

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 517.956.4:517.983.54

Ф.А. Кутерин, М.И. Сумин

## О РЕГУЛЯРИЗОВАННОМ АЛГОРИТМЕ УДЗАВЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского

Рассматривается обратная задача нахождения начального условия и распределенной правой части операторного параболического уравнения по приближенно известному в финальный момент времени его решению. На примере этой задачи обсуждается процедура регуляризации классического двойственного алгоритма Удзавы. В качестве регуляризованного алгоритма Удзавы выступает алгоритм итеративной двойственной регуляризации. Приводятся результаты численных расчетов, демонстрирующих работу регуляризованного двойственного алгоритма при решении обратной задачи финального наблюдения для уравнения теплопроводности.

*Ключевые слова:* классический двойственный алгоритм Удзавы, итеративная двойственная регуляризация, обратная задача финального наблюдения, параболическое уравнение, уравнение теплопроводности, численный эксперимент.

Для решения разнообразных оптимизационных задач на условный экстремум широко применяются двойственные (т.е. основанные на теории двойственности) численные алгоритмы [1, 2]. Типичным их представителем является предложенный в 1958 г. так называемый алгоритм Удзавы [3] (его описание см., например, в [1]), представляющий собой процедуру непосредственного решения на основе градиентного метода задачи, двойственной к исходной оптимизационной задаче. Этот классический алгоритм стал одним из самых популярных двойственных алгоритмов решения задач оптимизации с ограничениями и нашел многочисленные применения в различных важных исследованиях как теоретического, так и прикладного характера [4, 5, 6]. Однако сходимость алгоритма Удзавы изучалась лишь при двух весьма важных обстоятельствах, одно из которых заключалось в предположении точного задания исходных данных оптимизационной задачи, а другое предполагало существование седловой точки соответствующего функционала Лагранжа [4, 5, 6]. Вместе с тем, оба эти предположения являются весьма ограничительными, так как, во-первых, в реальных практических задачах, как правило, невозможно заранее установить факт наличия указанной седловой точки и, во-вторых, для таких задач характерным является наличие ошибки в задании их исходных данных. Формальное же применение алгоритма в общей ситуации может привести и приводит к стандартным эффектам неустойчивости приближенного решения. Рассмотрим в этой связи два конкретных иллюстративных примера. Первый из них демонстрирует принципиальную неустойчивость двойственной схемы, проявляющуюся при решении уже самых простых конечномерных оптимизационных задач [7].

**Пример 1.** Пусть имеется задача минимизации сильно выпуклой квадратичной функции двух переменных на множестве, задаваемом аффинным ограничением типа равенства, эквивалентная задаче поиска нормального решения линейной алгебраической

системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$|x|^2 \rightarrow \min, Ax = y, x \in R^2, A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^* = (0,5;0,5).$$

Двойственная задача имеет вид

$$V(\lambda) \equiv L(x(\lambda), \lambda) = -\frac{1}{4} \langle AA^* \lambda, \lambda \rangle - \langle y, \lambda \rangle \rightarrow \max, \lambda \in R^2,$$

где  $L(x, \lambda) \equiv |x|^2 + \langle \lambda, Ax - y \rangle$ ,  $x(\lambda) \equiv \operatorname{argmin} \{L(x, \lambda), x \in R^2\} = -\frac{1}{2} A^* \lambda$ . Ее решением является вектор  $(-1, \alpha) \forall \alpha \in R^1$ .

Рассмотрим возмущенную задачу при  $\delta > 0$

$$|x|^2 \rightarrow \min, A^\delta x = y^\delta, x \in R^2, A^\delta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}, y^\delta \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Соответствующая двойственная задача

$$V^\delta(\lambda) \equiv L^\delta(x^\delta(\lambda), \lambda) \rightarrow \max, \lambda \in R^2$$

имеет решение  $\lambda^\delta = \left( \frac{2-2\delta}{\delta}, \frac{2\delta-4}{\delta^3} \right)$  и при этом вектор

$x^\delta(\lambda^\delta) \equiv \operatorname{argmin} \{L^\delta(x, \lambda^\delta), x \in R^2\} = \left( 1 - \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta} \right)$  есть, в соответствии с классическим

двойственным подходом, «приближенное» решение исходной задачи, которое при  $\delta \rightarrow 0$  не сходится к ее единственному точному решению  $x^* = (0,5;0,5)$ .

В этом примере хорошо видно, как ошибка в задании исходных данных оптимизационной задачи влияет на процесс сходимости классической двойственной схемы.

Второй конкретный пример призван продемонстрировать практическую неустойчивость классического алгоритма Удзавы.

