УДК 532.59.032

А.А. Абрашкин, Ю.П. Бодунова

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Нижегородский государственный педагогический университет

Построено решение для стоячих пространственных линейных гравитационно-капиллярных волн на поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости. Используются лагранжевые координаты. Дан качественный анализ дисперсионного уравнения. Движение жидких частиц изучены в длинноволновом приближении. Найдены выражения для компонент завихренности.

Ключевые слова: волны на воде, вязкая жидкость, завихренность, переменные Лагранжа.

Изучение влияния вязкости на распространение поверхностных волн традиционно ограничивается рассмотрением плоских (двумерных) волн [1, 2]. Эффекты, связанные с учетом поперечной модуляции профиля волны, до настоящего времени не исследовались.

Отличительная особенность исследования эволюции поверхностных волн в вязкой жидкости состоит в том, что толщина пограничного слоя вблизи свободной поверхности может быть мала по сравнению с амплитудой волны. Вследствие этого ставить поверхностные граничные условия на уровне $y=0$ (y - вертикальная декартовая координата) не представляется удовлетворительным. Лучшим вариантом является выбор системы отсчета, движущейся с волной, и использование ортогональной криволинейной координатной системы, в которой свободная поверхность является координатной поверхностью. При эйлеровом описании течения ее вид неизвестен, поэтому при изучении двумерных линейных волн граничные условия формулируются на плоской поверхности $y=0$, а при рассмотрении квадратичных эффектов на синусоидальной поверхности, соответствующем профилю линейной волны [2, 4, 5]. Анализ эффектов в третьем приближении по малой крутизне волны предполагает знание профиля во втором порядке теории возмущений и т.д. Изучение пространственных волн при таком подходе представляется нереальным ввиду значительного объема требуемых вычислений.

Все эти трудности, однако, отсутствуют при лагранжевом описании волнового движения. Форма свободной поверхности при таком подходе задается условием $b=0$, где b - вертикальная лагранжевая координата. Оно не зависит ни от порядка теории возмущений, ни от размерности задачи. В рамках лагранжевого подхода в работах [6, 7] выполнен ряд расчетов для двумерных поверхностных волн. В частности, выяснено влияние на дрейфовое течение в жидкости движения воздуха, вращения Земли [6] и упругих пленок на свободной поверхности [7]. Ниже построено и проанализировано решение для линейных пространственных стоячих волн в бесконечно глубокой жидкости.

Постановка задачи

Рассмотрим пространственную стоячую гравитационно-капиллярную волну в бесконечно глубокой, вязкой жидкости. Движение будем описывать в лагранжевых координатах a, b, c. Система уравнений гидродинамики в этих переменных имеет следующий вид [8]:

$$\left[X, Y, Z\right] = \frac{D(X, Y, Z)}{D(a, b, c)} = 1; \qquad (1)$$

$$X_{tt} = -\frac{1}{\rho}[Y,Z,p] + +\nu\{[Y,Z,[Y,Z,X_t]] + [Z,X,[Z,X,X_t]] + [X,Y,[X,Y,X_t]]\};$$

$$Y_{tt} = g - \frac{1}{\rho}[Z,X,p] + \nu\{[Y,Z,[Y,Z,Y_t]] + [Z,X,[Z,X,Y_t]] + [X,Y,[X,Y,X_t]]\}; \qquad (2)$$

$$Z_{tt} = -\frac{1}{\rho}[X,Y,p] + \nu\{[Y,Z,[Y,Z,Z_t]] + [Z,X,[Z,X,Z_t]] + [X,Y,[X,Y,Z_t]]\},$$

$X(a,b,c,t), Y(a,b,c,t), Z(a,b,c,t)$ - координаты траектории жидкой частицы; t - время, квадратные скобки обозначают операцию взятия якобиана по переменным a,b,c; ρ - плотность жидкости; p - давление; ν - вязкость; g - ускорение свободного падения (ось y направлена вертикально). Уравнение непрерывности (1) отражает то обстоятельство, что в начальный момент координаты жидких частиц равны соответственно a,b,c.

