

УДК 681.3.513

Е.А. Никулин

НОВЫЙ МЕТОД ИЗМЕНЕНИЯ ПОРЯДКОВ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗЬЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Предлагается новый метод изменения порядков полиномов кривых и поверхностей Безье, сводящийся к единой формуле как для увеличения, так и уменьшения размерностей характеристической сети.

Ключевые слова: кривая, поверхность, Безье, полином, узловая сеть.

Широкое распространение в практике конструирования сложных линий и поверхностей получили линии и поверхности Безье, обладающие большой гибкостью, простотой модификации и свойством принадлежности выпуклой оболочке массива узловых точек. Одной из важных операций модификации объекта Безье является изменение числа точек, определяющих его конфигурацию. Увеличение этого числа позволяет повысить гибкость объекта, а уменьшение без изменения формы объекта – понизить сложность его модели и трудоемкость ее использования.

1. Изменение порядка линии Безье

Начнем рассмотрение проблемы с однопараметрической векторной модели *линии Безье*, описываемой в пространстве R^r размерности $r \in \{2, 3\}$ следующими разложениями:

- по узловым точкам $\mathbf{u}_0 \div \mathbf{u}_n \in R^r$, составляющим матрицу $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n] \in R^{r \times (n+1)}$:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n b_{ni}(t) \mathbf{u}_i = \mathbf{U}_n \mathbf{B}_n(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1)$$

где $b_{ni}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ — весовые функции базиса Бернштейна, составляющие вектор-столбец $\mathbf{B}_n(t) = [b_{n0}(t) \ b_{n1}(t) \ \dots \ b_{nn}(t)]^T$;

- по базисным функциям параметра, составляющим вектор-столбец $\mathbf{T}_n(t) = [1 \ t \ \dots \ t^n]^T$:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{s}_i t^i = \mathbf{S}_n \mathbf{T}_n(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad (2)$$

где $\mathbf{S}_n = [\mathbf{s}_0 \ \mathbf{s}_1 \ \dots \ \mathbf{s}_n] \in R^{r \times (n+1)}$ — матрица параметрических коэффициентов $\mathbf{s}_0 \div \mathbf{s}_n \in R^r$;

- по узловым точкам и базисным функциям параметра:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n h_{ij} \mathbf{u}_i t^j = \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n \mathbf{T}_n(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad (3)$$

где $\mathbf{H}_n \in R^{(n+1) \times (n+1)}$ — верхняя треугольная матрица весовых коэффициентов

$$h_{ij} = (-1)^{j-i} C_n^j C_n^i \quad \forall 0 \leq i \leq j \leq n, \quad (4)$$

связанная с вектором $\mathbf{B}_n(t)$ и матрицей \mathbf{S}_n следующими соотношениями:

$$\mathbf{B}_n(t) = \mathbf{H}_n \mathbf{T}_n(t), \quad \mathbf{S}_n = \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n. \quad (5)$$

Модификация характеристической полилинии (ХП) $\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$ означает проведение операций с ее вершинами: перемещения имеющихся, *добавления* новых и *удаления* лишних. После каждой операции кривая Безье перестраивается по (1). Если перенос узловой точки не

вызывает затруднений (это можно сделать ручным вводом ее координат или вектора переноса, либо захватом и перетаскиванием мышью), то добавление или удаление вершин ХП влечет изменение порядка полинома до $n' \neq n$ и новые размер и состав узловой матрицы $\mathbf{U}'_{n'}$.

Несомненный научный интерес представляет такое изменение порядка линии Безье, при котором ее форма остается неизменной, т. е. $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)$. В литературе по компьютерной геометрии и графике дается решение лишь одной из двух названных задач изменения порядка — только *увеличения* и только на единицу, т. е. $n' = n + 1$. В [1] предлагается умножить сумму (1) на тождество $(t + 1 - t) \equiv 1$, формально инкрементирующее степень полинома, и привести слагаемые к виду с весовыми функциями $n + 1$ -й степени $C_{n+1}^i t^i (1-t)^{n+1-i}$, $i \in [0, n + 1]$. В результате не совсем простых преобразований получается следующий алгоритм инкрементирования размера характеристической полилинии:

$$\mathbf{u}'_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{u}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{u}_i \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}_n. \quad (6)$$

В [2] этот же результат приведен без вывода. Но ни в одном из этих уважаемых источников не исследованы свойства полученной линии $\mathbf{p}'(t)$.

