскольку в формуле (18) для $p_\nu(z)$ нет члена, содержащего z^3, в (24) следует положить:

$$D_2=0. \qquad (25)$$

Поскольку выражение (24) при $D_2=0$ не имеет члена, содержащего z^1, в (18) следует положить:

$$C_1=0. \qquad (26)$$

Формулы (18) и (24) с учетом (25), (26) принимают вид:

$$p_\nu(z)=\frac{C_2}{z}; \qquad (27)$$

$$p_v(z) = \frac{v}{z} D_1. \tag{28}$$

Из (27) и (28) следует:

$$C_2 = v D_1. \tag{29}$$

Сравним формулы (19) и (23) для $q_v(z)$, которые при $D_2 = C_1 = 0$ принимают вид:

$$q_v(z) = \frac{C_2}{v}; \tag{30}$$

$$q_v(z) = D_1. \tag{31}$$

Из (30) и (31) вновь следует формула (29). Подставляя (28), (31) в формулы (13) и (14), получаем:

$$\mathrm{J}_{v-1}(z) + \mathrm{J}_{v+1}(z) = \frac{v}{z} D_1(z) \mathrm{J}_v(z); \tag{32}$$

$$\mathrm{J}_{v-1}(z) - \mathrm{J}_{v+1}(z) = D_1(z) \mathrm{J}'_v(z). \tag{33}$$

Значение постоянного коэффициента D_1 в формулах (32), (33) можно установить либо на основе предельных переходов: $z \to 0$ или $z \to \infty$, либо, учитывая в рассматриваемом случае независимость D_1 от v, вычисляя (32), (33) при некотором v.

Полагая в соотношениях (32), (33) $v = 0$, получаем:

$$\mathrm{J}_{-1}(z) + \mathrm{J}_1(z) = 0;$$

$$\mathrm{J}_{-1}(z) - \mathrm{J}_1(z) = D_1(z) \mathrm{J}'_0(z).$$

Из первого уравнения следует известное соотношение $\mathrm{J}_{-1}(z) = -\mathrm{J}_1(z)$, а из второго уравнения с учетом формулы $\mathrm{J}'_0(z) = -\mathrm{J}_1(z)$ находим значение коэффициента $D_1 = 2$.

В результате рекуррентные формулы для цилиндрической функции первого рода $\mathrm{J}_v(z)$ принимают вид, совпадающий с (3).

Рекуррентные формулы для цилиндрической функции второго рода $\mathrm{N}_v(z)$ можно получить, используя изложенную ранее методику, однако при известных рекуррентных формулах (3) проще использовать функциональное соотношение между $\mathrm{N}_v(z)$ и $\mathrm{J}_v(z)$ [1,2,3]:

$$\mathrm{N}_v(z) = \frac{\mathrm{J}_v(z)\cos(\pi v) - \mathrm{J}_{-v}(z)}{\sin(\pi v)}. \tag{34}$$

Из формулы (34) следует:

$$\mathrm{N}_{v-1}(z) + \mathrm{N}_{v+1}(z) = \frac{[\mathrm{J}_{v-1}(z) + \mathrm{J}_{v+1}(z)]\cos(\pi v) + [\mathrm{J}_{-v-1}(z) + \mathrm{J}_{-v+1}(z)]}{\sin(\pi v)}. \tag{35}$$

Используя рекуррентную формулу (3) для суммы цилиндрических функций первого рода и функциональное соотношение (34), из (35) получаем рекуррентную формулу (4) для суммы цилиндрических функций второго рода:

$$\mathrm{N}_{v-1}(z) + \mathrm{N}_{v+1}(z) = \frac{\frac{2v}{z}\mathrm{J}_v(z)\cos(\pi v) - \frac{2v}{z}\mathrm{J}_{-v}(z)}{\sin(\pi v)} = \frac{2v}{z}\mathrm{N}_v(z).$$