Систему уравнений (1), (2) следует дополнить граничными условиями. В случае свободных волн на бесконечно глубокой воде это требование непротекания на дне - $Y_t = 0$ при $b = -\infty$, и условие отсутствия вязких напряжений на свободной поверхности, которое можно записать так:

$$T_{ik} n_k = (-p_0 + \sigma K) n_i; \qquad b = 0;$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_0(Y_a Z_c - Y_c Z_a) + \vec{y}_0(Z_a X_c - X_a Z_c) + \vec{z}_0(X_a Y_c - X_c Y_a)}{\sqrt{(Y_a Z_c - Y_c Z_a)^2 + (Z_a X_c - X_a Z_c)^2 + (X_a Y_c - X_c Y_a)^2}}; \qquad (3)$$

$$K = \frac{Y_{aa}(1+Y_c^2) - 2Y_a Y_c Y_{ca} + Y_{cc}(1+Y_a^2)}{\left(1+Y_a^2+Y_c^2\right)^{3/2}},$$

где T_{ik} - тензор вязких напряжений; p_0 - постоянное внешнее давление; σ - коэффициент поверхностного натяжения, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к свободной поверхности $Y = Y(a,0,c)$; K - ее средняя кривизна. Выражения для компонент тензора T_{ik} получаются, если их представление в эйлеровых координатах записать в якобианной форме, затем перейти к новым переменным (по правилу “перемножения” якобианов) и учесть уравнение (1):

$$T_{xx} = -p + 2\nu\rho[X_t, Y, Z];$$

$$T_{yy} = -p - 2\nu\rho[Y_t, X, Z];$$

$$T_{zz} = -p - 2\nu\rho[Z_t, Y, X];$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \nu\rho([Y_t, Y, Z] - [X_t, X, Z]);$$

$$T_{xz} = T_{zx} = \nu\rho([Z_t, Y, Z] - [X_t, Y, X]);$$

$$T_{yz} = T_{zy} = \nu\rho([Y_t, X, Y] - [Z_t, X, Z]).$$

Представим все входящие в уравнения движения функции в виде ряда по малому параметру крутизны волны $\varepsilon = kA$, k - волновое число, A - амплитуда волны:

$$X = a + \varepsilon\xi_1 + O(\varepsilon^2); \quad Y = b + \varepsilon\eta_1 + O(\varepsilon^2);$$

$$Z = c + \varepsilon\zeta_1 + O(\varepsilon^2); \quad p = p_0 - \rho g b + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2).$$

Подстановка этих соотношений в систему (2),(3) даст искомые уравнения для неизвестных функций.

Линейные волны

Система уравнений в первом порядке по малой крутизне волны имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\xi_{1a}+\eta_{1b}+\zeta_{1c}=0;\\
&\xi_{1tt}=-\rho^{-1}p_{1a}-g\eta_{1a}+\nu\Delta\xi_{1t};\\
&\eta_{1tt}=-\rho^{-1}p_{1b}-g\eta_{1b}+\nu\Delta\eta_{1t};\\
&\zeta_{1tt}=-\rho^{-1}p_{1c}-g\eta_{1c}+\nu\Delta\zeta_{1t},
\end{aligned}\qquad(4)$$

где Δ - лапласиан по переменным Лагранжа. Граничные условия для нее на свободной поверхности ($b=0$) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\eta_{1ta}+\xi_{1tb}=0;\\
&\eta_{1tc}+\zeta_{1tb}=0;\\
&-p_1+2\nu\rho\eta_{1tb}=\sigma(\eta_{1aa}+\eta_{1cc}).
\end{aligned}\qquad(5)$$

Будем искать решение методом разделения переменных, полагая

$$\begin{aligned}
&\xi_1=\operatorname{Re}A(b)e^{nt}\sin ka\cos mc;\\
&\eta_1=\operatorname{Re}B(b)e^{nt}\cos ka\cos mc;\\
&\zeta_1=\operatorname{Re}C(b)e^{nt}\cos ka\sin mc;\\
&p_1=\operatorname{Re}H(b)e^{nt}\cos ka\cos mc.
\end{aligned}\qquad(6)$$

