УДК 53.088.23

С.Е. Пилипосян

УЧЕТ КОРРЕЛЯЦИИ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ *T* И РАССТОЯНИЯ *a* ЦЕНТРА МАСС ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ОТ ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Выявление и учет корреляций измеряемых на эксперименте физических величин важны для правильной оценки характера и значений погрешностей проведенных измерений. Надежность оценки погрешностей измерений повышает ценность экспериментальных данных. На примере одной работы показано, что если не учитывать корреляцию периода колебаний T и расстояния a центра масс физического маятника от оси вращения, то это приведет к неправильной оценке погрешностей измерения центрального момента инерции твердого тела.

Приведена зависимость погрешности измерения координат точки центра масс неоднородного твердого тела от его радиуса инерции, условий эксперимента (параметр λ), а также от точности измерения времени и расстояния.

Ключевые слова: коэффициент корреляции случайных величин, погрешности измерения коррелированных величин, оценка физического фона и корреляция величин.

Введение

Механизм развития фундаментальной науки таков, что результаты опыта выступают в роли судьи в процессе оценки справедливости тех или иных теоретических моделей действительности. Критерием справедливости конкретной теоретической модели (из множества существующих) является степень согласия ее предсказаний с результатами эксперимента, где измеряются различные физические величины во всем диапазоне их значений. Поэтому уровень точности измерения физических величин оказывается очень важным. В истории физики известно много случаев, когда доступная в данный момент точность проведенного измерения оказалась недостаточной для обнаружения малого эффекта, связанного с неизвестным явлением, открытие которого происходило, как правило, значительно позже. Созданию самосогласованной, непротиворечивой физической теории предшествует длительный период накопления надежных, заслуживающих доверия опытных данных. Феноменологический анализ экспериментальных данных позволяет отобрать из множества возникающих гипотез и теоретических моделей те, которые более точно отражают реальность.

Именно надежность опытных данных поляризационных экспериментов, проведенных со световыми волнами на монокристаллах позволили Т. Юнгу и О. Френелю утверждать, что световые волны, которые в то время считались колебаниями Эфира, являются поперечными волнами. Предполагаемые механические свойства Эфира с нулевым модулем упругости сдвига (среда, не препятствующая движению тел) никак не согласовывались с возможностью его поперечных колебаний, тем более с частотой видимого света $\nu \approx 5 \cdot 10^{14}$ Гц. Поэтому Ф.Д. Араго, будучи научным руководителем О. Френеля, свою подпись под эту работу не поставил, и, как показали дальнейшие события, напрасно.

Именно надежность имеющихся экспериментальных данных по тепловому равновесному излучению абсолютно черного тела и их противоречие с предсказаниями теории излучения электромагнитных волн в классической электродинамике дали основание Максу Планку в 1899 году сделать смелое предположение о том, что электромагнитные волны могут излучаться порциями (квантами), обладающими определенной частотой, энергией и длиной волны. Это устранило противоречия, состыковало (зашнуровало) опытные данные по излучению волн в области высоких и низких частот и стало началом новой - квантовой – физики.

Именно огромная и надежная экспериментальная база, на которую в начале двадцатого века опирались и классическая механика и уже установившаяся теория электромагнитного поля (благодаря трудам Дж.К. Максвелла, Г.Р. Герца, О. Хевисайда, Х Лоренца, Дж.Г. Пойнтинга, П.Н. Лебедева), не удовлетворяющая принципу относительности Галилея, дали основание Анри. Пуанкаре, Х. Лоренцу, М. Гроссману и А. Эйнштейну уверенно искать и, в конечном итоге, создать единую физическую теорию на основе трех всеобщих принципов - принципа относительности, принципа эквивалентности и принципа причинности (близкодействия). Таким образом, были созданы сначала частная теория относительности (1905 г.), а затем и общая теория относительности (1916 г.), после чего отпала необходимость в гипотетическом Эфире. Конечно же, в этом процессе очень важную роль сыграли точные измерения в знаменитом эксперименте Альберта Абрахама Майкельсона и Морли.

Все сообщество исследователей в мире делиться на две большие группы – экспериментаторов и теоретиков. Экспериментаторам лучше других удается провести точные измерения в удачно выбранных экспериментах и таким образом способствовать установлению истины. Теоретикам же лучше удается установить истину аналитическим путем, как говориться, на кончике своего пера. Иногда теоретическое открытие является не только обобщающим результатом теории и эксперимента, но и метафизическим угадыванием истины, способным предсказывать новые, неожиданные явления, как, например, это имело место в случае общей теории относительности [1].

