УДК 517.9

С.Н. Алексеенко, Е.А. Елькина

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Получены условия разрешимости задачи Коши для уравнения с дифференциальным оператором типа полной производной по времени на заданном конечном интервале [0,T] изменения аргумента *t*, который в физических задачах обычно выражает время. Доказательство нелокальной разрешимости опирается на глобальные оценки, полученные с использованием мажорантных уравнений.

Ключевые слова: метод дополнительного аргумента, задача Коши, глобальные оценки.

Для описания разнообразных физических процессов в механике сплошной среды широко используются уравнения с дифференциальным оператором типа полной производной по времени [1, 2, 3]:

$$\partial_t v + v\partial_x v = f(t, x, v). \qquad (1)$$

Изучению условий разрешимости уравнений вида (1) и поиску для них оптимальных способов построения численных решений посвящено большое количество работ. С последними достижениями по исследованию разрешимости задачи Коши для систем уравнений вида (1) можно познакомиться в обзорной статье [1]. А классические результаты по выводу, использованию и решению уравнений вида (1) содержатся в [4] и многих известных учебниках по дифференциальным уравнениям математической физики. Как можно видеть на примере приведенных литературных источников, для исследования уравнений вида (1) разработано много разных методов. Все они имеют свои достоинства и недостатки и каждый из известных методов применим к своему классу задач.

Так, в частности, метод характеристик в принципе позволяет доказать локальную разрешимость задачи Коши для уравнения (1). Однако, определение границ интервала разрешимости и нахождение выражения для v в исходных координатах (t,x) является в методе характеристик трудноразрешимой задачей. При этом, как правило, используется теорема об обратной функции, которая в большинстве случаев не дает возможности «конструктивно» определить интервал разрешимости.

Кроме того, если функция $f\,(t,x,v)$ имеет сложный вид, или вместо одного уравнения имеется система уравнений, то в рамках классического метода характеристик уравнения «на характеристиках» приобретают неудобный для исследования вид.

Задача определения условий разрешимости уравнения (1) без привлечения теоремы об обратной функции, как и задача построения численного решения в исходных координатах эффективно решаются в рамках метода дополнительного аргумента [5, 6, 7, 8, 9].

Однако до сих пор с помощью метода дополнительного аргумента в основном исследовались вопросы локального существования решения уравнений первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени. Хотя, некоторые задачи о нелокальной разрешимости уже рассматривались [2, 10].

Данная работа посвящена выяснению условий разрешимости задачи Коши для уравнения вида (1) на заданном конечном интервале [0,T] изменения аргумента *t*, который в физических задачах обычно выражает время.

Естественно, нелокальная разрешимость возможно лишь при определенных ограни-

© Алексеенко С.Н., Елькина Е.А., 2011.

чениях на функцию $f(t,x,v)$. Чтобы сделать последующие выкладки менее громоздкими, рассмотрим уравнение вида

$$\partial_t u + u\partial_x u = -U(t,x,u)u \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{3}$$

Исходные условия на функции $U(t,x,u)$ и $\varphi(x)$ сформулируем далее.
Продифференцируем (2) по x:

$$\partial^2_{xt} u + (\partial_x u)^2 + u\partial^2_{xx} u = -U(t,x,u)\partial_x u - \partial_x U(t,x,u)u - \partial_u U(t,x,u)\partial_x u \cdot u.$$

Введем обозначения:

$$q := \partial_x u, U_1 := \partial_x U, U_2 := \partial_u U, A := U + U_2 u.$$

С ними последнее уравнение перепишется в виде

$$\partial_t q + u\partial_x q = -q^2 - U(t,x,u)q - U_1(t,x,u)u - U_2(t,x,u)uq. \tag{4}$$

С учетом (3) зададим начальное условие для функции

$$q(0,x) = \varphi'(x). \tag{5}$$

В соответствии с методом дополнительного аргумента, запишем для задачи (2) – (5) расширенную характеристическую систему:

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = v(s,t,x), \tag{6}$$

$$\frac{dv(s,t,x)}{ds} = -U(s,\eta,v)v, \tag{7}$$

$$\frac{dw(s,t,x)}{ds} = -w^2 - A(s,\eta,v)w - U_1(s,\eta,v)v, \tag{8}$$

$$\eta(t,t,x) = x, \tag{9}$$

$$v(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)), \tag{10}$$

$$w(0,t,x) = \varphi'(\eta(0,t,x)). \tag{11}$$

Введем необходимые обозначения и сформулируем условия на функции $U(t,x,u)$ и $\varphi(x)$.