**Пример 2.** Рассмотрим обратную задачу нахождения начального условия  $v(x)$  в третьей краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} y_t - y_{xx} &= 0, & y(x,0) &= v(x), \\ y_x(0,t) &= y(0,t), & y_x(L,t) &= -y(L,t), & 0 \leq t \leq T, \\ L &= 1, & T &= 0.001, \end{aligned}$$

из множества допустимых воздействий  $D = \{v(\cdot) \in L_2(0, L) : v(x) \in [-2, 2] \text{ при } x \in [0, L]\}$  по приближенно известному в финальный момент времени решению  $q(x) = y(\cdot, T)$ . Для численного решения данной задачи был формально применен классический алгоритм Удзавы. При этом обратная задача записывалась в форме эквивалентной задачи минимизации

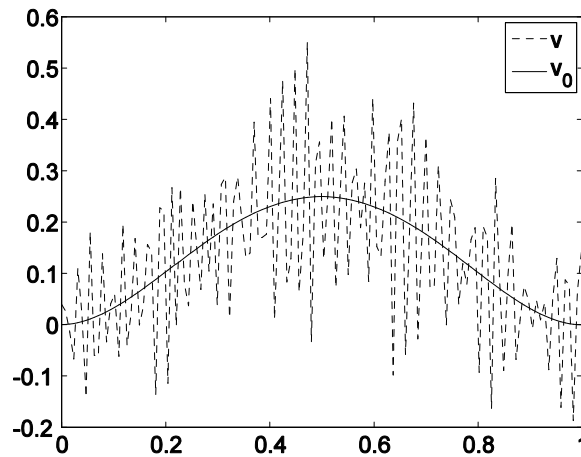
$$\|v\|_{L^2} \rightarrow \min, \quad y[v](\cdot, T) = q, \quad v \in D, \quad q \in L_2(0, L).$$

Неустойчивость классического двойственного алгоритма иллюстрирует рис. 1.

Более подробно данный пример будет рассмотрен в заключительной части работы.

В работах [8-12] был предложен и развит метод (алгоритм) двойственной регуляризации для исследования и решения задач математического программирования [10], оптимального управления [8, 11, 12], а также обратных задач [9]. Этот метод свободен от указанных ранее принципиальных недостатков классического двойственного алгоритма и заключается в непосредственном решении на основе метода регуляризации задачи Тихонова, являющейся двойственной к исходной оптимизационной задаче и, как следствие, одновременном параллельном решении исходной (прямой) задачи. Кроме того, в работах [9, 10] (см. также [7]) был предложен и метод (алгоритм) так называемой итеративной

двойственной регуляризации, представляющий собой, по сути дела, процедуру регуляризованного градиентного подъема при максимизации целевой функции двойственной задачи с параллельным решением прямой задачи. Именно эту процедуру регуляризованного градиентного подъема при решении двойственной задачи и следует рассматривать как регуляризованный аналог классического алгоритма Удзавы.



**Рис. 1. Исходная начальная функция –  $v_0$ , результат формального применения двойственного алгоритма –  $v$**

В настоящей работе эффективность алгоритма итеративной двойственной регуляризации для решения некорректных задач иллюстрируется на примере решения обратной задачи для операторного дифференциального уравнения, в качестве конкретного представителя которой выступает обратная задача финального наблюдения для уравнения теплопроводности, обсуждается численная реализация регуляризованного алгоритма Удзавы для этой конкретной обратной задачи. При этом естественно обратная задача записывается прежде всего в форме эквивалентной задачи минимизации с ограничением типа равенства.

### Постановка задачи

Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $U_1, U_2 \subset H$  – выпуклые замкнутые множества,  $D_1 \equiv \{u \in L_2(0, T; H) : u(t) \in U_1 \text{ при п.в. } t \in [0, T]\}$ ,  $D_2 \equiv U_2 \subset H$ . Множество  $D = D_1 \times D_2$  назовем множеством допустимых управлений.

Рассмотрим задачу Коши для операторного параболического уравнения [13]

$$y'(t) + Ay(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad y(0) = v, \quad (1)$$

где оператор  $A$  является энергетическим расширением линейного неограниченного симметричного положительно определенного оператора с областью определения, плотной в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Это значит, что  $A \in L(V \rightarrow V^*)$ , где  $V$  – энергетическое гильбертово пространство,  $V^*$  – пространство, сопряженное к  $V$ ,  $D(A) = V$  – область определения, и  $R(A) = V^*$  – область значений оператора  $A$ . Будем предполагать также, что имеют место вложения  $V \subset H$ ;  $H^* \subset V^*$ , причем эти вложения плотные и непрерывные. Решением задачи Коши (1), соответствующим паре  $\pi = (u, v) \in D$ , называется регулярная обобщенная функция  $y(\cdot) \equiv y[\pi](\cdot) \in L^2(0, T; V)$ , имеющая регулярную производную  $y'(t) \in L^2(0, T; V^*)$ , удовлетворяющая уравнению (1) при п.в.  $t \in (0, T)$  и начальному условию  $y(0) = v_0$ . Понятие обобщенного решения задачи (1) и определения пространств  $L^2(0, T; V)$  и  $L^2(0, T; V^*)$  подробно обсуждаются в [13].