Поэтому важно как можно точнее оценить характер и величину погрешностей проведенных измерений, обусловленных различными источниками. Зачастую проведение основного измерения оказывается более легкой задачей, чем точная оценка систематических и статистических погрешностей проведенных измерений. Более того, приведенные значения погрешностей должны содержать информацию о доверительной вероятности этих погрешностей [2, 3].

Измеренные (экспериментальные) средние значения физической величины без представления значений допущенных при этом погрешностей, не представляют особой ценности. Эти данные не могут сыграть роль судьи и не могут быть включены в теоретический анализ экспериментальных данных[4, 5]. Такие экспериментальные данные вызывают недоверие у научной общественности и у теоретиков, в частности.

В крупных научных центрах мира полученные экспериментальные данные обычно сначала анализируются теоретиками этого же центра, а планируемые в будущем важные эксперименты особо не рекламируются. Это позволяет крупным научным коллективам соблюдать свой корпоративный интерес.

Корреляции случайных величин

Величины, подчиняющиеся статистическим законам, называются случайными величинами. Законы эти очень точные и строгие, хотя они описывают поведение той или иной случайной величины. Например, закон радиоактивного распада, излучение кванта электромагнитного поля возбужденным атомом, столкновение частиц и так далее

Произведение, или, *совмещение* двух событий A и B записывается в виде $A\cdot B$. Под этим понимается такое событие, когда совместно наступают оба события (как A, так и B). Если эти события статистически независимы, т. е. вероятность наступления одного не зависит от того, осуществилось или не осуществилось другое, то $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. То есть вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Для независимых случайных величин **x** и **y** с непрерывным спектром значений (например, для времени T и расстояния a) имеет место равенство

$$P(x, y)=P(x)\cdot P(y).$$

Ввиду этого соотношения и согласно определению средних значений случайных величин, очевидно, что для независимых случайных величин **x** и **y**

$$\overline{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})}=\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}.$$

Следовательно, для независимых случайных величин **x** и **y:**

$$\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}=\overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{y}}}-\overline{\overline{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}+\overline{\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}}=\overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}=\overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}=0.$$

Таким образом, величина (значение) математического ожидания произведения $\Delta\mathbf{x}\cdot\Delta\mathbf{y}$, показывает, насколько сильно (жестко) зависят друг от друга **x** и **y**.

$$\overline{\Delta\mathbf{x}\cdot\Delta\mathbf{y}}=\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}=\overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}=?$$

Если величины **x** и **y** рассматривать как отображающие порознь некоторые подсистемы заданной общей физической системы, описываемой всей совокупностью величин **x** и **y**, то вероятность общей системы определяется вероятностями подсистем **x** и **y**, при условии, что эти подсистемы независимы. То есть между подсистемами не существует физических взаимодействий. При наличии взаимодействий, обусловливающих статистическую зависимость подсистем, по вероятностям подсистем в общем случае нельзя определить вероятность для всей общей системы. Поэтому для статистически зависимых случайных величин справедливо условие $\overline{\Delta\mathbf{x}\cdot\Delta\mathbf{y}}=\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}=\overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}\neq 0$.

Величину центрального момента второго порядка $\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}$ принято называть «корреляцией» случайных величин **x** и **y**, поскольку она характеризует взаимосвязь или корреляцию между случайными величинами **x** и **y**.

Наиболее удобной мерой корреляции двух случайных величин **x** и **y** считается «коэффициент корреляции» [4]

$$R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\frac{\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}}{\sqrt{\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^2}}\sqrt{\overline{(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})^2}}}=\frac{\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}}{\sqrt{D(\mathbf{x})D(\mathbf{y})}}=\frac{\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}}{\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})}=\frac{\overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}}{\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})}. \quad (1)$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, обладающая свойствами:

1) если **x** и **y** независимы, то коэффициент корреляции $R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=0$;

2) если связь между **x** и **y** – линейная, так что совместные независимые испытания этих величин дают в результате такие пары этих случайных величин *x* и *y*, которые удовлетворяют линейному соотношению $x=\alpha y$, с фиксированным значением $\alpha\neq 0$, то коэффициент корреляции будет $R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\pm 1$, где для положительных значений α берется знак плюс, а для отрицательных значений α знак минус.