Будем обозначать, как обычно, $C(\Omega_*)$ и $C^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(\Omega_*)$ - пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со своими производными до порядка α_i по i-му аргументу, $i=1,2,\ldots,n$) на некотором подмножестве Ω_* евклидова пространства $\Re^n, n=1,2,\ldots$. Если это важно, то будем обозначать $C^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n;\alpha_{n+1}}(\Omega_*)$ пространство функций, у которых порядок смешанных производных не выше чем α_{n+1}. Пространства функций, ограниченных на неограниченном множестве, будем обозначать таким же символом с чертой наверху. Для вектор-функций сохраним эти же обозначения.
Далее,

$$Q_T = \{(s,t,x): 0 \le s \le t \le T, -\infty < x < \infty\},$$

$$R(TK) = [0,T] \times (-\infty,\infty) \times [-K,K],$$

где K – произвольно зафиксированное положительное число.

Примем, что $\varphi \in \overline{C}^2(R^1)$, $U \in \overline{C}^{1,2,2}(R(TK))$.

Обозначим

$$N_\varphi := \max\left\{ \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |\varphi(x)|, \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |\varphi'(x)|, \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |\varphi''(x)| \right\},$$

$$M(K) := \max \left\{ \begin{array}{l} \sup |U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3|, (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in R(TK), \\ \sup |\xi_4^2 + A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_4 + U_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3|, \\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in R(TK) \times [-K,K] \end{array} \right\},$$

$$M_j(K) := \max \left\{ \begin{array}{l} \sup \left|\partial_{\xi_j} [U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3]\right|, (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in R(TK), \\ \sup \left|\partial_{\xi_j} [\xi_4^2 + A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_4 + U_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3]\right|, \\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in R(TK) \times [-K,K] \end{array} \right\}, \; j = 1,2,3,4.$$

Сформулируем в виде лемм те утверждения о взаимосвязи между решениями задач (2)-(3) и (6)-(11), а также о разрешимости задачи (6)-(11), которые составляют основу метода дополнительного аргумента и доказаны или непосредственно вытекают из цитированных выше работ.

Лемма 1. Пусть $\varphi \in \overline{C}^2(R^1), U \in \overline{C}^{0,2,2}(R(TK))$, причем T и K подобраны таким образом, что выполняется неравенство $N_\varphi + TM(K) \le K$. Пусть, далее T_1 - положительный корень уравнения

$$(N_\varphi + M_3(K))t + \frac{1}{2} M_2(K)t^2 = 1,$$

$$T_2 := [M_4(K)]^{-1}, \quad T_0 := \min(T_1,T_2), \quad T_3 = \begin{cases} T_0 - \varepsilon, & \text{если}\, T_0 \le T \\ T, & \text{если}\, T_0 > T, \end{cases}$$

где ε - любое число из интервала $(0,T_0)$.

Тогда при $0 < t \le T_3$ система уравнений (6)-(8) с дополнительными условиями (9) – (11) имеет единственное решение $\eta(s,t,x) \in C^{1,1,1}(Q_{T_3})$, $v \in \overline{C}^{1,1,1}(Q_{T_3})$, $w \in \overline{C}^{1,1,1}(Q_{T_3})$.

Лемма 2. Функция $u(t,x) = v(t,t,x)$, где $v \in \overline{C}^{1,1,1}(Q_{T_3})$, определяется из решения задачи (6) – (11), будет являться решением исходной задачи Коши (1) – (2).

Лемма 3. При выполнении условий леммы 1 и $U \in \overline{C}^{1,2,2}(R(TK))$ справедливо $v \in \overline{C}^{1,1,2}(Q_3)$.