Ключевым моментом разрабатываемого нового алгоритма является тот факт, что *реальная* степень полинома $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{s}'_0 + \mathbf{s}'_1 t + \dots + \mathbf{s}'_{n+1} t^{n+1}$, повторяющего форму полинома (2), равна n , а не $n + 1$, так же, как, например, реальная степень полинома $1 + 2t + 0t^2$ равна одному, а не формально двум. Действительно, нулевая разность векторных полиномов $\mathbf{p}'(t) - \mathbf{p}(t)$, равная

$$(\mathbf{s}'_0 - \mathbf{s}_0) + (\mathbf{s}'_1 - \mathbf{s}_1)t + \dots + (\mathbf{s}'_n - \mathbf{s}_n)t^n + \mathbf{s}'_{n+1}t^{n+1} = \mathbf{O}_{r,1}$$

на всем непрерывном интервале $t \in [0, 1]$, возможна лишь при $\mathbf{s}'_i = \mathbf{s}_i \quad \forall i \in [0, n]$ и $\mathbf{s}'_{n+1} = \mathbf{O}_{r,1}$.

Здесь и далее $\mathbf{O}_{M,N}$ обозначает нулевую $M \times N$ -матрицу. Таким образом, связав векторы параметрических коэффициентов $\mathbf{S}_n = \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n$ и $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{U}'_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}$ зависимостью $\mathbf{S}_{n+1} = [\mathbf{S}_n \quad \mathbf{O}_{r,1}]$ и вычислив по (4) невырожденные матрицы весовых коэффициентов \mathbf{H}_n и \mathbf{H}_{n+1} , получим вектор вершин новой характеристической полилинии размера $n + 1$:

$$\mathbf{U}'_{n+1} = [\mathbf{U}_n \mathbf{H}_n \quad \mathbf{O}_{r,1}] \mathbf{H}_{n+1}^{-1} = \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n \mathbf{K}_{n,n+1}, \quad (7)$$

где $\mathbf{K}_{n,n+1} = \mathbf{E}_{n+1,n+2} \mathbf{H}_{n+1}^{-1}$ — верхний $(n + 1) \times (n + 2)$ -блок матрицы \mathbf{H}_{n+1}^{-1} . Здесь и далее $\mathbf{E}_{M,N}$ обозначает $M \times N$ -матрицу нулей с $\min\{M, N\}$ единицами на главной диагонали.

Простота полученного матричного решения несравнима с трудоемким в выводе и относительно сложным в программировании циклическим алгоритмом (6). А естественное обобщение формулы (7) на характеристическую полилинию *произвольного* размера $n' > n$:

$$\mathbf{U}'_{n'} = [\mathbf{U}_n \mathbf{H}_n \quad \mathbf{O}_{r,n'-n}] \mathbf{H}_{n'}^{-1} = \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n \mathbf{K}_{n,n'}, \quad (8)$$

где $\mathbf{K}_{n,n'} = \mathbf{E}_{n+1,n'+1} \mathbf{H}_{n'}^{-1}$, способное увеличить порядок линии Безье сразу на $n' - n \geq 2$ единиц, вообще нигде не рассматривалось, хотя можно было потрудиться и получить аналогичный (6) алгоритм путем умножения (1) на $(t+1-t)^{n'-n}$ и сборки слагаемых с весовыми функциями $C_{n'}^i t^i (1-t)^{n'-i}$.

Пример 1. Проиллюстрируем работу методов (7), (8) увеличения порядка линии Безье без изменения ее формы на трех задачах.