3) если $0<R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})<1$, то корреляция называется положительной, тогда как в случае $0>R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})>-1$ корреляция между **x** и **y** – называется отрицательной.

Положительная корреляция означает, что совместные независимые испытания случайных величин **x** и **y** чаще приводят к таким парам *x* и *y*, когда обе величины отклоняются в одну и ту же сторону от своих средних значений (обе оказываются меньше своего среднего значения или больше). В случае отрицательной корреляции совместное испытание **x** и **y** приводит к результату, когда их значения чаще отклоняются в противоположные стороны от своих ожидаемых значений.

Следует подчеркнуть, что выполнение условия $R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=0$ не является достаточным для независимости **x** и **y**, тогда как независимость **x** и **y** является достаточным для выполнения условия $R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=0$. Действительно, рассмотрим двумерное распределение вероятностей, удовлетворяющее условию

$$p(\pm x,\ \pm y)=p(|x|,\ |y|).$$

Согласно этому равенству, вероятность проявления значения (*x* или *y*) случайной величины (**x** или **y**) зависит только от модуля этого значения и одинакова как для отрицательных, так и для положительных значений. Функции распределения плотности вероятностей и для **x** и для **y** идентичны для обеих полуосей этих величин. Функция распределения плотности вероятности $p(|x|,\ |y|)$для двумерной случайной величины $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ будет симметричной относительно начала координат плоскости *XOY*. Поэтому для средних значений случайных величин $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}$ получим

$$\langle\mathbf{xy}\rangle\equiv\overline{\mathbf{xy}}=0,\ \ \langle\mathbf{x}\rangle\equiv\overline{\mathbf{x}}=-\langle\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x}\rangle=0,\ \ \langle\mathbf{y}\rangle\equiv\overline{\mathbf{y}}=-\langle\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y}\rangle=0.$$

Следовательно, коэффициент корреляции в этом случае будет

$$R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\frac{\overline{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}}{\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})}=\frac{0-0\cdot0}{\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})}=0.$$

Окончательный вывод зависит от выполнения или невыполнения условия $p(|x|,\ |y|)=p_1(|x|)\,p_2(|y|)$ в действительности. Если это условие не выполняется, то случайные величины $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коррелированны и не являются независимыми.

Если коэффициент корреляции $R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\pm1$, то существует прямая нестатистическая связь между случайными величинами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Но прямая нестатистическая связь между двумя случайными величинами может быть и при

$$0<|R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})|<1.$$

Если в результате совместных испытаний между парами x и y достоверно проявится связь $y=f(x)$, где явный вид функции $f(x)$ можно получить путем подгонки экспериментального распределения точек испытаний $(x_i,\ y_i)$ на плоскости *XOY*, то коэффициент корреляции, определяемый выражением

$$R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\frac{\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})}}{\sqrt{\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^2}}\sqrt{\overline{(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})^2}}}=\frac{\overline{\mathbf{x}\cdot f(\mathbf{x})}-\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{f(\mathbf{x})}}{\sigma(\mathbf{x})\sigma(f(\mathbf{x}))}\neq\pm1,$$

в общем случае по модулю не равен единице. Более того, как видно из полученного выражения, если функция $f(x)$ окажется четной функцией $f(-x)=f(x)$, то $R(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=0$. Таким образом, коэффициент корреляции может равняться нулю даже в том случае, когда существует сильная (жесткая) связь между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Более тонкие эффекты статистической зависимости (корреляции) случайных величин могут быть учтены корреляционными моментами более высоких порядков: $\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^{\mathrm{n}}(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})^{\mathrm{m}}}$.

При измерении момента инерции твердого тела J_c возникает ситуация, напоминающая изопроцессы в идеальных газах, когда один из параметров состояния газа *P*, *V*, *T*, связанных уравнением Клапейрона-Менделеева $\frac{PV}{T}=\frac{m}{\mu}R=\mathrm{const}$, в ходе изменения состояния газа остается постоянным. В таких изопроцессах независимым является только один параметр.