Из этих трех лемм следует теорема о локальной разрешимости исходной задачи Коши (2)-(3).

ТЕОРЕМА 1

Пусть $\varphi \in \overline{C}^2(R^1), U \in \overline{C}^{1,2,2}(R(TK))$, причем T и K подобраны таким образом, что выполняется неравенство $N_\varphi + TM(K) \le K$. Пусть, далее, T_1 - положительный корень уравнения

$$(N_\varphi + M_3(K))t + \frac{1}{2} M_2(K)t^2 = 1,$$

$$T_2 := [M_4(K)]^{-1}, \quad T_0 := \min(T_1,T_2), \quad T_3 = \begin{cases} T_0 - \varepsilon, & \text{если}\, T_0 \le T \\ T, & \text{если}\, T_0 > T, \end{cases}$$

где ε - любое число из интервала $(0,T_0)$.

Тогда при $0 < t \le T_3$ задача Коши (2) - (3) имеет решение $u(t,x) \in \overline{C}^{1,2}(Q_{T_3})$.

Теперь займемся определением условий, при выполнении которых задача (6)-(11), а, следовательно, и задача (2)-(3), будут иметь решение на всем заданном в начале промежутке $[0,T]$.

Первый и самый важный этап этой работы состоит в выводе глобальных оценок для v и w.

Запишем для задачи (6), (7), (9), (10) соответствующую систему интегральных уравнений.

$$\eta(s,t,x) = x - \int_s^t V(\tau,t,x)d\tau, \tag{12}$$

$$v(s,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x))e^{-\int_0^s U(\tau,\eta,v)d\tau}. \tag{13}$$

Констатируем первое условие: $U(t,x,y) \geq 0$ (14)

для $(t,x,y) \in R(TK)$.

Из (13) следует первая глобальная оценка

$$|v| \leq N_{\varphi}. \tag{15}$$

Переходим к выводу глобальной оценки и определению условий ее осуществления для w. Правая часть в (8) представляет собой квадратный трехчлен относительно w. Найдем его корни:

$$w^2 + Aw + U_1 v = 0, \quad w_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-A \pm \sqrt{A^2 - 4U_1 v}\right].$$

В качестве следующего условия глобальной разрешимости примем, что

$$A^2 - 4U_1 v > 0 \tag{16}$$

при всех $0 \leq s \leq t \leq T, -\infty < \eta < \infty$, $|v| \leq N_{\varphi}$..

Обозначим $W_1 := \frac{1}{2}\left[-A + \sqrt{A^2 - 4U_1 v}\right]$, $W_2 := \frac{1}{2}\left[-A - \sqrt{A^2 - 4U_1 v}\right]$.

Перепишем уравнение (8) в виде:

$$\frac{dw}{ds} = -(w - W_1)(w - W_2) \tag{17}$$

Построим для (17) мажорантные и минорантные уравнения, решения которых и обеспечат искомую глобальную оценку.

Определим $\widetilde{W_1} := \min\limits_{s\in[0,t]} W_1$, $\overline{W_1} := \max\limits_{s\in[0,t]} W_1$, $\overline{W_2} := \min\limits_{s\in[0,t]} W_2$, $\widetilde{W_2} := \max\limits_{s\in[0,t]} W_2$ (рис. 1).

Рис. 1. Взаимное расположение введенных обозначений

В качестве следующего условия глобальной разрешимости примем, что при всех допустимых t, x:

$$\widetilde{W_2} < \widetilde{W_1}. \tag{18}$$

Для сокращения последующих записей обозначим $x_0 := \eta(0,t,x)$.

Мажорантные и минорантные уравнения будем строить по-разному в зависимости от взаимного расположения $\varphi'(x_0)$ и $\overline{W_2}$, $\widetilde{W_2}$, $\widetilde{W_1}$, $\overline{W_1}$. Пусть вначале $\widetilde{W_2} < \varphi'(x_0) < \widetilde{W_1}$.