Функции A,B,C,H и постоянная n считаются комплексными. Проводя несложные алгебраические выкладки, придем к уравнению для функции A:

$$A^{IV}-\left[2\left(k^2+m^2\right)+\frac{n}{\nu}\right]A''+\left(k^2+m^2\right)\left(k^2+m^2+\frac{n}{\nu}\right)A=0.$$

Полагая $A=\exp lb$, получим для l биквадратное уравнение, решением которого будут соотношения

$$l_1^2=k^2+m^2=M^2;\quad l_2^2=k^2+m^2+\frac{n}{\nu}=N^2.$$

Волновые возмущения должны спадать по мере погружения вглубь (при $b\to-\infty$), поэтому функцию A следует выбрать в таком виде:

$$A=\alpha e^{Mb}+\beta e^{Nb};\quad M,\operatorname{Re}N>0.\qquad(7)$$

Выражения для функций B,C,H находятся из системы (4) и выглядят так:

$$\begin{aligned}
&B=-\frac{M}{k}\alpha e^{Mb}+\delta e^{Nb};\quad C=\frac{m}{k}\alpha e^{Mb}+\mathrm{R}e^{Nb};\\
&H=\frac{\rho}{k}(gM+n^2)\alpha e^{Mb}-\rho g\delta e^{Nb},
\end{aligned}\qquad(8)$$

α,β,δ,R - комплексные постоянные, удовлетворяющие условию

$$k\beta+N\delta+mR=0,\qquad(9)$$

которое является следствием уравнения непрерывности (1). Для определения конкретного вида этих постоянных подставим выражения (7), (8) в граничные условия (5). В итоге получим три уравнения для определения четырех постоянных:

$$2M\alpha + N\beta - k\delta = 0;$$

$$2M\frac{m}{k}\alpha + NR - m\delta = 0;$$

$$\frac{1}{k}\left[n^2 + 2\nu nM^2 + gM + \rho^{-1}\sigma M^3\right]\alpha - \left[g + 2\nu nN + \rho^{-1}\sigma M^2\right]\delta = 0.$$

С учетом соотношения (9) условие совместности этой системы запишется так:

$$(n + 2\nu M^2)^2 + (gM + \rho^{-1}\sigma M^3) = 4\nu^2 M^3 N. \qquad (10)$$

Введем обозначения

$$\omega^2 = gM + \rho^{-1}\sigma M^3; \quad \frac{\nu M^2}{\omega} = \theta; \quad n + 2\nu M^2 = s\omega, \qquad (11)$$

с их учетом выражение (10) можно свести к следующему уравнению

$$(s^2 + 1)^2 = 16\theta^3(s - \theta). \qquad (12)$$

Оно совпадает с уравнением для плоских поверхностных волн в вязкой жидкости, только роль волнового числа в двумерной волне теперь играет величина полного волнового числа $M = \sqrt{k^2 + m^2}$, где k - продольное волновое число, а m - поперечное (пространственный период модуляции). Значение $m = 0$ отвечает плоской волне. Выражение для параметра ω совпадает с частотой гравитационно-капиллярных волн, распространяющихся по поверхности идеальной жидкости.

Постоянные, входящие в решение для линейных волн, определяются равенствами

$$\beta = -\frac{2MN}{M^2 + N^2}\alpha; \qquad \delta = \frac{2M^3}{k(M^2 + N^2)}\alpha; \qquad R = -\frac{2mMN}{k(M^2 + N^2)}\alpha. \qquad (13)$$

Соотношение (6)-(8), (12), (13) дают полное решение задачи о стоячих пространственных линейных волнах на поверхности вязкой жидкости. Величина α, входящая в выражения для остальных констант, задает амплитуду волны B_0, которая

$$B_0 = |B|\big|_{b=0} = \mathrm{Re}\frac{nM\alpha}{\nu k(M^2 + N^2)}.$$

В качестве параметра крутизны волны ε выступает величина $\varepsilon = MB_0$.