1. Преобразуем по (7) двухзвенную ХП $\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2$ в трехзвенную $\mathbf{u}'_0 \mathbf{u}'_1 \mathbf{u}'_2 \mathbf{u}'_3$ (рис. 1, а) с помощью матриц \mathbf{H}_2 и \mathbf{H}_3 , элементы которых вычислены по (4):

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 \mathbf{K}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}'_0 \ \mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3] = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \mathbf{H}_2 \mathbf{K}_{2,3},$$

$$\mathbf{u}'_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{1}{3} \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}'_2 = \frac{2}{3} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}'_3 = \mathbf{u}_2.$$

2. Преобразование по (7) трехзвенной ХП $\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3$ в четырехзвенную $\mathbf{u}'_0 \mathbf{u}'_1 \mathbf{u}'_2 \mathbf{u}'_3 \mathbf{u}'_4$ (рис. 1, б) выполним с помощью матриц \mathbf{H}_3 и \mathbf{H}_4 :

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_3 \mathbf{K}_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}'_0 \ \mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3 \ \mathbf{u}'_4] = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \mathbf{H}_3 \mathbf{K}_{3,4},$$

$$\mathbf{u}'_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{1}{4} \mathbf{u}_0 + \frac{3}{4} \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}'_2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}'_3 = \frac{3}{4} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{4} \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}'_4 = \mathbf{u}_3.$$

Результаты решения обеих задач полностью совпадают с (6).

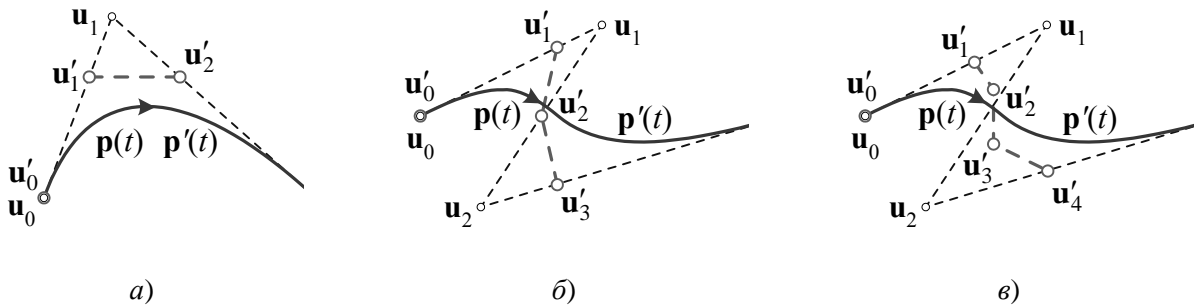


Рис. 1. Увеличение порядков кривых Безье

3. Создадим по (8) пятизвенную ХП $\mathbf{u}'_0 \mathbf{u}'_1 \mathbf{u}'_2 \mathbf{u}'_3 \mathbf{u}'_4 \mathbf{u}'_5$ из трехзвенной $\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3$ (рис. 1, в) с помощью матрицы \mathbf{H}_5 :

$$\mathbf{H}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -20 & 30 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -30 & 30 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{3,5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_3 \mathbf{K}_{3,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}'_0 \ \mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3 \ \mathbf{u}'_4 \ \mathbf{u}'_5] = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \mathbf{H}_3 \mathbf{K}_{3,5},$$

$$\mathbf{u}'_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{4\mathbf{u}_0 + 6\mathbf{u}_1}{10}, \quad \mathbf{u}'_2 = \frac{\mathbf{u}_0 + 6\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2}{10}, \quad \mathbf{u}'_3 = \frac{3\mathbf{u}_1 + 6\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3}{10}, \quad \mathbf{u}'_4 = \frac{6\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3}{10},$$

$$\mathbf{u}'_5 = \mathbf{u}_3.$$

Вот так вместо двух преобразований, поочередно выполняемых по (6), сразу создается шеститочечная характеристическая полилиния.

Операция *удаления* лишней вершины из полилинии $\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1\dots\mathbf{u}_n$, состоящей из $n > 1$ отрезков, производится для уменьшения ее избыточного размера и исключения характеристических точек, слабо влияющих на форму линии Безье. Наименьшим влиянием обладает срединная точка \mathbf{u}_m с округленным до ближайшего целого числа номером $m = \langle n/2 \rangle$ (при нечетном n таких точек две — с номерами $\lfloor n/2 \rfloor$ и $\lceil n/2 \rceil$). Ее вес не превышает величины $b_{nm}(m/n)$, стремящейся к нулю при больших значениях n . Таким образом, центральные точки многозвенных ХП можно удалять почти безболезненно для формы линии Безье, которая в результате этой операции все же *изменяется*.