В качестве минорантного уравнения возьмем

$$\frac{d\tilde{W}}{ds} = -(\tilde{W} - \tilde{W}_1)(\tilde{W} - \tilde{W}_2). \qquad (19)$$

Для $\tilde{W}$ зададим то же самое начальное условие, что и для w:

$$\tilde{W}|_{s=0} = w|_{s=0} = \varphi'(x_0). \qquad (20)$$

Лемма «Min1». Если $\tilde{W}_2 < \varphi'(x_0) < \tilde{W}_1$, (21)

то на всем интервале существования решения задачи (6)-(11) справедлива оценка

$$\tilde{W}_2 \le \tilde{W} \le w. \qquad (22)$$

Доказательство.

В силу (21) для s, близких к 0, $W_2 \le \tilde{W}_2 < w < \tilde{W}_1 \le W_1$.

Убедимся, что (19) будет минорантным уравнением для (17). Справедливы неравенства $\left|w - \tilde{W}_1\right| \le |w - W_1| \Rightarrow -\left(w - \tilde{W}_1\right) \le -(w - W_1)$, $w - \tilde{W}_2 \le w - W_2$.

Следовательно, $-\left(w - \tilde{W}_1\right)\left(w - \tilde{W}_2\right) \le -(w - W_1)(w - W_2)$, то есть,

$$-\left(w - \tilde{W}_1\right)\left(w - \tilde{W}_2\right) + (w - W_1)(w - W_2) \le 0. \qquad (23)$$

Вычтем из уравнения (19) уравнение (17):

$$\frac{d\tilde{W}}{ds} - \frac{dw}{ds} = -\left(\tilde{W} - \tilde{W}_1\right)\left(\tilde{W} - \tilde{W}_2\right) + (w - W_1)(w - W_2).$$

Прибавим и вычтем $(w - \tilde{W}_1)(w - \tilde{W}_2)$:

$$\frac{d\left(\tilde{W} - w\right)}{ds} = -\left(\tilde{W} - \tilde{W}_1\right)\left(\tilde{W} - \tilde{W}_2\right) + \left(w - \tilde{W}_1\right)\left(w - \tilde{W}_2\right) - \left(w - \tilde{W}_1\right)\left(w - \tilde{W}_2\right) + (w - W_1)(w - W_2).$$

С учётом (23)

$$\frac{d\left(\tilde{W} - w\right)}{ds} \le -\left(\tilde{W} - \tilde{W}_1\right)\left(\tilde{W} - \tilde{W}_2\right) + \left(\tilde{W} - \tilde{W}_1\right)\left(w - \tilde{W}_2\right) - \left(\tilde{W} - \tilde{W}_1\right)\left(w - \tilde{W}_2\right) + \left(w - \tilde{W}_1\right)\left(w - \tilde{W}_2\right),$$

откуда вытекает, что

$$\frac{d\left(\tilde{W} - w\right)}{ds} \le -\left(\tilde{W} - \tilde{W}_1\right)\left(\tilde{W} - w\right) - \left(w - \tilde{W}_2\right)\left(\tilde{W} - w\right).$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\frac{d\left(\tilde{W} - w\right)}{ds} \le \left(\tilde{W}_1 + \tilde{W}_2 - \tilde{W} - w\right)\left(\tilde{W} - w\right). \qquad (24)$$

Докажем, что $\tilde{W} \le w$. В точке $s = 0$ имеем $\tilde{W} = w$. Пусть начиная с некоторой точки s_0 (в частности, $s_0 = 0$) будет $\tilde{W} > w$. Тогда $\tilde{W} - w > 0$ в некоторой окрестности справа от точки s_0, а в точке s_0 $\tilde{W} - w = 0$. Тогда из (24) следует, что в этой окрестности

$$\frac{d\left(\tilde{W} - w\right)}{ds} \le \left|\tilde{W}_1 + \tilde{W}_2 - \tilde{W} - w\right|\left(\tilde{W} - w\right).$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла $\tilde{W} = w$. Полученное противоречие доказывает, что $\tilde{W} \le w$.