Если ни один из трех параметров не фиксирован, то имеется возможность любую двойку из трех параметров выбрать в качестве независимых переменных (аргументов), а третий параметр найти как функцию от этих аргументов, исходя из требования справедливости уравнения Клапейрона-Менделеева. Например, если в качестве независимых переменных выбрать давление и объем газа (*P* и *V*), то температура *T* окажется функцией от них:

$$T=\frac{PV}{\nu R}=\frac{PV}{C}\quad\text{и}\quad\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{C},\ \ \frac{\partial T}{\partial V}=\frac{P}{C}.$$

Если независимыми переменными выбрать *P* и *T*, то *V* окажется функцией от них:

$$V=\frac{\nu RT}{P}=\frac{CT}{P}\quad\text{и}\quad\frac{\partial V}{\partial P}=-\frac{CT}{P^2},\ \ \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{C}{P}.$$

Если же в качестве независимых выбрать V и T, то P окажется функцией от них:

$$P=\frac{\nu RT}{V}=\frac{CT}{V} \text{ и } \frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{CT}{V^2},\ \frac{\partial P}{\partial T}=\frac{C}{V}.$$

С учетом этих выражений для частных производных получим

$$\frac{\partial P}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial P}=\frac{C}{V}\cdot\frac{P}{C}\cdot\left(-\frac{CT}{P^2}\right)=-\frac{CT}{PV}=-1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}\cdot=\left(-\frac{CT}{V^2}\right)\cdot\frac{C}{P}\cdot\frac{V}{C}=-\frac{CT}{PV}=-1.$$

Умножение обычных производных привело бы к результату, равному $+1$.

Полученный несколько неожиданный результат, являющийся важным в теории термодинамических потенциалов, указывает на необходимость учета условий, при которых определяются частные производные заданной функции.

Погрешность измерения момента инерции твердого тела

Определим зависимость относительной погрешности измерения J_c от погрешности измерения *a*, без учета корреляции между случайными величинами a и *T*, то есть, считая их независимыми, следуя работе [6]. При этом сохраним обозначения нашей работы.

Пусть при эксперименте имело место равенство: $a=\lambda R_c$ и величина a определяется с абсолютной погрешностью, составляющей некоторую долю величины R_c. То есть $\Delta a=\alpha R_c$, или $\alpha=\Delta a/R_c$, где α некоторое число, обычно много меньше единицы $\alpha<<1$.

Погрешность измерения будет приемлемой, когда $\varepsilon_a=\dfrac{\Delta a}{a}=\dfrac{\alpha}{\lambda}<<1$, то есть при выполнении условия $\alpha<<\lambda$. Приращение J_c, согласно формуле

$$J_c=maT^2g/\left(4\pi^2\right)-ma^2=ma\left(T^2g/\left(4\pi^2\right)-a\right)=mR_c^2, \tag{3}$$

где T период малых гармонических колебаний тела вокруг оси вращения, по мнению авторов работы [6], будет

$$J_c\left(\left(a+\Delta a\right),\ T\right)=m\left(a+\Delta a\right)\left(\frac{gT^2}{4\pi^2}-\left(a+\Delta a\right)\right), \tag{4}$$

где период колебаний определяется выражением

$$T^2=\frac{4\pi^2}{g}L_{\text{пр}}=\frac{4\pi^2}{g}\left(a+R_c^2/a\right)=\frac{4\pi^2}{g}R_c\left(\lambda+\lambda^{-1}\right). \tag{5}$$

Очевидно, *T* зависит от *a*. Следовательно, приращение Δa приведет к соответствующему изменению ΔT периода *T*, которым авторы работы [6] в формуле (4) безосновательно пренебрегают. Полученные в [6] результаты содержат последствия этой ошибки и отличаются от правильных результатов тем больше, чем больше значение приращения $\Delta a=\alpha R_c$. Действительно, если считать, что *T* не зависит от *a*, то для приращения $J_c+\Delta J_c$ получим

$$J_c+\Delta J_c=J_c\left(\left(a+\Delta a\right),\ T\right)=m\left(a+\Delta a\right)\left(\frac{gT^2}{4\pi^2}-\left(a+\Delta a\right)\right)=$$

$$=m\left(a+\Delta a\right)\left(R_c\left(\lambda+\lambda^{-1}\right)-\left(a+\Delta a\right)\right)=m\left(\lambda R_c+\alpha R_c\right)\left(R_c\left(\lambda+\lambda^{-1}\right)-\left(\lambda R_c+\alpha R_c\right)\right)=$$

$$=mR_c^2\left(\lambda+\alpha\right)\left(\lambda^{-1}-\alpha\right)=J_c\left(1-\alpha\left(\alpha+\lambda-\lambda^{-1}\right)\right)=J_c-J_c\alpha\left(\alpha+\lambda-\lambda^{-1}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta J_c=-J_c\alpha\left(\alpha+\lambda-\lambda^{-1}\right). \tag{6}$$

Поскольку $J_c > 0$, то ΔJ_c и $\alpha\left(\alpha+\lambda-\lambda^{-1}\right)$ имеют противоположные знаки.