Возможность понижения порядка линии Безье *без изменения ее формы* определяется *реальной* степенью полинома n' , которая должна быть *меньше* формальной степени n , задаваемой числом звеньев ХП $\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1\dots\mathbf{u}_n$. Примеры различия этих степеней дают совпадающие линии $p(t)=p'(t)$ на рис. 1, построенные на ХП разных размеров. Назовем разность формальной и реальной степеней полинома *дефектом степени* $d=n-n'$.

Дефект степени полинома равен числу нуль-векторных полиномиальных коэффициентов $\mathbf{s}_{n'+1}=\dots=\mathbf{s}_n=\mathbf{O}_{r,1}$ на правом конце матрицы $\mathbf{S}_n=\mathbf{U}_n\mathbf{H}_n$. Если расположение характеристических точек $\mathbf{u}_0 \div \mathbf{u}_n$ таково, что дефект степени $d > 0$, то *минимальная* ХП $\mathbf{u}'_0\mathbf{u}'_1\dots\mathbf{u}'_{n'}$ состоит из $n'=n-d$ звеньев, а $n'+1$ ее вершин находятся из уравнения $\mathbf{U}_n\mathbf{H}_n=[\mathbf{U}'_{n'}\mathbf{H}'_{n'} \quad \mathbf{O}_{r,d}]$ с использованием матрицы $\mathbf{G}_{n,n'}=\mathbf{H}_n\mathbf{E}_{n+1,n'+1}$ — левого $(n+1)\times(n'+1)$ -блока матрицы \mathbf{H}_n :

$$\mathbf{U}'_{n'}=\mathbf{U}_n\mathbf{G}_{n,n'}\mathbf{H}'_{n'}{}^{-1}. \quad (9)$$

Пример 2. Линия Безье пятого порядка построена на ХП с вершинами $\mathbf{u}_0=[10 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_1=[22 \ 6]^T$, $\mathbf{u}_2=[19 \ 12]^T$, $\mathbf{u}_3=[11 \ 15]^T$, $\mathbf{u}_4=[8 \ 12]^T$ и $\mathbf{u}_5=[20 \ 0]^T$ (рис. 2). Найти реальную степень полинома и построить характеристическую полилинию минимального порядка.

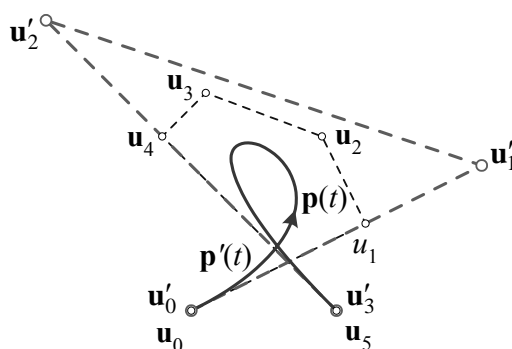


Рис. 2. Уменьшение порядка кривой Безье

Решение. С помощью матрицы \mathbf{H}_5 из *примера 1* вычислим матрицу полиномиальных коэффициентов кривой Безье:

$$\mathbf{S}_5=\mathbf{U}_5\mathbf{H}_5=\begin{bmatrix} 10 & 60 & -150 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & -30 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Два правых нулевых столбца $\mathbf{s}_4=\mathbf{s}_5=\mathbf{O}_{2,1}$ дают дефект степени полинома $d=2$ и его реальную степень $n'=3$. По (9) находим характеристические точки *кубической* кривой Безье, полностью совпадающей с исходной линией формально пятого порядка:

$$\mathbf{G}_{5,3}=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 5 & -20 & 30 \\ 0 & 0 & 10 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{5,3}\mathbf{H}_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1 & -4 \\ 0 & 5/3 & -10/3 & 15 \\ 0 & 0 & 10/3 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{u}'_0 \ \mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3] = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4 \ \mathbf{u}_5] \mathbf{G}_{5,3} \mathbf{H}_3^{-1},$$

$$\mathbf{u}'_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{5\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_0}{3} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \frac{10\mathbf{u}_2 - 10\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0}{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_3 = \frac{10\mathbf{u}_3 - 20\mathbf{u}_2 + 15\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_0}{3} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Алгоритмы увеличения (8) и уменьшения (9) порядка характеристической полилинии кривой Безье сливаются в **единый алгоритм** изменения ее порядка с n до n' :

$$\mathbf{U}'_{n'} = \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n \mathbf{E}_{n+1, n'+1} \mathbf{H}_{n'}^{-1}. \tag{10}$$