Обратная задача финального наблюдения заключается в нахождении пары  $\pi = (u, v) \in D$  с минимальной нормой  $\|u\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|v\|_H^2$  по известному в момент времени  $T$  наблюдению  $q \in H$ . Предполагается, что решение обратной задачи существует. Будем обозначать его  $\pi^0$ . Таким образом, мы имеем равенство  $y[\pi^0] = q$ .

Поставленная обратная задача эквивалентна задаче оптимального управления с ограничением типа равенства

$$I_0(\pi) \rightarrow \inf, \quad I_1(\pi) = q, \quad \pi \in D, \quad q \in H \quad (2)$$

$$I_0(\pi) \equiv \|u\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|v\|_H^2, \quad I_1(\pi) \equiv y[\pi](T). \quad (3)$$

Будем считать, что оператор  $A$  исходной задачи (1) задан точно, а финальное наблюдение с ошибкой  $h^\delta$  такой, что  $\|h^\delta\|_H \leq \delta$ ,  $\delta > 0$ .

С учетом погрешности финального наблюдения имеем возмущенную задачу оптимального управления.

$$I_0(\pi) \rightarrow \inf, \quad I_1(\pi) = q^\delta \equiv q + h^\delta, \quad \pi \in D, \quad q^\delta \in H. \quad (4)$$

### Необходимые теоретические сведения

Для задачи (1) при сделанных ранее предположениях для оператора  $A$  справедлива теорема существования и единственности решения [13].

**Теорема 1.** Пусть  $A \in L(V \rightarrow V^*)$  – энергетическое расширение линейного неограниченного симметричного положительно определенного оператора с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве  $H$ , и вложение пространств  $V \subset H$  компактно. Тогда для любых  $u \in L^2(0, T; V^*)$  и  $v \in H$  существует единственное решение задачи (1).

Определим функционал Лагранжа задачи (4)

$$L_q^\delta(\pi, \lambda) \equiv I_0(\pi) + \langle \lambda, I_1(\pi) - q^\delta \rangle, \quad \pi \in D, \lambda \in H \quad (5)$$

и двойственную задачу

$$V_q^\delta(\lambda) \equiv \min_{\pi \in D} L_q^\delta(\pi, \lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in H. \quad (6)$$

Заметим, что операция  $\min$  в определении целевой функции двойственной задачи законна, так как функционал  $L_q^\delta$  является сильно выпуклым на выпуклом замкнутом множестве  $D \subset L^2(0, T; H) \times H$ . При этом минимум достигается для любого  $q$  в единственной точке

$$\pi^\delta[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}_{\pi \in D} L_q^\delta(\pi, \lambda), \quad \lambda \in H.$$

**Лемма 1.** Производная Фреше функционала  $V_q^\delta$  в точке  $\lambda \in H$  равна

$$\partial V_q^\delta(\lambda) = y[\pi^\delta[\lambda]](T) - q^\delta.$$

Эта производная удовлетворяет условию Литвица.

Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.6 в [9].

### Метод двойственной регуляризации

Метод двойственной регуляризации [8-12] применительно к решению задачи (2) заключается в применении метода регуляризации Тихонова к двойственной задаче (6):

$$R^{\delta, \alpha}(\lambda) \equiv V_q^\delta(\lambda) - \alpha \|\lambda\|_H^2 \rightarrow \max. \quad (7)$$

Функционал  $R^{\delta, \alpha}$  является сильно вогнутым и, согласно лемме 1, его градиент равномерно

непрерывен (липшицев). Это обстоятельство позволяет применить для максимизации функционала (7) какой-либо градиентный метод, например, хорошо известный метод наискорейшего подъема.

Обозначим через  $\lambda^{\delta,\alpha}$  единственную в  $H$  точку, дающую безусловный максимум функционалу  $R^{\delta,\alpha}$ .

**Теорема 2.** При условии согласования ошибки задания исходных данных  $\delta$  с параметром регуляризации  $\alpha$

$$\delta/\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

регуляризованные элементы  $\pi^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}]$  для любого  $q$  сильно сходятся при  $\delta \rightarrow 0$  к решению невозмущенной задачи  $\pi^0$ .

Доказательство проводится аналогично доказательству в [9].

Следует отметить, что как и в [9], утверждение теоремы справедливо как в случае, когда функционал  $V^0$  достигает максимума на  $H$ , так и в случае, когда этого нет.