Таким образом, при неизменной точности измерения a (при α = const.) относительная погрешность измерения момента инерции физического маятника по отношению к центральной оси определяется выражением

$$\frac{\Delta J_c}{J_c} = -\alpha\left(\alpha+\lambda-\lambda^{-1}\right) \quad \text{или} \quad \varepsilon_{J_c} = \frac{\left|\Delta J_c\right|}{J_c} = \alpha\left(\alpha+\lambda-\lambda^{-1}\right) \qquad (7)$$

и принимает нулевое значение при $\alpha+\lambda-\lambda^{-1}=0$.

Равноправное квадратное уравнение $\lambda^2+\alpha\lambda-1=0$ имеет только одно физическое решение: $\lambda_0=\sqrt{1+\left(\alpha/2\right)^2}-\alpha/2$. При приемлемой точности определения расстояния центральной оси тела от оси вращения выполняется условие $\alpha=\Delta a/a<<1$. Тогда из полученного решения следует, что $\lambda_0=a_0/R_c\approx 1$. То есть достаточно хорошо выполняется условие $a_0\approx R_c$.

По мнению авторов работы[6] это условие определяет оптимальное расстояние центральной оси физического маятника от оси вращения, для того чтобы абсолютно точно определить значение J_c.

Утверждение о том, что погрешность измерения момента инерции для некоторого расстояния a (для некоторого значения параметра λ) может равняться нулю независимо от погрешности измерения расстояния Δa является противоречивым, поскольку предполагает, что значение a известно точно. Авторы работы [6] не учли изменение периода колебаний T с изменением расстояния a и что время измеряется с некоторой погрешностью ΔT. В действительности, только в одной точке при $\lambda=1$ погрешность измерения расстояния Δa дает пренебрежимо малый вклад в погрешность измерения J_c, если вызванное этим значением Δa изменение среднего значения периода колебаний $\Delta\overline{T}$ пренебрежимо мало по сравнению с погрешностью измерения периода колебаний ΔT. Следовательно, более важной является зависимость $\left(dT/da\right)\equiv\left(dT/d\lambda\right)/R_c$ в широкой области определения λ.

Погрешность измерения момента инерции может равняться нулю только в том случае, если и расстояние a, и масса тела, и период колебаний измеряются абсолютно точно. Кроме того, в ходе измерения периода колебаний необходимо абсолютно точное соблюдение параллельности оси вращения и выбранного направления AA_1. То есть должно выполняться условие $R_c=\text{const}$. Необходимо также правильно оценить и учесть систематическую погрешность, обусловленную зависимостью периода колебаний от их амплитуды. Авторы монографии [7], ссылаясь на работу [6], не указали на некорректность оценки погрешности.

Предположим, что опытный образец по отношению к центральной оси, параллельной к заданному направлению AA_1, обладает радиусом инерции $R_c=5$ см и в то же время значение a измеряется с точностью $\Delta a=\alpha R_c=1$ мм, тогда $\alpha=\Delta a/R_c=0{,}02=2\%$.

В табл. 1 приведены значения $\Delta J_c/J_c$ $(\%)$ в зависимости от $\lambda=a/R_c$, согласно формуле (7), при $R_c=5$ см, $\Delta a=1$ мм.

Таблица 1

. Зависимость $\Delta J_c/J_c$ от λ при $R_c=5$ см, $\Delta a=1$ мм

λ	0,1	0,5	0,8	0,95	0,98	λ_o	1,0	1,02	1,05	1,2	1,5	2,0	3,0
$\Delta J_c/J_c$	19,7	2,96	0,86	0,17	0,04	0,00	0,04	0,12	0,24	0,77	1,63	3,04	5,34

На рис. 1 приведена относительная погрешность измерения $\Delta J_c/J_c$ в зависимости от λ согласно формуле (7). Эта зависимость представляет собой гиперболу с двумя асимптотами:

1) когда $\lambda \to 0$, то $\Delta J_c / J_c \to -\infty$;

2) когда $\lambda \to \infty$, то $\Delta J_c / J_c \to +\infty$, бесконечно приближаясь к прямой $\Delta J_c / J_c = \alpha\lambda + \alpha^2$, являющейся её асимптотой.