Решая уравнение (19) с условиями (20), (21), будем иметь

$$\tilde{W} = \frac{\tilde{W}_1 - \tilde{W}_2 K}{1 - K}, \qquad \text{где } K := \frac{\varphi'(x_0) - \tilde{W}_1}{\varphi'(x_0) - \tilde{W}_2} e^{-\left(\tilde{W}_1 - \tilde{W}_2\right)s}. \qquad (25)$$

Так как в силу (21) $K < 0$, то из (25) следует, что $\tilde{W}_2 \le \tilde{W}$. А так как ранее доказано, что $\tilde{W} \le w$, то получаем утверждение леммы: $\tilde{W}_2 \le \tilde{W} \le w$.

Допустим теперь, что $\tilde{W}_2 < \varphi'(x_0) \le \overline{W}_1$, и построим при этом условии для (17) мажорантное уравнение. Чтобы включить в рассмотрение случай $\varphi'(x_0) = \overline{W_1}$, определим величину (функцию от x и t) $\overline{W_{1,\varepsilon}} = \overline{W_1} + \varepsilon, \varepsilon > 0$.

В качестве мажорантного уравнения возьмем:

$$\frac{d\overline{W}}{ds} = -(\overline{W} - \overline{W_{1,\varepsilon}})(\overline{W} - \overline{W_2})$$

с тем же самым начальным условием, что и для W:

$$\overline{W}\,|_{s=0} = w|_{s=0} = \varphi'(x_0).$$

Лемма «Max1». При $\tilde{W}_2 < \varphi'(x_0) \le \overline{W_1}$ (26)

на всем интервале существования решения задачи (6)-(11) справедлива оценка

$$w \le \overline{W} \le \overline{W_1}. \qquad (27)$$

Доказательство этой леммы производится по той же схеме, что и доказательство леммы **«Min1»**.

Рассмотрим ситуацию, когда $\varphi'(x_0) \ge \tilde{W}_1$. Чтобы включить в рассмотрение случай, когда $\varphi'(x_0) = \tilde{W}_1$, определим $\tilde{W}_{1,\varepsilon} = \tilde{W}_1 - \varepsilon$ и в качестве минорантного уравнения возьмем

$\dfrac{d\breve{W}}{ds} = -\left(\breve{W} - \tilde{W}_{1,\varepsilon}\right)\left(\breve{W} - \overline{W_2}\right)$ с тем же самым начальным условием $\tilde{W}\,|_{s=0} = w|_{s=0} = \varphi'(x_0)$.

Лемма «Min2». Если $\tilde{W}_1 \le \varphi'(x_0)$, (28)

то на всем интервале существования решения задачи (6)-(11) справедлива оценка

$$\tilde{W}_1 \le \breve{W} \le w. \qquad (29)$$

Доказательство этой леммы производится по той же схеме, что и доказательство леммы **«Min1»**.

Для вывода оценки сверху при $\varphi'(x_0) > \overline{W_1}$ рассмотрим мажорантное уравнение

$\dfrac{d\widehat{W}}{ds} = -(\widehat{W} - \overline{W_1})(\widehat{W} - \tilde{W}_2)$ с тем же самым начальным условием $\widehat{W}\,|_{s=0} = w|_{s=0} = \varphi'(x_0)$.

Лемма «Max2». Если $\overline{W_1} < \varphi'(x_0)$, (30)

то на всем интервале существования решения задачи (6)-(11) справедлива оценка

$$w \le \widehat{W} \le \varphi'(x_0). \qquad (31)$$

Доказательство этой леммы, как и следующих двух лемм, производится по той же схеме, что и доказательство леммы **«Min1»**.

Лемма «Max3». Если $\varphi'(x_0) = \tilde{W}_2,$, (32)

то на всем интервале существования решения задачи (6)-(11) справедлива оценка

$$w \le \ddot{W} \le \overline{W_1}, \qquad (33)$$

где $\ddot{W}$ является решением следующего мажорантного уравнения

$$\frac{d\ddot{W}}{ds} = -(\ddot{W} - \overline{W_1})(\ddot{W} - W_\gamma),$$

в котором W_γ выбирается меньше, чем $\overline{W_2}$.

