

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 515.12

М.Е. Сангалова

### ЭКСПЕРИМЕНТЫ С МОДЕЛЯМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КАК ОСНОВА ПОНИМАНИЯ ИХ СТРОЕНИЯ И СВОЙСТВ

Арзамасский государственный педагогический институт им. А.П. Гайдара

Рассматривается организация экспериментальной работы студентов при изучении топологии в курсе «Дифференциальная геометрия и топология». Эксперименты с бумажными моделями топологических поверхностей открывают новую грань восприятия свойств этих поверхностей.

*Ключевые слова:* топология, эксперимент, образование в высшей школе.

Одной из тенденций инновационной школы (в том числе и высшей) является приобщение учащихся к научно-исследовательской деятельности, привитие интереса и развитие вкуса к такой деятельности. Эксперимент является классическим методом и обязательным элементом научного исследования. Однако он редко используется при обучении математике. Хотя в некоторых случаях именно эксперимент способен дать впечатляющие результаты и устранить затруднения.

При изучении курса «Дифференциальная геометрия и топология» студентам трудно понять многие топологические свойства поверхностей. Например, как «дыру» на сфере заклеить листом Мебиуса? Особенно сложны для восприятия односторонние поверхности: лист Мебиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость.

Устранению имеющихся затруднений способствует усвоение учащимися метода моделирования топологических поверхностей. Были выделены действия, составляющие этот метод [2]:

- 1) изготовление модели исследуемой фигуры (поверхности);
- 2) анализ модели: выделение существенных и несущественных признаков, выделение топологического строения поверхности;
- 3) использование топологических свойств поверхности;
- 4) сравнение топологических свойств различных поверхностей (проведение классификации);
- 5) эксперимент с моделью, подтверждающий правильность проведенного анализа.

Для успешного использования метода моделирования студенты должны овладеть каждым из этих действий. Это требует целенаправленной работы по формированию указанных действий.

Ключевым моментом усвоения метода моделирования поверхностей является формирование у учащихся понятия топологической модели. Для этого полезно предложить тестовые упражнения на разграничение понятий метрической и топологической модели. Приведем пример.

**Задача 1.** Какие из перечисленных предметов можно рассматривать как топологические модели плоскости: а) смятый в комок лист бумаги; б) резиновый мяч с прорезанной в нем дырой; в) треугольник; г) банка; д) прямоугольный параллелепипед; е) лист бумаги с двумя дырами?

В формировании понятия топологической модели поверхности у студентов важно, чтобы они не путали эту модель с метрической (то есть отображающей метрические свойства поверхности). Для этого, в частности, нужны упражнения на варьирование несущественными для топологии признаками (различными метрическими свойствами и прямолинейностью). Метрической моделью плоскости является лист бумаги (с допущением, что он имеет бесконечное продолжение во все стороны). Но смятый в комок лист бумаги все равно остается двусторонней поверхностью с одним краем, то есть является топологической моделью плоскости. Это же относится и к вариантам б), в), г). Прямоугольный параллелепипед не отображает свойство наличия краев, лист бумаги с двумя отверстиями имеет три края, что также не характеризует плоскость.

Изготовление топологической модели требует некоторой изобретательности. Если модель плоскости из бумаги изготовить легко (смотрите задачу 1), то с другими поверхностями это может оказаться не так.

**Задача 2.** Изготовьте бумажную модель поверхности тора.

Понятно, что изготовить из бумаги модель тора в ее традиционном представлении не получится. Однако если пренебречь его метрическими свойствами, а также прямолинейностью, то такую модель изготовить довольно просто: нужно лишь склеить свободные края бумажного цилиндра.

Очень важным является действие анализа модели. На начальном уровне сформированности это действие выглядит как анализ готовой модели (рассматриваются вопросы: какие свойства модели существенны и несущественны с точки зрения топологии, что надо изменить в модели, чтобы получить новую топологическую поверхность, что можно менять, не нарушая топологии поверхности). На высшем же уровне сформированности – это анализ мысленно созданной модели (правильность этого анализа может быть проверена с помощью изготовления модели). Приведем примеры.

**Задача 3.** Дана модель листа Мебиуса. Назовите топологические свойства этой поверхности. Какие манипуляции с моделью: а) не изменяют ее топологическую структуру; б) изменяют топологическую структуру. Как из этой модели получить модель плоскости?

**Задача 4.** Изготовить из бумаги модель для исследования топологических свойств сферы.

Такая модель должна обладать теми же топологическими свойствами, что и сфера: имеет две стороны, 0 краев, не имеет сквозных отверстий и ручек. То есть должна быть топологически эквивалентна сфере. Несущественными с точки зрения топологии являются метрические свойства и прямолинейность. Проведенный анализ позволяет выяснить, что в качестве требуемой модели может быть использована модель любого многогранника, изучаемого в школьном курсе геометрии: например, тетраэдра или куба. Подойдет даже заклеенный конверт.