Из формулы (34) также следует:

$$\mathrm{N}_{v-1}(z) - \mathrm{N}_{v+1}(z) = \frac{[\mathrm{J}_{v-1}(z) - \mathrm{J}_{v+1}(z)]\cos(\pi v) - [\mathrm{J}_{-v-1}(z) - \mathrm{J}_{-v+1}(z)]}{\sin(\pi v)}. \tag{36}$$

Используя рекуррентную формулу (3) для разности цилиндрических функций первого рода и функциональное соотношение (34), из (36) получаем рекуррентную формулу (4) для разности цилиндрических функций второго рода:

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(z)-\mathrm{N}_{\nu+1}(z)=\frac{2\,\mathrm{J}'_{\nu}(z)\cos(\pi\nu)-2\,\mathrm{J}'_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}=2\,\mathrm{N}'_{\nu}(z).$$

Ввиду того, что $\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(z)$ и $\mathrm{H}_{\nu}^{(2)}(z)$ – линейные комбинации функций $\mathrm{J}_{\nu}(z)$ и $\mathrm{N}_{\nu}(z)$, для функций Ханкеля справедливы формулы (5), аналогичные формулам (3) и (4) для функций $\mathrm{J}_{\nu}(z)$ и $\mathrm{N}_{\nu}(z)$.

Применим изложенную ранее методику для нахождения рекуррентных соотношений между модифицированными функциями Бесселя первого и второго рода.

На основании (2) дифференциальное уравнение для модифицированной функции $\mathrm{I}_{\nu}(z)$ имеет вид:

$$z^2\,\mathrm{I}''_{\nu}(z)+z\,\mathrm{I}'_{\nu}(z)-(z^2+\nu^2)\,\mathrm{I}_{\nu}(z)=0. \tag{37}$$

Заменяя в (26) индекс функции ν на (ν-1) и (ν+1), складывая и вычитая полученные уравнения, находим соотношения, связывающие между собой сумму и разность функций $\mathrm{I}_{\nu-1}(z)$ и $\mathrm{I}_{\nu+1}(z)$:

$$\begin{aligned}&z^2\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]''+z\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]'-\\&-\left[z^2+(\nu^2+1)\right]\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]+2\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]=0;\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}&z^2\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]''+z\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]'-\\&-\left[z^2+(\nu^2+1)\right]\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]+2\nu\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]=0.\end{aligned} \tag{39}$$

Будем искать решение системы уравнений (38), (39) в виде:

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z)-\mathrm{I}_{\nu+1}(z)=r_{\nu}(z)\,\mathrm{I}_{\nu}(z); \tag{40}$$

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)=s_{\nu}(z)\,\mathrm{I}'_{\nu}(z). \tag{41}$$

Подставляя соотношения (40), (41) в уравнения (38), (39) и используя (37), получаем:

$$\left[2z^2r'_{\nu}(z)+2\nu s_{\nu}(z)\right]\mathrm{I}'_{\nu}(z)+\left[z^2r''_{\nu}(z)+zr'_{\nu}(z)-r_{\nu}(z)\right]\mathrm{I}_{\nu}(z)=0; \tag{42}$$

$$\left[z^2s''_{\nu}(z)-zs'_{\nu}(z)\right]\mathrm{I}'_{\nu}(z)-2\left[(z^2+\nu^2)s'_{\nu}(z)-\frac{\nu^2}{z}s_{\nu}(z)+\nu r_{\nu}(z)\right]\mathrm{I}_{\nu}(z)=0. \tag{43}$$

Для выполнения уравнений (42), (43) при любых z и ν необходимо, чтобы квадратные скобки перед функциями $\mathrm{I}_{\nu}(z)$ и $\mathrm{I}'_{\nu}(z)$ обращались в нуль:

$$z^2r'_{\nu}(z)+\nu s_{\nu}(z)=0; \tag{44}$$

$$z^2r''_{\nu}(z)+zr'_{\nu}(z)-r_{\nu}(z)=0; \tag{45}$$

$$zs''_{\nu}(z)-s'_{\nu}(z)=0; \tag{46}$$

$$(z^2+\nu^2)s'_{\nu}(z)-\frac{\nu^2}{z}s_{\nu}(z)+\nu r_{\nu}(z)=0. \tag{47}$$

Найдем и сравним решения систем уравнений (44), (45), и (46), (47).