Лемма «Min3». Если $\varphi'(x_0) = \tilde{W}_2$, (32)

то на всем интервале существования решения задачи (6)-(11) справедлива оценка

$$\varphi'(x_0) \le \ddot{W} \le w, \qquad (34)$$

где $\dddot{W}$ является решением следующего минорантного уравнения

$$\frac{d\dddot{W}}{ds} = -(\dddot{W} - \widetilde{W}_1)(\dddot{W} - \widetilde{W}_2)$$

с начальным условием

$$\dddot{W}\,|_{s=0} = \varphi'(x_0) - \varepsilon.$$

На основе оценок, установленных в леммах, запишем искомую глобальную оценку для $w(s,t,x)$. Обозначим $W_1^0 = \sup\limits_{R(TK)} \left|\overline{W_1}\right|$, $W_2^0 = \sup\limits_{R(TK)} \left|\widetilde{W}_2\right|$, $N_w := \max\left\{W_1^0, W_2^0, N_\varphi\right\}$. Суммируя условия (21), (26), (28), (30) , (32) и оценки (22), (27), (29), (31), (33), (34), приходим к выводу, что при выполнении неравенства

$$\widetilde{W}_2 \le \varphi'(\eta(0,t,x)) \tag{35}$$

будет иметь место глобальная оценка

$$|W| \le N_w. \tag{36}$$

Оценки (15) и (36) справедливы при всех $0 \le s \le t$, в том числе и при $s = t$, то есть, они сохраняются для $u(t,x) = V(t,t,x)$, $q(t,x) = W(t,t,x)$:

$$|u(t,x)| \le N_\varphi, \tag{37}$$

$$|q(t,x)| \le N_w. \tag{38}$$

Перед тем, как перейти к выводу заключительной глобальной оценки для $\partial_x W$, докажем здесь важное для всей теории тождество:

$$v(s,t,x) = v(s,s,\eta(s,t,x)) = u(s,\eta(s,t,x)). \tag{39}$$

Дифференцируя $u(s,\eta(s,t,x))$ по s, получим

$$\frac{du(s,\eta)}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d\eta}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + v(s,t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(s,\eta)}{\partial t} + u(s,\eta)\frac{\partial u(s,\eta)}{\partial x} - (u - V)q(s,\eta) =$$
$$= -U(s,\eta,u(s,\eta))u(s,\eta) - (u - v)q(s,\eta).$$

Вычитая (7) из последнего равенства, будем иметь

$$\frac{d(u-v)}{ds} = -U(s,\eta,u)u + U(s,\eta,v)v - (u-v)q(s,\eta).$$

Переписав последнее уравнение в виде

$$\frac{d(u-v)}{ds} = -U(s,\eta,u)(u-v) + \left[U(s,\eta,v) - U(s,\eta,u)\right]v - (u-v)q(s,\eta),$$

интегрируя его от 0 до s и учитывая, что $u(0,\eta(0,t,x)) = \varphi(\eta(0,t,x)) = v(0,t,x)$, придем к интегральному уравнению относительно $u(s,\eta(s,t,x)) - v(s,t,x)$:

$$u - v = \int\limits_0^s \left[-U(\tau,\eta,u)(u-v) + \left(U(\tau,\eta,v) - U(\tau,\eta,u)\right)v - (u-v)q(\tau,\eta)\right]d\tau.$$

Оценивая правую часть, получим

$$|u - v| = N_1 \int\limits_0^s |u - v|\,d\tau \text{ , где } N_1 = \text{const}.$$

В силу леммы Гронуолла $u(s,\eta) = v(s,t,x)$.

С учетом (39) уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = u(s,\eta(s,t,x)).$$

Дифференцируя его по x, получим

$\frac{d\partial_x \eta(s,t,x)}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\partial_x \eta(s,t,x)$, следовательно, $\frac{d\partial_x \eta}{ds} = q(s,\eta)\partial_x \eta$.