Повышение порядка линии Безье возможно до *произвольного* формального значения $n' > n$, при этом реальная степень полинома остается равной n . Понижение порядка до реального значения $n' < n$ возможно лишь при наличии у полинома дефекта степени $d = n - n' > 0$, равного числу правых нулевых столбцов матрицы $\mathbf{S}_n = \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n$.

2. Изменение порядков поверхности Безье

Распространим линейный алгоритм (10) на изменение порядков n и m двухпараметрического полинома *поверхности Безье* в пространстве \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{p}(t, \tau) = \mathbf{B}_n^T(t) \mathbf{U}_{n,m} \mathbf{B}_m(\tau) = \mathbf{T}_n^T(t) \mathbf{S}_{n,m} \mathbf{T}_m(\tau) = \mathbf{T}_n^T(t) \mathbf{H}_n^T \mathbf{U}_{n,m} \mathbf{H}_m \mathbf{T}_m(\tau) \quad \forall t, \tau \in [0, 1], \tag{11}$$

строящейся на характеристической полигональной сети (ХПС) $\mathbf{U}_{n,m} = \{\mathbf{u}_{ij}\}$. Сеть составлена из узловых точек \mathbf{u}_{ij} , пронумерованных индексами $i \in [0, n]$ и $j \in [0, m]$ в порядке соединения вершин ребрами. Аналогично (5) элементы разложений (11) связаны соотношениями

$$\mathbf{B}_n(t) = \mathbf{H}_n \mathbf{T}_n(t), \quad \mathbf{B}_m(\tau) = \mathbf{H}_m \mathbf{T}_m(\tau), \quad \mathbf{S}_{n,m} = \mathbf{H}_n^T \mathbf{U}_{n,m} \mathbf{H}_m. \tag{12}$$

На рис. 3 показано несколько поверхностей, построенных по (11). Им присущи все свойства объектов Безье, подробно рассмотренные в [1 – 3].