Анализ дисперсионного уравнения

Конкретные значения постоянных (13) находятся по известному решению дисперсионного уравнения (12). Оно дает возможность по заданным значениям вязкости жидкости, частоты ω и волнового числа M, определяющих величину параметра θ, найти величину числа s, а значит, и выражение для n, входящее в решение (6).

Проведем качественный анализ уравнения (12). Графиком функции, задаваемой его левой частью, служит вогнутая кривая с минимумом, равным 1 при $s = 0$. Левая же часть уравнения определяет прямую. Она пересекает ось ординат ниже нуля и имеет положительный угол наклона, тангенс которого равен $16\theta^3$. Две эти линии либо пересекаются (при достаточно большом θ), и тогда уравнение (12) имеет два действительных корня, либо не пересекаются: в этом случае дисперсионное уравнение не имеет действительных корней. Оба действительных корня, как следует из соотношений (10), (11), удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\,N > 0$ (смотри (7)).

Проверим теперь, удовлетворяют ли этому условию комплексные корни уравнения (12). Пусть $s = s_1 + is_2$, где s_1, s_2 - действительные числа. При условии, что $s_2 \neq 0$, уравнение (12) эквивалентно следующей системе:

$$(s_1^2 - s_2^2 + 1)^2 = 4s_1^2 s_2^2 + 16\theta^3(s_1 - \theta); \tag{14}$$

$$s_1(s_1^2 - s_2^2 + 1) = 4\theta^3. \tag{15}$$

Знак величины $\mathrm{Re}\,N$ совпадает со знаком выражения $\mathrm{Re}\left(s^2+1\right) = (s_1^2 - s_2^2 + 1)$, поэтому, исходя из равенства (14) заключаем, что условию $\mathrm{Re}\,N > 0$ соответствуют только корни с положительной реальной частью. С другой стороны, правая часть выражения (14), очевидно, всегда больше нуля. Но это означает, что величина s_1 удовлетворяет условиям

$$s_1 < -2\frac{\theta^3}{s_2^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{s_2^2}{\theta^2}}\right); \quad s_1 > 2\frac{\theta^3}{s_2^2}\left(\sqrt{1 + \frac{s_2^2}{\theta^2}} - 1\right).$$

При наличии только комплексных корней два из них имеют отрицательную реальную часть, а другая пара комплексно сопряженных решений (12) имеет положительную реальную часть. В случае существования пары действительных корней (для них $s_2 = 0, s_1 > 0$) два других комплексных корня соответствуют $s_1 < 0$, а значит, не удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\,N > 0$.

Длинноволновое приближение

Будем рассматривать волновые возмущения, для которых выполняется соотношение

$$M^{-1} >> \sqrt{2\nu/\omega} = \Delta^{-1}. \tag{16}$$

Величина Δ характеризует толщину (очень тонкого) пограничного слоя, а само неравенство (16) отражает тот факт, что длина волны существенно превышает этот характерный масштаб. Из соотношения (16) следует, что $\theta << 1$. При выполнении этого условия в уравнении (12) можно пренебречь правой частью, и его решением будут значения $s = \pm\, i$ или в размерных переменных

$$n = -2\nu M^2 \pm i\omega. \tag{17}$$

Отсюда заключаем, что величина декремента равна $\mathrm{Re}\,n = -2\nu M^2$, а частота колебаний равна частоте гравитационно-капиллярных волн в идеальной жидкости ω. Знак перед частотой определяет фазу колебаний и может быть любым; выберем для определенности плюс.

С учетом неравенства (16) выражения (13) перепишутся так

$$\beta \approx \frac{2i\nu MN}{\omega}\alpha; \quad \delta \approx -\frac{2i\nu M^3}{\omega k}\alpha; \quad R \approx \frac{2i\nu mMN}{\omega k}\alpha; \quad N \approx \Delta(1+i). \tag{18}$$

Из последнего равенства следует, что вторые слагаемые в выражениях (7), (8) для функций A, B, C, H существенны только в поверхностном пограничном слое толщины Δ^{-1}. Величина $\mathrm{Re}\,\alpha$ будет равна $kM^{-1}B_0$. Выражения (6)-(8) с учетом соотношений (16)-(18) описывают пространственную слабозатухающую стоячую поверхностную волну.