Общее решение однородного дифференциального уравнения (45) имеет вид:

$$r_{\nu}(z)=A_1z+\frac{A_2}{z}, \tag{48}$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные.

Из уравнения (44) с учетом (48) находим:

$$s_{\nu}(z)=\frac{A_2}{\nu}-\frac{A_1}{\nu}z^2. \tag{49}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (46) имеет вид:

$$s_{\nu}(z)=B_1+B_2z^2, \tag{50}$$

где B_1 и B_2 – произвольные постоянные.

Из уравнения (47) с учетом (50) находим:

$$r_\nu(z) = -\nu B_2 z - \frac{2}{\nu} B_2 z^3 + \frac{\nu}{z} B_1. \qquad (51)$$

Сравниваем выражения для коэффициентов $r_\nu(z)$ и $s_\nu(z)$, найденные из различных систем уравнений: (44), (45) и (46), (47). Поскольку в решении (48) для $r_\nu(z)$ нет члена, содержащего z^3, следует в (51) положить $B_2 = 0$. Поскольку соотношение (51) при $B_2 = 0$ не содержит слагаемого, пропорционального z, в (48) следует положить $A_1 = 0$. Формулы (48) и (51) при $A_1 = 0$ и $B_2 = 0$ примут вид:

$$r_\nu = \frac{A_2}{z}; \qquad (52)$$

$$r_\nu = \frac{\nu}{z} B_1. \qquad (53)$$

Отсюда следует соотношение, связывающее постоянные A_2 и B_1:

$$A_2 = \nu B_1. \qquad (54)$$

Формулы (49) и (50) при $A_1 = 0$ и $B_2 = 0$ принимают вид:

$$s_\nu(z) = \frac{A_2}{\nu}; \qquad (55)$$

$$s_\nu(z) = B_1. \qquad (56)$$

Отсюда вновь следует (54).

Подставляя (56), (53) в формулы (40), (41), находим:

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z) - \mathrm{I}_{\nu+1}(z) = \frac{\nu}{z} B_1(z)\,\mathrm{I}_\nu(z); \qquad (57)$$

$$\mathrm{I}_{\nu-1}(z) + \mathrm{I}_{\nu+1}(z) = B_1\,\mathrm{I}'_\nu(z). \qquad (58)$$

Учитывая независимость B_1 от ν, значение постоянного коэффициента B_1 в формулах (57), (58) находим, полагая $\nu = 0$. При этом уравнения принимают вид:

$$\mathrm{I}_{-1}(z) - \mathrm{I}_1(z) = 0;$$

$$\mathrm{I}_{-1}(z) + \mathrm{I}_1(z) = B_1\,\mathrm{I}'_0(z).$$

Из первого уравнения следует известное соотношение $\mathrm{I}_{-1}(z) = \mathrm{I}_1(z)$, из второго уравнения с учетом формулы $\mathrm{I}'_0(z) = \mathrm{I}_1(z)$ находим значение коэффициента $B_1 = 2$.

В результате рекуррентные формулы для модифицированной функции Бесселя первого рода $\mathrm{I}_\nu(z)$ принимают вид, совпадающий с (6).

Для модифицированной функции Бесселя второго рода $\mathrm{K}_\nu(z)$ можно получить рекуррентные формулы (7) из дифференциального уравнения:

$$z^2\,\mathrm{K}''_\nu(z) + z\,\mathrm{K}'_\nu(z) - (z^2 + \nu^2)\,\mathrm{K}_\nu(z) = 0$$

аналогичным образом.