### Итеративная двойственная регуляризация

Будем применять для решения двойственной задачи (6) процедуру итеративной регуляризации градиентного метода [2]. Поясним кратко смысл этой процедуры.

Для каждого фиксированного  $\alpha$  может быть найдено решение  $\lambda^{\delta,\alpha}$  задачи

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda) \rightarrow \max, \quad \lambda \in H. \quad (8)$$

Предположим, мы задали последовательность параметров  $\alpha_k$ , согласованных с последовательностью ошибок наблюдения  $\delta_k$ . В этом случае с возрастанием номера  $k$  задачу (8) при  $\alpha_k$  придется решать со все более высокой точностью, поэтому число итераций  $n_k$  метода градиентного подъема может оказаться весьма большим при больших  $k$ . Это обстоятельство может создать трудности при практической реализации метода двойственной регуляризации. Поэтому для практического решения обратной задачи (2) предлагается использовать процедуру итеративной двойственной регуляризации [9, 10].

Принцип итеративной регуляризации градиентного двойственного метода решения задачи (7) заключается в том, что при каждом фиксированном  $k$  делается один шаг метода градиентного подъема с шаговым множителем  $\beta = \beta_k$  в задаче (7) при  $\alpha = \alpha_k$  и затем делается переход к задаче (7) с  $\alpha = \alpha_{k+1}$ . Начальную точку  $H = L^2(0, L)$  можно выбрать произвольным образом из гильбертова пространства  $H$ . Чтобы полученная таким образом процедура была устойчива по отношению к ошибкам исходных данных необходимо, чтобы последовательность параметров регуляризации  $\alpha_k$  и последовательность шаговых множителей  $\beta_k$  были определенным образом согласованы с последовательностью ошибок в исходных данных  $\langle Af, f \rangle_H^{1/2}$ .

Пусть последовательность  $\bar{\lambda}^k, k=1,2,\dots$ , в соответствии с методом итеративной двойственной регуляризации конструируется по правилу

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta_k \left( \partial V_q^{\delta_k}(\bar{\lambda}^k) - 2\alpha_k \bar{\lambda}^k \right), \quad k=0,1,\dots; \bar{\lambda}^0 \in H, \quad (9)$$

где числовые последовательности  $\delta_k, \alpha_k, \beta_k, k=0,1,\dots$ , удовлетворяют условиям

$$\delta_k \geq 0, \alpha_k > 0, \beta_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta_k + \alpha_k + \beta_k) = 0,$$

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq C_0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{(\alpha_k)^3 \beta_k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k}{(\alpha_k)^3} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{(\alpha_k)^3} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k = +\infty. \quad (10)$$

**Теорема 3.** При условии, что элементы  $\bar{\lambda}^k$ , при  $\lambda$ , находятся из рекуррентной

формулы (9) и выполняются условия согласования (10), имеет место предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \pi^{\delta_k} [\bar{\lambda}^k] - \pi^0 \right\| = 0,$$

где  $\pi^0$  – решение исходной обратной задачи (2).

**Замечание.** В качестве одного из возможных примеров указанных выше числовых последовательностей можно взять, в частности  $\alpha_k = k^{-1/6}$ ,  $\beta_k = k^{-3/5}$ .

При практической реализации схемы двойственной регуляризации, в случае, когда исходные данные задаются с определенной фиксированной погрешностью  $\delta > 0$ , может быть использовано следующее условие останова итеративного процесса (9) (см., например, [10]). При фиксированном уровне погрешности  $\nu_0$  итерации продолжаются до такого наибольшего номера  $k = k(\delta)$ , при котором выполняются неравенства

$$\delta_k \geq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, k(\delta). \quad (11)$$

**Теорема 4.** Пусть  $\bar{\lambda}^0 \in H$ , а элементы  $\bar{\lambda}^k$ , при  $\beta_0$ , находятся из рекуррентной формулы (9) и выполняются условия согласования (10). Тогда верно предельное соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \left\| \pi^{\delta_k} [\bar{\lambda}^{k(\delta)}] - \pi^0 \right\| = 0,$$

где  $\pi^{\delta_k} [\bar{\lambda}^{k(\delta)}]$  – результат  $k(\delta)$  итераций процесса (9) при  $\partial V_q^{\delta_k}(\lambda) = \partial V_q^\delta(\lambda)$ .

### Численный эксперимент

Проиллюстрируем работу и особенности метода итеративной двойственной регуляризации [9, 10] на примере обратной задачи нахождения начального условия  $v(x)$  в третьей краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} y_t - y_{xx} &= 0, & y(x, 0) &= v(x), \\ y_x(0, t) &= y(0, t), & y_x(L, t) &= -y(L, t), & 0 \leq t \leq T, \\ L &= 1, & T &= 0.001, \end{aligned} \quad (12)$$

из множества допустимых управлений  $D = D_2 \equiv \{v(x) \in L_2(0, L) : v(x) \in [-2, 2] \text{ при } x \in [0, L]\}$ .