Очевидно, для интервала значений $0{,}95R_c \le a \le 1{,}05R_c$ при α = 0,02, величина J_c определяется с относительной погрешностью $\Delta J_c / J_c = 0{,}2\%$.

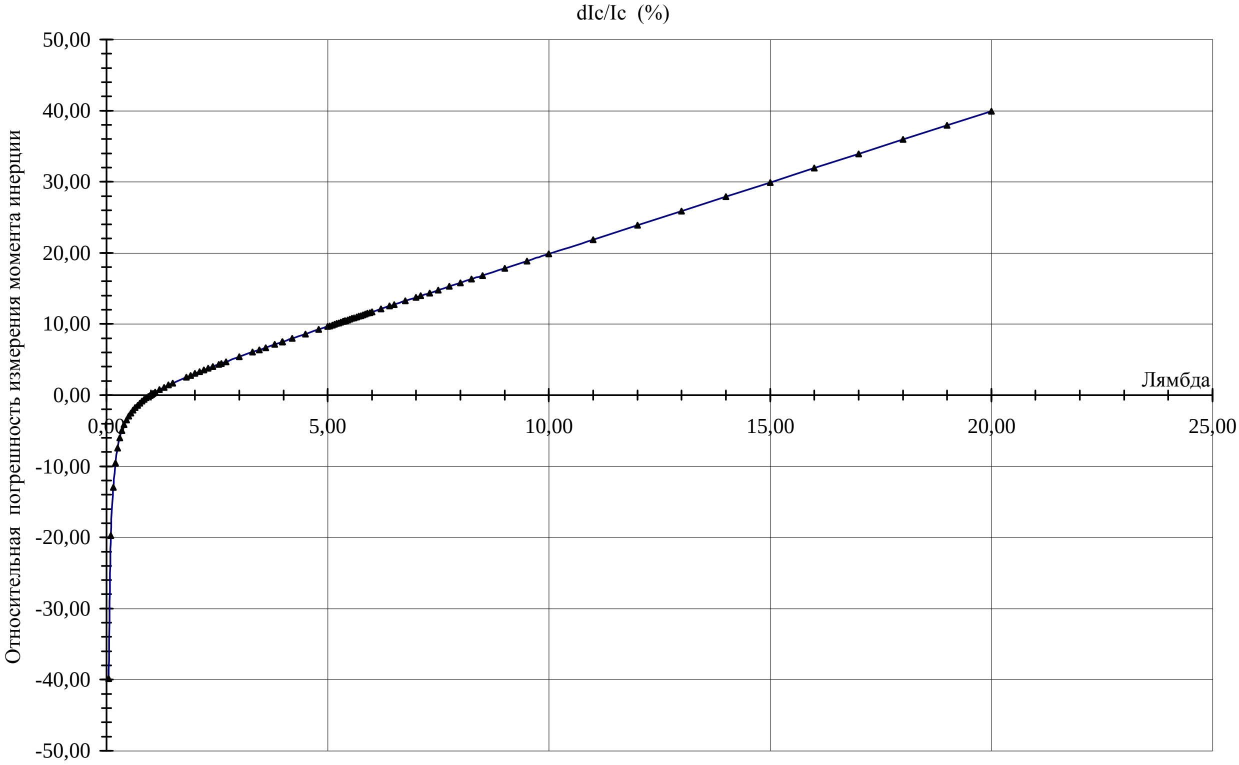

Рис. 1. Зависимость $\Delta J_c/J_c$ **от** λ **при** $R_c = 5$ см, $\Delta a = 1$ мм

В табл. 2 приведены значения величины $\Delta J_c / J_c$, $(\%)$ в зависимости от λ в случае, когда R_c=5,0 см, $\Delta a = \alpha R_c = 2{,}5$ мм и α = 0,05.

Таблица 2

Зависимость $\Delta J_c / J_c$ **от** λ **при** $R_c = 5$ см, $\Delta a = 2{,}5$ мм

λ	0,10	0,20	0,30	0.40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,9753	1,00
$\Delta J_c/J_c$	-49,	-23,8	-14,9	-10,3	-7,25	-5,08	-3,40	-2,0	-0,81	0,0	0,25
λ	1,05	1,20	1,40	1,60	1.80	2,00	3,00	4,00	5,00	10,00	20,0
$\Delta J_c/J_c$	0,74	2,42	3,68	4,92	6,5	7,75	13,6	19,0	24,3	49,3	100

Очевидно, погрешности определения J_c стали больше, чем при α = 0,02.