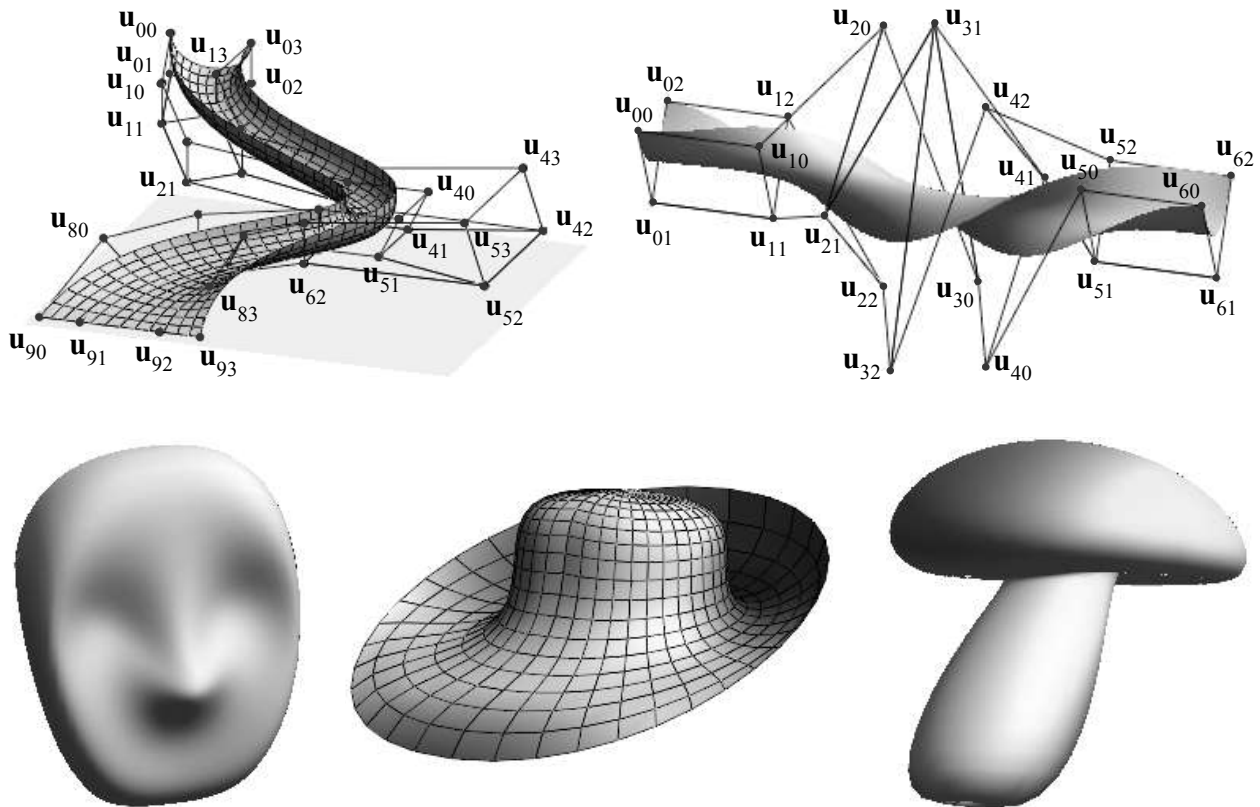


Рис. 3. Поверхности Безье

Операции добавления и удаления узловых вершин изменяют размеры сети и степени n и m двухпараметрического полинома $\mathbf{p}(t, \tau)$. В отличие от кривой Безье, в ХПС одноименной поверхности добавляются или удаляются не отдельные вершины, а только целые полилинии $\mathbf{u}_{0k}\mathbf{u}_{1k} \dots \mathbf{u}_{nk}$ и/или $\mathbf{u}_{k0}\mathbf{u}_{k1} \dots \mathbf{u}_{km}$ в параметрических направлениях t и/или τ . В результате в новой сети $\mathbf{U}'_{n',m'} = \{\mathbf{u}'_{ij}\}$ с узловыми размерностями $(n'+1) \times (m'+1)$ перераспределяется влияние вершин на значения функции

$$\mathbf{p}'(t, \tau) = \sum_{i=0}^{n'} \sum_{j=0}^{m'} b_{n'i}(t) b_{m'j}(\tau) \mathbf{u}'_{ij} = \mathbf{B}_{n'}^T(t) \mathbf{U}'_{n',m'} \mathbf{B}_{m'}(\tau) \quad \forall t, \tau \in [0, 1]. \quad (13)$$

Рассмотрим два способа изменения размеров характеристической сети, отличающиеся изменчивостью формы поверхности Безье.

1. В *ручном* режиме добавление новых или удаление лишних полилиний ХПС приводит к перенумерации ее вершин и перестройке поверхности по (13), поскольку при новых степенях $n \neq n'$ и $m \neq m'$ ее определяют уже другие весовые функции Бернштейна $b_{n'i}(t)$ и $b_{m'j}(\tau)$.

Таким образом, **ручное изменение порядков характеристической полигональной сети изменяет форму поверхности Безье**. На рис. 4 показано, как это выглядит для второй поверхности из рис. 3 при добавлении в ее ХПС новой полилинии $\mathbf{u}'_{60}\mathbf{u}'_{61}\mathbf{u}'_{62}$ и удалении средней полилинии $\mathbf{u}_{30}\mathbf{u}_{31}\mathbf{u}_{32}$.