Однако при известных рекуррентных формулах (6) для $\mathrm{I}_\nu(z)$ проще это сделать, используя функциональное соотношение между $\mathrm{K}_\nu(z)$ и $\mathrm{I}_\nu(z)$ [1, 2, 3]:

$$\mathrm{K}_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mathrm{I}_{-\nu}(z) - \mathrm{I}_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)}. \qquad (59)$$

Из формулы (59) следует:

$$\mathrm{K}_{\nu-1}(z) - \mathrm{K}_{\nu+1}(z) = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\left[\mathrm{I}_{-\nu-1}(z) - \mathrm{I}_{-\nu+1}(z)\right] + \left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z) - \mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]}{\sin(\pi\nu)}\right\}. \qquad (60)$$

Используя рекуррентную формулу (6) для разности модифицированных функций Бесселя первого рода и функциональное соотношение (59), из (60) получаем рекуррентную формулу (7) для разности модифицированных функций Бесселя второго рода:

$$\mathrm{K}_{\nu-1}(z)-\mathrm{K}_{\nu+1}(z)=\frac{\pi}{2}\left\{-\frac{2\nu}{z}\cdot\frac{\mathrm{I}_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}+\frac{2\nu}{z}\cdot\frac{\mathrm{I}_{\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}\right\}=-\frac{2\nu}{z}\mathrm{K}_{\nu}(z).$$

Из формулы (42) также следует:

$$\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{K}_{\nu+1}(z)=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{-\left[\mathrm{I}_{-\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{-\nu+1}(z)\right]+\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(z)+\mathrm{I}_{\nu+1}(z)\right]}{\sin(\pi\nu)}\right\}. \qquad (61)$$

Используя рекуррентную формулу (6) для суммы модифицированных функций Бесселя первого рода и функциональное соотношение (59), из (61) получаем рекуррентную формулу (4б) для суммы модифицированных функций Бесселя второго рода:

$$\mathrm{K}_{\nu-1}(z)+\mathrm{K}_{\nu+1}(z)=\frac{\pi}{2}\left\{-2\frac{\mathrm{I}'_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}+2\frac{\mathrm{I}'_{\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}\right\}=-2\mathrm{K}'_{\nu}(z).$$

Разработанная методика вывода рекуррентных формул для цилиндрических функций из дифференциальных уравнений может стать основой для установления неизвестных в настоящее время рекуррентных соотношений для ряда других специальных функций, в частности, для функций Матье (угловых $\mathrm{Se},\mathrm{o}_r(s,\eta)$, радиальных $\mathrm{Je},\mathrm{o}_r(s,\xi)$, $\mathrm{Ne},\mathrm{o}_r(s,\xi)$, радиальных модифицированных $\mathrm{Ie},\mathrm{o}_r(s,\xi)$, $\mathrm{Ke},\mathrm{o}_r(s,\xi)$).

Библиографический список

1. **Розетт, Т.А.** Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике / Т.А. Розетт. – М.: Сов.радио, 1956. – 224 с.
2. **Коренев, Б.Г.** Введение в теорию беселевых функций / Б.Г. Коренев. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
3. **Ватсон, Г.Н.** Теория бесселевых функций: в 2 ч. [пер. со 2-го англ. изд.] / Г.Н. Ватсон. – М.: ИЛ, 1949. – 752 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовича, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Дата поступления
в редакцию 28.01.2011

Y.A. Ilarionov, A.I. Ermolaev

DERIVATION OF RECURRENCE RELATIONS FROM DIFFERENTIAL EQUATIONS

Te article descries the derivation procedure for recurrence formulas of cylindrical Bessel functions of first, second, third types and modified Bessel functions of first and second types directly from their differential equations.

Key words: cylindrical functions, complex argument, modified Bessel functions, recurrence formulas, arbitrary index.