Чтобы воспользоваться описанной процедурой, поясним, как задача (12) записывается в виде абстрактной задачи Коши (1). Следуя схеме, приведенной в [13, гл. 2, §2, с. 66], введем оператор

$$Af = -f''(x), \quad 0 < x < L,$$

с областью определения

$$D(A) = \{f = f(x) \in C^2[0, L] : -f'(0) + f(0) = 0, f'(L) + f(L) = 0\},$$

плотной в  $H = L^2(0, L)$ .

Легко убедиться, что оператор  $A$  является линейным, симметричным, неограниченным и положительно определенным. Энергетическое пространство  $V$ , получаемое пополнением  $D(A)$  в метрике  $\langle Af, f \rangle_H^{1/2}$ , здесь совпадает с пространством  $H^1(0, L)$ . Энергетическое расширение

$$A : V \rightarrow V^* = (H^1(0, L))^*$$

исходного оператора  $A$  определяется равенством

$$\langle Af, g \rangle = f(0)g(0) + f(L)g(L) + \int_0^L f'(x)g'(x)dx, \quad \forall f, g \in H^1(0, L).$$

Это позволяет рассматривать задачу (12) как частный случай задачи (1) и применять

для решения обратной задачи финального наблюдения уже описанные метод двойственной регуляризации и итеративный двойственный метод.

Численные эксперименты проводились по замкнутой схеме. Это означает, что для некоторой функции  $v_0$  «точного решения» обратной задачи решалась задача (12) при  $v \equiv v_0$  и функция  $y_T \equiv y[v_0](\cdot, T)$  рассматривалась как финальное наблюдение. Далее функция  $y_T$  возмущалась с целью моделирования «погрешности измерения». «Приближенно известное» финальное наблюдение  $q^\delta$  вычислялось по формуле  $q^\delta = y_T + h^\delta$ , и далее решалась обратная задача нахождения  $v$  при финальном наблюдении  $q = q^\delta$ . При этом использовался метод итеративной двойственной регуляризации (9) с описанным ранее правилом останова (11). В качестве последовательностей, удовлетворяющих условиям согласования (10), использовались последовательности  $\alpha_k = \alpha_0 k^{-1/6}$ ,  $\beta_k = \beta_0 k^{-3/5}$ . Значения констант  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  были подобраны опытным путем таким образом, чтобы метод сходился «достаточно быстро» и равнялись  $\alpha_0 = 0.0000001$ ,  $\beta_0 = 2000$ . Полученное решение обратной задачи  $v$  сравнивалось с  $v_0$  (вычислялась норма разности в пространстве  $L^2$ ), кроме того, оценивалось значение нормы соответствующей двойственной переменной  $\lambda$  также в  $L^2$ .

Задача (12) и сопряженная задача решались с помощью разностной схемы Кранка-Николсона, которая, устойчива при любых шагах по времени и имеет второй порядок точности по пространственной переменной. Соответственно, вместо функций из гильбертовых пространств рассматривались сеточные представления этих функций. Для обеспечения достаточной точности решения использовалось равномерное разбиение по  $x$  с помощью 256 точек.

Ошибка  $\mathcal{E}^\delta$  в пространстве сеточных приближений задавалась следующим образом. Бралась сеточная функция  $\hat{h}^1$  со случайными значениями, распределенными равномерно на отрезке  $[-1, 1]$ , вычислялась ее норма  $\|\hat{h}^1\|$ , а также «собственно погрешность» по формуле  $\mathcal{E}^\delta = \delta(\hat{h}^1 / \|\hat{h}^1\|)$ .

В качестве нормы в пространстве сеточных приближений рассматривался сеточный аналог нормы в  $L_2$

$$\|\hat{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} (u^i)^2 \xi}, \quad \xi = L/(n_x - 1),$$

где  $n_x$  – число точек разбиения, а  $u^i$  – значения функции  $\hat{u}$  в соответствующих точках.

При проведении численных экспериментов ставились три цели:

1. Продемонстрировать сходимость алгоритма итеративной двойственной регуляризации в случае, когда у функции Лагранжа (5) задачи (2)-(3) есть седловая точка.
2. Показать поведение алгоритма в ситуации, когда нет седловой точки у функции Лагранжа (5).
3. Продемонстрировать неустойчивость алгоритма (9)-(10) в отсутствие регуляризирующего слагаемого при наличии ошибки в исходных данных.