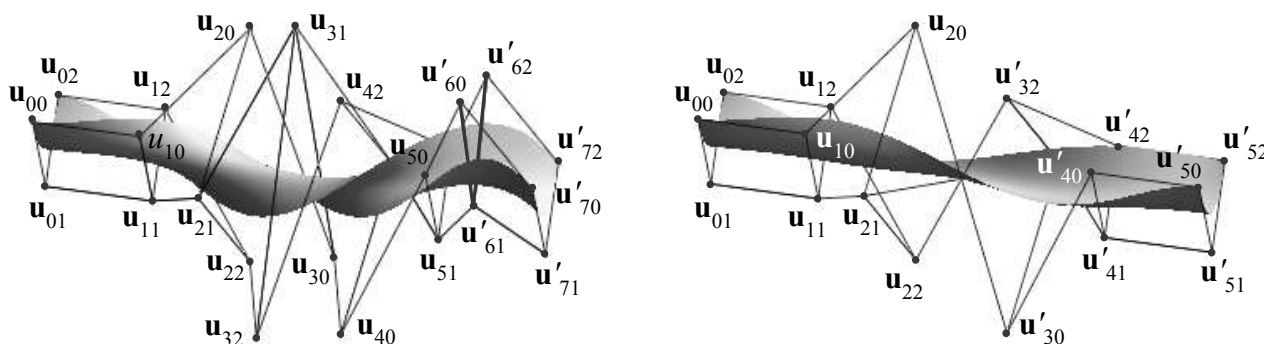


Рис. 4. Ручное изменение порядков поверхности Безье

2. В интерактивном проектировании более удобно *алгоритмическое* изменение размеров ХПС, при котором происходит перераспределение ее вершин с *сохранением формы* поверхности Безье. Это позволяет быстро получить новую характеристическую сеть желаемых размерностей и продолжить ее дальнейшее редактирование, плавно и предсказуемо конструируя требуемую поверхность.

Новая конфигурация ХПС находится из условия совпадения старой (11) и новой (13) моделей $\mathbf{p}(t, \tau) = \mathbf{p}'(t, \tau)$:

$$\mathbf{T}_{n'}^T(t) \mathbf{H}_{n'}^T \mathbf{U}'_{n',m'} \mathbf{H}_{m'} \mathbf{T}_{m'}(\tau) = \mathbf{T}_n^T(t) \mathbf{H}_n^T \mathbf{U}_{n,m} \mathbf{H}_m \mathbf{T}_m(\tau).$$

Этому уравнению удовлетворяет поверхностное решение

$$\mathbf{U}'_{n',m'} = (\mathbf{H}_n \mathbf{E}_{n+1,n'+1} \mathbf{H}_{n'}^{-1})^T \mathbf{U}_{n,m} (\mathbf{H}_m \mathbf{E}_{m+1,m'+1} \mathbf{H}_{m'}^{-1}), \quad (14)$$

обобщающее линейный аналог (10) сразу на обе задачи — как добавление характеристических полилиний, так и их удаление. По (14) может быть найдена ХПС с увеличенной размер-

ностью в одном параметрическом направлении и с уменьшенной — в другом, например, с $n' > n$ и $m' < m$. Более того, изложенный метод дает решения восьми задач изменения размерностей ХПС во всех возможных сочетаниях порядков $n' < n$, $n' = n$, $n' > n$ и $m' < m$, $m' = m$, $m' > m$.

Увеличение порядков характеристической сети n и/или m на $d = n' - n > 0$ и/или $\delta = m' - m > 0$ возможно всегда. При этом матрицы полиномиальных коэффициентов

$$\mathbf{S}'_{n',m} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{n,m} \\ \mathbf{O}_{d,m+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}'_{n,m'} = [\mathbf{s}_{n,m} \mid \mathbf{O}_{n+1,\delta}], \quad \mathbf{S}'_{n',m'} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{n,m} & \mathbf{O}_{n+1,\delta} \\ \mathbf{O}_{d,m+1} & \mathbf{O}_{d,\delta} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

вычисляемые на новой сетке \mathbf{U}' по формуле $\mathbf{S}'_{n',m'} = \mathbf{H}_n^T \mathbf{U}'_{n',m'} \mathbf{H}_{m'}$, содержат d нулевых строк и/или δ нулевых столбцов. Это означает, что реальные порядки биполиномиальной функции $\mathbf{p}'(t, \tau)$ остались равными n и m .