Формулы для проекций вектора завихренности в лагранжевых переменных имеют вид

$$\Omega_X = \left[Z_t, Z, X\right] + \left[Y_t, Y, X\right] = \varepsilon(\zeta_{1tb} - \eta_{1tc}) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Omega_Y = \left[Z_t, Z, Y\right] + \left[X_t, X, Y\right] = \varepsilon(\xi_{1tc} - \zeta_{1ta}) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Omega_Z = \left[Y_t, Y, Z\right] + \left[X_t, X, Z\right] = \varepsilon(\eta_{1ta} - \xi_{1tb}) + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя в них представления для траекторий жидких частиц (6), получим для компонент завихренности $\Omega_{X1}, \Omega_{Y1}, \Omega_{Z1}$ первого порядка теории возмущений следующие представления:

$$\Omega_{x1} = -\mathrm{Re}\frac{2mMn^2\alpha}{\nu k(M^2+N^2)}\exp(Nb+nt)\cos ka\sin mc; \quad \Omega_{y1}=0;$$

$$\Omega_{z1} = \mathrm{Re}\frac{2Mn^2\alpha}{\nu(M^2+N^2)}\exp(Nb+nt)\sin ka\cos mc.$$

В длинноволновом приближении эти выражения примут вид

$$\Omega_{x1} = \frac{2mM\omega}{k}\mathrm{Re}\, i\alpha\exp[\Delta(1+i)b+i\omega t]\cos ka\sin mc;$$

$$\Omega_{z1} = 2M\omega\,\mathrm{Re}\, i\alpha\exp[\Delta(1+i)b+i\omega t]\sin ka\cos mc.$$

Случай $m=0$ соответствует плоской волне [9]. Полагая $\Delta=0, \nu=0$, получим решение для пространственной потенциальной стоячей волны [10].

Библиографический список

1. **Ламб, Г.** Гидродинамика / Г. Ламб. – М.: Гостехиздат, 1947.
2. **Филипс, О.М.** Динамика верхнего слоя океана / О.М. Филипс. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
3. **Stokes, G.G.** On the theory of oscillatory waves // Trans. Camb. Phil., 1847. V. 8. P 441-455; reprinted in Math. Phys. P. 1. 314-326.
4. **Longuet-Higgins, M.S.** Mass transport in water waves // Phil. Trans. R. Soc. Lond., 1953. A 245. 535-581.
5. **Longuet-Higgins, M.S.** Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface // J. Fluid Mech., 1960. 8. P. 293-306.
6. **Weber, J.E.** Effect of the air on the drift velocity of water waves / J.E. Weber, E. Forland // J. Fluid Mech., 1990. 218. P. 619-640.
7. **Weber, J.E.** Mass transport induced by surface waves in viscous rotating fluid // Free surface flows with viscosity. Computational Mechanics Publications: Southampton UK and Boston USA, 1997.
8. **Абрашкин, А.А.** Вихревая динамика в лагранжевом описании / А.А. Абрашкин, Е.И. Якубович. – М.: Физматлит, 2006. – 175 с.
9. **Abrashkin, A.A.** Nonlinear Gravitational Waves on the Surface of Viscous Fluid: Lagrange Approach / A.A. Abrashkin, Yu.P. Bodunova // Physics of Wave Phenomena. 2010. V. 18. No. 4. P. 251-255.
10. **Сретенский, Л.Н.** Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 815 с.

Дата поступления
в редакцию 29.04.2011

A.A. Abrashkin, Yu.P. Bodunova

SPATIAL STANDING WAVES ON THE SURFACE OF VISCOUS FLUID

Analytical solution for spatial standing linear gravitationally-capillary waves on the surface of viscous fluid is determined. Lagrange coordinates are used. The qualitative analysis of dispersion equation is done. The motion of fluid particles is studied in long-wave approximation. The components of vorticity are founded.

Key words: water waves, viscous fluid, vorticity, Lagrange variables.