Интегрируя последнее уравнение от s до t, с учетом того, что $\partial_x \eta(t,t,x) = 1$, получим

$$\partial_x \eta(s,t,x) = e^{\int_s^t q(\tau,\eta)d\tau}.$$

Откуда $\left|\partial_x \eta(s,t,x)\right| \le N_\eta$, где $N_\eta := e^{N_w T}$. (40)

Теперь мы можем оценить

$\partial_x v(s,t,x) = \partial_x \left[u(s,\eta(s,t,x))\right] = \partial_x u(s,\eta)\partial_x \eta = q(s,\eta)\partial_x \eta$, следовательно,

$$\left|\partial_x v(s,t,x)\right| \le N_w N_\eta. \tag{41}$$

Перейдем к выводу глобальной оценки для $\partial_x w(s,t,x)$. Продифференцируем уравнение (8) и начальное условие (11) по x. В пределах этого вывода для сокращения записей будем обозначать производную по x от функций v,η,w нижним индексом. Также через $A_1(s,x,y)$ обозначим производную функции $A(s,x,y)$ по x, а через $A_2(s,x,y)$ - производную функции $A(s,x,y)$ по y. Для вторых производных от функции $U(s,x,y)$ введем соответствующие обозначения:

$U_{12}(s,x,y) := \partial_x \partial_y U(s,x,y), U_{11}(s,x,y) := \partial_x^2 U(s,x,y), U_{22}(s,x,y) := \partial_y^2 U(s,x,y).$

Таким образом, $A_1(s,x,y) = U_1(s,x,y) + U_{12}(s,x,y)y$,

$A_2(s,x,y) = U_2(s,x,y) + U_2(s,x,y) + U_{22}(s,x,y)y$.

Также обозначим

$$C_U := \sup_{R(TK)}\left|U(t,x,y)\right|, C_U^{(i)} := \sup_{R(TK)}\left|U_i(t,x,y)\right|, C_U^{(ij)} := \sup_{R(TK)}\left|U_{ij}(t,x,y)\right|, i=1,2,\ j=1,2$$

С этими обозначениями

$\left|A_1(s,\eta,v)\right| \le \left|U_1\right| + \left|U_{12}\right|\cdot\left|v\right| \le C_U^{(1)} + C_U^{(12)}N_\varphi,$

$\left|A_2(s,\eta,v)\right| \le 2\left|U_2\right| + \left|U_{22}\right|\cdot\left|v\right| \le 2C_U^{(2)} + C_U^{(22)}N_\varphi.$

В результате дифференцирования задачи (8), (11) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw_x}{ds} = -2ww_x - A(s,\eta,v)w_x - A_1(s,\eta,v)w\eta_x - A_2(s,\eta,v)v_x w - \\ -U_{11}(s,\eta,v)v\eta_x - U_{12}(s,\eta,v)vv_x - U_1(s,\eta,v)v_x \tag{42}$$

с начальным условием

$$w_x(0,t,x) = \varphi''(\eta(0,t,x))\eta_x(0,t,x). \tag{43}$$

Обозначим

$F := A_1(s,\eta,v)w\eta_x + A_2(s,\eta,v)v_x w + U_{11}(s,\eta,v)v\eta_x + U_{12}(s,\eta,v)vv_x - U_1(s,\eta,v)v_x,$

$P := 2w + A(s,\eta,v).$

Для всех входящих в F и P функций уже получены глобальные оценки. Так что $\left|F\right| \le N_F, \left|P\right| \le N_P$, где

$$N_F := \left(C_U^{(1)} + C_U^{(12)}N_\varphi\right)N_w N_\eta + \left(2C_U^{(2)} + C_U^{(22)}N_\varphi\right)\left(N_w\right)^2 N_\eta + C_U^{(11)}N_\varphi N_\eta + \\ + C_U^{(12)}N_\varphi N_w N_\eta + C_U^{(1)}N_w N_\eta, N_P := 2N_w + C_U + C_U^{(2)}N_\varphi.$$

Из задачи Коши (42), (43) для w_x следует явное выражение

$$w_x(s,t,x) = \varphi''(\eta(0,t,x))\eta_x(0,t,x)e^{-\int_0^s P d\tau} - \int_0^s e^{-\int_\sigma^s P d\tau} F d\sigma,$$

которое дает возможность записать глобальную оценку для $w_x(s,t,x) = \partial_x w(s,t,x)$:

$$\left|\partial_x w(s,t,x)\right| \le N_w^{(1)}, \tag{44}$$

где $N_w^{(1)} = N_\varphi N_\eta e^{N_P T} + TN_F e^{N_P T}$.