Уменьшение размеров характеристической сети на $d = n - n' > 0$ и/или $\delta = m - m' > 0$ возможно не всегда, а лишь при условии, что реальные порядки поверхности $\mathbf{p}(t, \tau)$, зависящие от расположения вершин ее ХПС, меньше формальных, т. е. $n' < n$ и/или $m' < m$. Дефекты степеней d и δ равны числам нулевых строк и столбцов в матрице полиномиальных коэффициентов $\mathbf{S}_{n,m} = \mathbf{H}_n^T \mathbf{U}_{n,m} \mathbf{H}_m$, принимающей одну из следующих форм:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}'_{n',m} \\ \mathbf{O}_{d,m+1} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{s}_{n,m'} \mid \mathbf{O}_{n+1,\delta}], \quad \begin{bmatrix} \mathbf{S}'_{n',m'} & \mathbf{O}_{n'+1,\delta} \\ \mathbf{O}_{d,m+1} & \mathbf{O}_{d,\delta} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

В отсутствие нулевых строк и столбцов понижение порядков ХПС невозможно.

Работа алгоритма изменения размерностей ХПС проиллюстрирована на рис. 5. Исходная поверхность (рис. 5, а) порядков $n = 4$ и $m = 3$ построена на сетке $\mathbf{U}_{4,3}$ из 5×4 узлов и имеет в (16) матрицу $\mathbf{S}_{4,3}$ первого типа, содержащую одну нижнюю нулевую строку. Значит, дефект степени равен $d = 1$, а реальный t -порядок полинома $\mathbf{p}(t, \tau)$ составляет $n' = n - d = 3$. Это подтверждает поверхность (рис. 5, б), построенная на сетке $\mathbf{U}'_{3,3}$ узловой размерности 4×4 . Третья поверхность (рис. 5, в) демонстрирует возможность одновременного понижения t -порядка до реального $n' = 3$ и формального повышения τ -порядка до формального $m' = 6$.

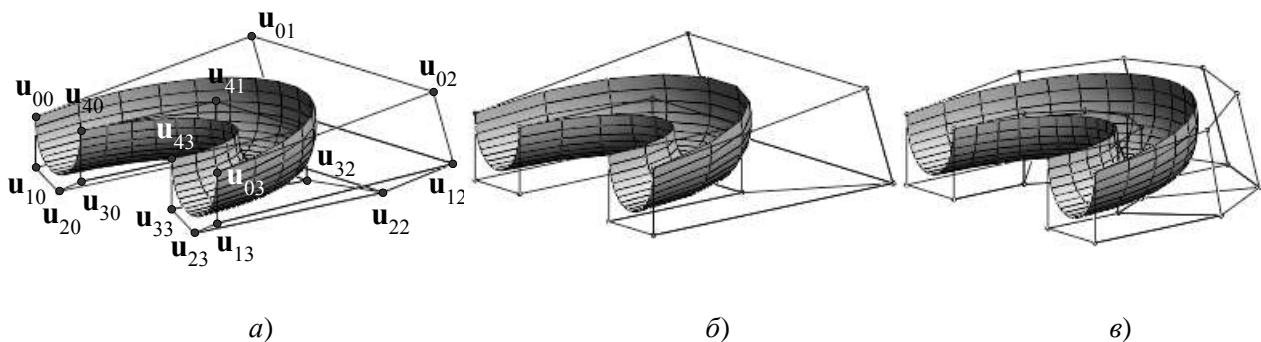


Рис. 5. Алгоритмическое изменение порядков поверхности Бэзье

Вывод

В результате предпринятых усилий разработан новый единый алгоритм произвольного изменения порядков линий и поверхностей Бэзье. Получены условия, при которых становится возможным понижение порядков полиномов этих графических объектов.

Библиографический список

1. Компьютерная геометрия: учеб. пособие для студ. вузов / Н.Н. Голованов [и др.]. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 512 с.
2. **Роджерс, Д.** Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
3. **Фокс, А.** Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

*Дата поступления
в редакцию 01.02.2011*

E.A Nikulin

**NEW METHOD OF BÉZIER CURVES AND SURFACES
ORDER MODIFICATION**

Proposing a new method to modify an order of polynoms for Bézier curves and surfaces which reduces to a single formula for both increasing and decreasing of a characteristic grid dimension.

Key words: curve, surface, Bézier, polynom, meshed network.