Для достижения перечисленных целей проводились три серии численных экспериментов. Ниже при описании результатов численных экспериментов в каждом из трех случаев приводятся графики начальной функции  $v_0$ , результата восстановления методом итеративной двойственной регуляризации  $v[\lambda_N]$  и график функции  $\lambda_N$  (двойственной переменной) на последнем  $N$ -м шаге итеративного процесса. Кроме того подсчитывается норма двойственной переменной  $\lambda_N$  и невязка  $\|v_0 - v[\lambda_N]\|$ .

В первой серии экспериментов в качестве начальной функции взята гладкая функция  $v_0^1$

$$v_0^1 \equiv \frac{x^2(x-L)^2}{22^4 L^4}.$$

«Погрешность наблюдения» равнялась 1%, то есть  $\delta = 0.01 \|\phi^0\|$ . Использовалось условие останова (11).

**Таблица 1**  
**Уменьшение невязки с возрастанием точности решения задачи**

Число итераций, $N$	$\ \lambda_N\ $	$\ v_0 - v[\lambda_N]\ $
10	0.555782	0.00554065
100	1.00724	0.000299552
1000	1.79222	0.000202258
10000	3.18836	0.000137671
100000	5.67136	9.37373e-05

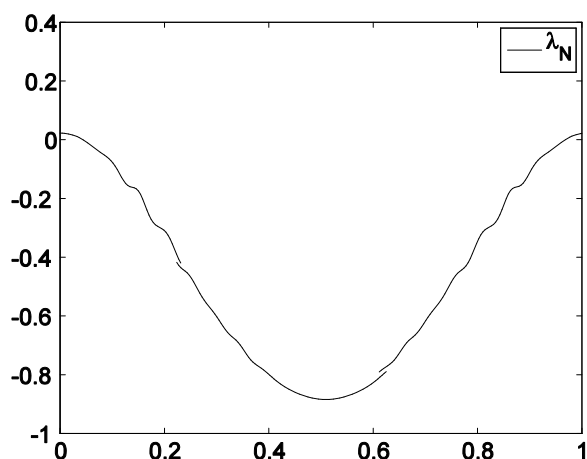


Рис. 2. Двойственная переменная на 10-м шаге

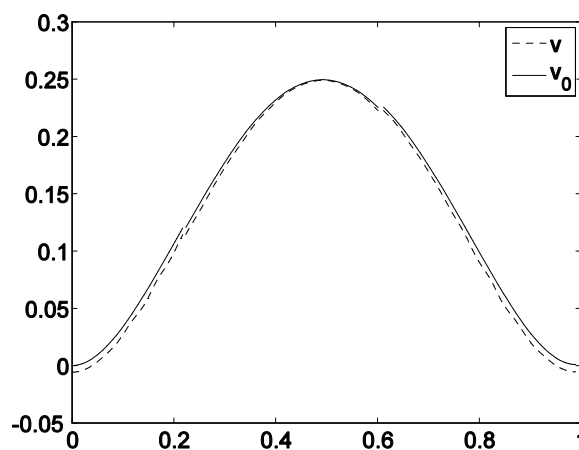


Рис. 3. Начальная функция и восстановленная начальная функция, 10 итераций

Уменьшение нормы разности  $\|v_0^1 - v[\lambda_N]\|$  говорит о сходимости метода итеративной двойственной регуляризации. Следует отметить низкую скорость сходимости итерационного двойственного метода, обусловленную априорным выбором последовательностей шаговых и регуляризирующих множителей  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ .

Во второй серии экспериментов использовалась разрывная начальная функция

$$v_0^2 \equiv \begin{cases} -1, & x < a, x > b, \\ 1, & a \leq x \leq b, \end{cases}$$

принимая значения внутри допустимого множества  $[-2, 2]$ . В этой ситуации, как показано в [9], функционал Лагранжа (5) задачи (2)-(3) не имеет седловой точки. Это значит, что норма двойственной переменной  $\lambda$  по мере работы алгоритма должна неограниченно увеличиваться. Чтобы наблюдать этот эффект «в чистом виде» (независимо от вклада погрешности наблюдения) «погрешность наблюдения»  $\delta$  была положена равной нулю.

Анализируя приведенные далее результаты, можно наблюдать, что с ростом числа итераций происходит приближение решения к начальной функции и одновременное увеличение нормы  $\lambda_k$ .