Таким образом, если не учитывать корреляцию между величинами a и T, то получается ошибочный результат для погрешности измерения J_c.

Погрешность измерения расстояния центра масс твердого тела от оси вращения

Отметим, что корреляции измеряемых на эксперименте физических величин в определенных случаях позволяют (помогают) выделить события исследуемого слабого эффекта, например, маловероятных двухчастичных процессов рождения или распада элементарных частиц в присутствии более интенсивных многочастичных фоновых событий, имитирующих события изучаемого процесса. Это происходит потому, что фоновые события от многочастичных реакций, как правило, распределены в пространстве и во времени практически изотропно и равномерно [8]. Поэтому всегда имеется возможность так ”нарушить кинематику” регистрации коррелированных физических величин исследуемой двухчастичной реакции, чтобы исключить ее регистрацию и при этом не изменить вероятность регистрации фоновых событий. Такие измерения фона в экспериментальной физике высоких энергий (физике элементарных частиц), принято называть измерениями фона при ”нарушенной кинематике” [8].

В заключение найдем важную для данной работы погрешность измерения величины d, которая представляется выражением

$$d=\frac{\left(T_{01}-T_{02}\right)}{k}=\frac{\left(T_{01}-T_{02}\right)}{2\left(dT/da\right)}=\frac{\sqrt{gR_c\left(\lambda+\lambda^3\right)}}{2\pi\left(\lambda-\lambda^{-1}\right)}\left(T_{01}-T_{02}\right). \tag{8}$$

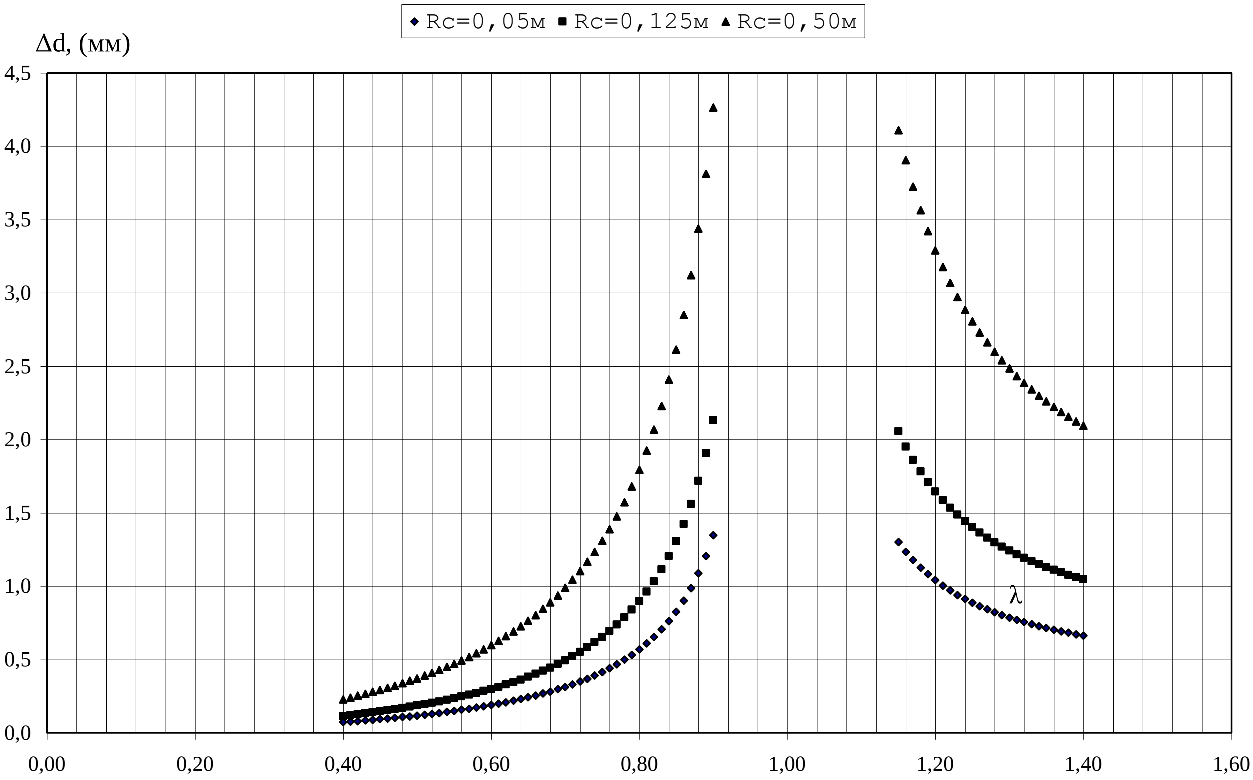

Рис. 2. Абсолютная погрешность измерения величины d

Абсолютная погрешность измерения расстояния d для фиксированных значений R_c и при условии измерения времени с погрешностью $\Delta T=0{,}001$ сек, будет