Оценка (44) справедлива при всех $s \in [0,t]$, поэтому она остается справедливой и для $\partial_x q(t,x) = \partial_x w(t,t,x) : \left|\partial_x q(t,x)\right| \le N_W^{(1)}$.

А так как $q(t,x) = \partial_x u(t,x)$, то тем самым получена оценка для $\partial_x^2 u(t,x)$:

$$\left|\partial_x^2 u(t,x)\right| \le N_w^{(1)}.$$

Полученные глобальные оценки для $u, \partial_x u = q, \partial_{xx} u = \partial_x q$ дают возможность продолжить решение на весь заданный интервал $[0,T]$.

Беря в качестве начального значения $u(T_0,x)$, продлим решение на некоторый интервал $[T_0,T_1]$, а затем беря в качестве начального значения $u(T_1,x)$, продлим решение на промежуток $[T_1,T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется глобальными оценками, справедливыми на любом промежутке разрешимости.

В частности, начальные значения

$$u(T_k,x) \in \overline{C}^2(R^1), \left|u(T_k,x)\right| \le N_\varphi, \left|\partial_x u(T_k,x)\right| \le N_w, \left|\partial_x^2 u(T_k,x)\right| \le N_w^{(1)}$$

для всех $k = 0,1,\dots,n, x \in R^1$.

В результате решение за конечное число шагов может быть продлено на весь заданный промежуток $[0,T]$.

Общий итог исследования представим в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2

Пусть $\varphi \in \overline{C}^2(R^1), U \in \overline{C}^{1,2,2}(R(TN_\varphi))$ и выполнены условия (14), (16), (18), (35), тогда задача Коши (2)-(3) имеет единственное решение $u \in \overline{C}^{1,2}([0,T] \times R^1)$.

Библиографический список

1. **Chen, G.-Q.** The Cauchy problem for the Euler equations for compressible fluids / G.-Q. Chen, D. Wang //Handbook of mathematical fluid dynamics. – North-Holland, Amsterdam, I (2002). -P. 421-543.
2. **Седов, Л. И.** Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1973. Т .2. – 584 с.
3. **Лойцянский, Л. Г.** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
4. **Рождественский, Б.Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
5. **Иманалиев, М.И.** К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. АН. 1992. Т.323. №3. С. 410-414.
6. **Иманалиев, М.И.** К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. АН. 1992. Т.325. №6. С. 1111-1115.
7. **Иманалиев, М.И.** К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. АН. 1993. Т.329. №5. С. 543-546.

8. **Иманалиев, М.И.** К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. РАН. 2001. Т.379. №1. С. 16-21.
9. **Иманалиев, М.И.** Метод дополнительного аргумента / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, –С.Н. Алексеенко // Вестник Казахского Нац. Университета. Серия матем., механика, информ. Специальный выпуск. 2006. № 1. Алматы. С. 60-64.
10. **Алексеенко, С.Н.** Применение метода дополнительного аргумента к исследованию глобальной разрешимости и выявлению иных свойств решений квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2005. Т. 5. № 7. С. 5–11.

Дата поступления
в редакцию 04/04/2011

S.N. Alekseenko, E.A. Elkina

APPLYING THE METHOD OF AN ADDITIONAL ARGUMENT TO AN INVESTIGATION OF A NONLOCAL SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR FIRST ORDER EQUATIONS WITH DIFFERENTIAL OPERATOR OF TOTAL DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME TYPE

Conditions of a solvability of a Cauchy problem on the given finite interval [0, T] of a variation of the argument *t* which in physical problems usually denotes time is obtained for an equation with differential operator of the total derivative with respect to time type. The proof of the nonlocal solvability relies on global estimates obtained with usage of the majorizing equations.

Key words: method of an additional argument, Cauchy problem, global estimates.