**Таблица 2**  
**Рост нормы двойственной переменной**

Число итераций, $N$	$\ \lambda_N\ $	$\ y_0 - v[\lambda_N]\ $
100000	647.621	0.0299701
1000000	1764.2	0.00961037
10000000	3601.9	0.00121545

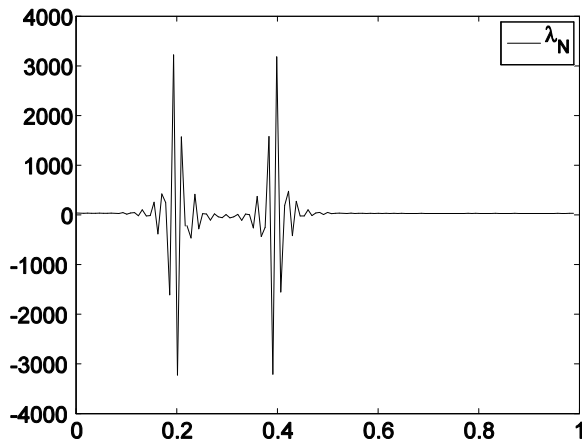


Рис. 4. Двойственная переменная на 10000-м шаге

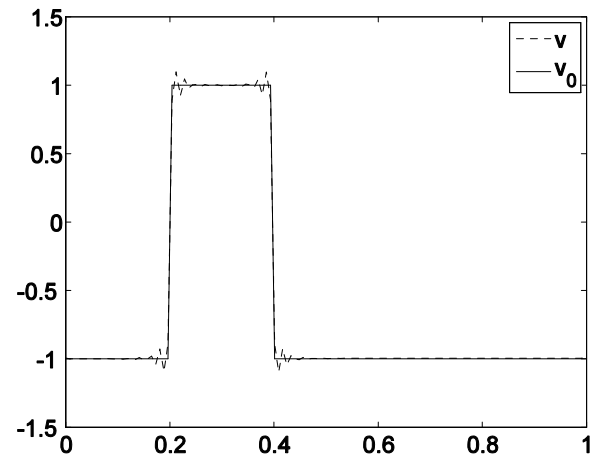


Рис. 5. Начальная и восстановленная функции на 10000-м шаге

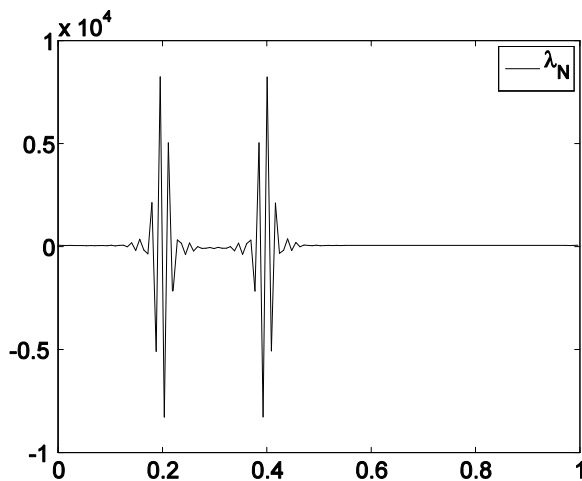


Рис. 6. Двойственная переменная на 100000-м шаге

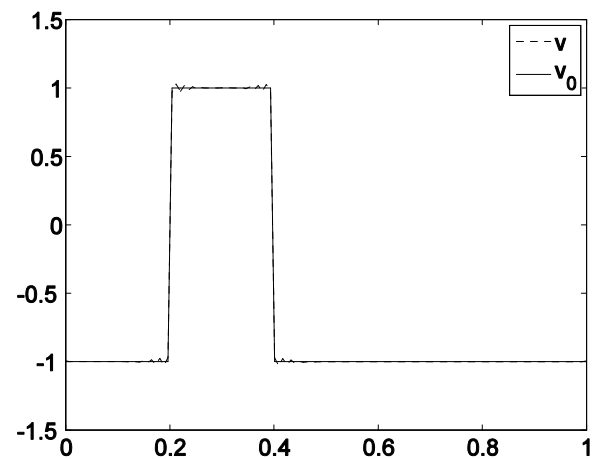
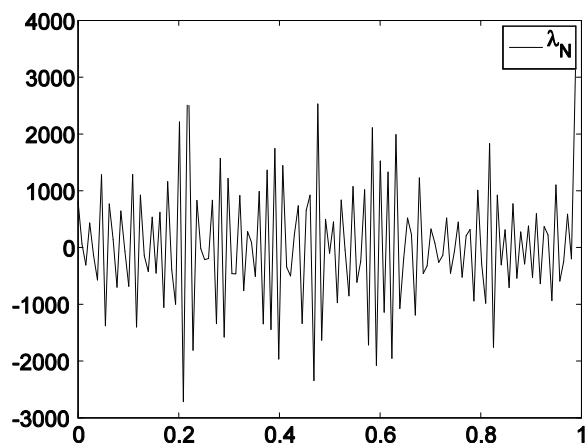