$$\Delta d=\frac{\sqrt{gR_c\left(\lambda+\lambda^3\right)}}{2\pi\left(\lambda-\lambda^{-1}\right)}\left(\Delta T_{01}+\Delta T_{02}\right)=\frac{\sqrt{gR_c\left(\lambda+\lambda^3\right)}}{\pi\left(\lambda-\lambda^{-1}\right)}\Delta T=\frac{\sqrt{gR_c\left(\lambda+\lambda^3\right)}}{\pi\left(\lambda-\lambda^{-1}\right)}0{,}001\text{ сек}. \quad (9$$

Поскольку a_o измеряется с погрешностью Δa_o = 0,5 мм, то при такой же погрешности измерения d расстояние $a=a_0+d$ центра масс твердого тела от оси вращения можно измерить с погрешностью не ниже Δa = 1,0 мм.

На рис. 2 приведен график функции (9) для трех значений радиуса инерции испытуемого тела $R_c=0{,}05$ м; $R_c=0{,}125$ м; $R_c=0{,}50$ м. Как видно на рис. 2, погрешность измерения

$\Delta d < 0{,}5$ мм, если измерение проводится при $\lambda < 0{,}8$; $\lambda < 0{,}7$; $\lambda < 0{,}55$ соответственно. Там же видно, что точность измерения d выше для малых значений λ.

Следовательно, в этих условиях положение точки центра масс неоднородного твердого тела можно определить с точностью не ниже 1 мм.

Библиографический список

1. **Захаров, В.Д**. Тяготение. От Аристотеля до Эйнштейна / В.Д. Захаров. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 278с.
2. **Гусак, А.А.**Высшая математика: в 2 т. /А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. Т. 2. – 448 с.
3. **Худсон, Д.** Статистика для физиков: [пер. с англ.] / Д. Худсон; под ред. Е.М. Лейкина. – М.: Мир, 1970. – 292 с.
4. **Яноши, Л.** Теория и практика обработки результатов измерений: [пер. с англ.] / Л. Яноши; под ред. Н.П. Клепикова. – М.: Мир, 1968. – 462 с.
5. **Гнеденко, Б.В.** Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1969. - 400 с.
6. **Каневский, М. М.** К вопросу об определении моментов инерции твёрдых тел по методу качений / М.М. Каневский, Ю.А. Гопп // Вестник инженеров и техников. 1934. №2.
7. **Гернет, М.М.** Определение моментов инерции / М.М. Гернет, В.Ф. Ратобыльский. – М.: Машиностроение, 1969. - 315 с.
8. **Пилипосян, С.Е.** Методы измерения физического фона и обработка экспериментальной информации в реакции $\gamma + p \to \eta^0 + p$ / С.Е. Пилипосян. – Ереван. 1979. – 29 с. (Препринт / ЕФИ-345(3) 79). ЯФ. Т. 32. Вып. 6(12). 1980. С. 1553–1559.

Дата поступления
в редакцию 02.04.2011

S.E. Piliposian

RECORDING OF CORRELATION OF VIBRATION PERIOD *T* AND DISTANCE *a* OF PHYSICAL PENDULUM CENTER OF MASS FROM AXIS OF ROTATION

Detection and recording of correlations between physical quantities that are measured during an experiment are essential for the correct estimation of the character and values of measurement errors. Reliability of measurement error estimations enhances the importance of experimental data. In another research effort, it was proved that miscalculation in estimation of measurement error of solid body central moment of inertia comes forth when the correlation of vibration period *T* and the distance *a* of physical pendulum center of mass from rotation axis is not taken into account.

The article contains the dependence of error of measurement of coordinates of heterogeneous solid body mass center point on the radius of its inertia, experiment conditions (parameter λ), as well as on time and distance measurement accuracy.

Key words: Correlation coefficient of random quantities, measurement error of correlated quantities, estimation of physical background and correlation of quantities.