Рис. 7. Начальная и восстановленная функции на 100000-м шаге

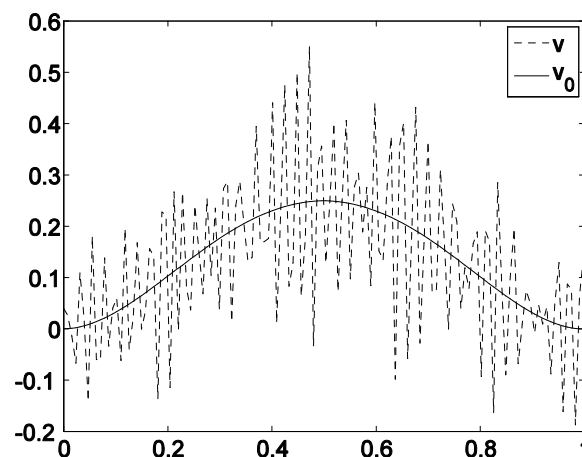
В третьей серии экспериментов, как и в первой, в качестве начальной функции была взята гладкая функция  $v_0^1$ , но все элементы  $\alpha_k$ , отвечающие за регуляризацию в формуле (9), были положены равными нулю, то есть, по сути применялся классический алгоритм Удзавы. В то же время «финальное наблюдение» возмущалось равномерно распределенной случайной ошибкой  $h^\delta$ , как было описано выше. Уровень ошибки был равен 3% ( $\delta = 0.03 \|\varphi^0\|$ ). Результаты численного эксперимента представлены на следующих двух графиках и в таблице.

**Таблица 3**  
**Неустойчивость итерационного двойственного метода  
без регуляризации**

Число итераций, $N$	$\ \lambda_N\ $	$\ y_0 - v[\lambda_N]\ $
10000	299.144	0.0923157
100000	1054.59	0.127038
1000000	4742.26	0.222071



**Рис. 8. Двойственная переменная  
на 100000-м шаге**



**Рис. 9. Начальная и восстановленная функции  
на 100000-м шаге**

По мере работы алгоритма как норма двойственной переменной, так и невязка увеличивались. И, как можно заметить из графиков начальной и восстановленной функций, приближенное решение обратной задачи «не тяготеет» к ее точному решению, что говорит о неустойчивой работе итерационного двойственного метода без регуляризации и о ее существенности в задаче с неточно известными начальными данными.

Результаты проведенных экспериментов показали эффективность метода итерационной двойственной регуляризации [8-12] в задаче финального наблюдения для одномерного уравнения теплопроводности и необходимость регуляризации при решении подобного рода задач.

Работа подготовлена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» Минобрнауки РФ (проекты 2.1.1/3927, 2.1.1/13303) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П-13).

#### Библиографический список

1. **Мину, М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
2. **Васильев, Ф.П.** Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
3. **Uzawa, H.** Iterative Methods for Concave Programming. In: Studies in linear and nonlinear programming, Chap. 10 (Arrow, Hurwicz, Uzawa eds.), Stanford University Press, 1958. [русский перевод в кн.: Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Уздова Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962. – 336 с.]
4. **Гловински, Р.** Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Трёмольер. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

5. Экланд, И. Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
6. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
7. Сумин, М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: учеб. пособие / М.И. Сумин. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2009. – 289 с.
8. Сумин, М.И. Оптимальное управление параболическими уравнениями: двойственные численные методы, регуляризация // Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде: сб. докладов Международной конференции (Екатеринбург, 30 мая – 2 июня 2000 г.). Екатеринбург: Изд-во Ин-та математики и механики УрО РАН, 2000. С. 66–69.
9. Сумин, М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Вычислительная математика и математическая физика. 2004. Т. 44. 11. С. 2001–2019.
10. Сумин, М.И. Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Вычислительная математика и математическая физика. 2007. Т. 47. 4. С. 602–625.
11. Сумин, М.И. Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Вычислительная математика и математическая физика. 2009. Т. 49. 12. С. 2083–2102.
12. Сумин, М.И. Двойственная регуляризация и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с недифференцируемыми функционалами // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. 1. С. 229–244.
13. Осипов, Ю.С. Основы метода динамической регуляризации / Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов. – М.: Изд-во Московского университета, 1990. – 238 с.

*Дата поступления  
в редакцию 05.05.2011*

**F.A. Kuterin, M.I. Sumin**

## **ON REGULARIZED ALGORITHM OF UZAWA IN INVERSE PROBLEM OF FINAL OBSERVATION FOR PARABOLIC EQUATION**

The paper deals with the inverse problem of determination of initial condition and distributed right-hand side for operator parabolic equation whose solution is known approximately at final time. On an example of this problem we discuss the regularization of the classical dual algorithm of Uzawa. As regularized algorithm of Uzawa we consider the algorithm of iterative dual regularization. The results of numerical experiments showing work of the regularized dual algorithm for solving inverse problem of final observation for heat conduction equation are given.

*Key words:* Classical dual algorithm of Uzawa, iterative dual regularization, inverse problem of final observation, parabolic equation, heat conduction equation, numerical experiment.