При выполнении сравнения поверхностей ключевым является выделение топологического инварианта – основания для сравнения. А для этого необходимо развивать математическую интуицию, которая зачастую и указывает путь к решению. На начальном уровне это действие формируется решением задач на выбор основания для сравнения из некоего перечня.

При дальнейшей работе по усвоению учащимися данного действия основание для сравнения находится ими самостоятельно. Приведем пример.

**Задача 5.** Ученик, посещающий кружок, получил задание раскрасить модели поверхностей плоскости (прямоугольник), цилиндра, тора, сферы и листа Мебиуса. Причем красить он должен, не отрывая кисточку от бумаги, а, если переходит через край, менять цвет краски. Ученик также должен ограничиться минимальным количеством красок. Какие результаты он получит?

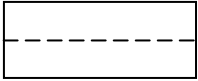
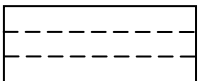
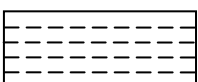
Очевидно, результаты зависят от наличия у поверхности края и числа ее сторон. У плоскости две стороны и край, значит, для ее закрашивания понадобится два цвета. Аналогичная ситуация у цилиндра. А вот лист Мебиуса можно закрасить одной краской, так как он является односторонней поверхностью. В иную ситуацию мы попадаем с тором и сферой – двусторонние поверхности без края – для их раскрашивания потребуется одна краска, а внутренняя сторона останется незакрашенной в силу невозможности туда попасть.

Переходя непосредственно к топологическим экспериментам, следует отметить следующее. На начальном уровне сформированности действие эксперимента с моделью выглядит как эксперимент с реальной моделью, на высшем же уровне – это виртуальный эксперимент с мысленно представимой моделью.

Топологические эксперименты можно проводить на практических занятиях по геометрии. Оборудование для этого занятия доступно каждому: листы бумаги, самоклеющаяся лента и ножницы. Модели основных топологических поверхностей (двумерных топологических многообразий) довольно легко изготовить из бумаги [1]. Затем студентам раздают индивидуальные бланки (рабочие листы), которые заполняются в ходе занятия. На бланках представлены незаполненные таблицы. Приведем пример заполнения таблицы.

Таблица 1

Разрезание листа Мебиуса

№ п/п	Описание эксперимента	Предполагаемый результат эксперимента	Действительный результат эксперимента
1	 разрез на $\frac{1}{2}$	два листа Мебиуса	лента с двумя перекручиваниями
2	 разрез на $\frac{1}{3}$	лента с тремя перекручиваниями	лист Мебиуса, зацепленный за ленту с двумя перекручиваниями
3	 разрез на $\frac{1}{5}$	лист Мебиуса и две зацепленные за него ленты с двумя перекручиваниями	взаимнозацепленные лист Мебиуса и две ленты с двумя перекручиваниями

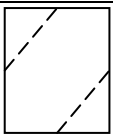
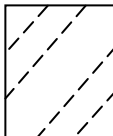
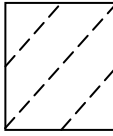
**Выводы:** \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

В таблице четыре столбца: номер, описание эксперимента, предполагаемый результат и действительный результат эксперимента. Разработаны серии из нескольких взаимосвязанных экспериментов с моделями следующих поверхностей: листа Мебиуса, бутылки Клейна, тора. Нередко результат следующего эксперимента легче предвидеть, имея результат предыдущего. Возможно несколько вариантов представления экспериментальных заданий в таблице.

*Вариант 1.* В таблицах изначально заполнен только столбец описание эксперимента (табл. 2). Здесь пунктиром обозначены линии разреза на развертке модели. Перед проведением каждого эксперимента студенты записывают в таблицу предполагаемый результат. Затем изготавливают бумажную модель, предварительно наметив линии разреза. Проводят разрезание и заполняют последний столбец таблицы. Сравнивают предполагаемый и действительный результат. Если они не совпадают, то анализируют причины ложного предположения и делают соответствующие выводы, а потом переходят к следующему эксперименту. Таким образом, с каждым следующим опытом расхождение между предположениями и действительными результатами нивелируется.

Таблица 2

## Разрезание тора

№ п/п	Описание эксперимента	Предполагаемый результат эксперимента	Действительный результат эксперимента
1			
2			
3			

**Выводы:** \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

*Вариант 2.* Этот вариант несколько сложнее, чем первый и требует наличия некоторого опыта в проведении экспериментов. Студенты получают задание.

**Задача 6.** На бумажной модели бутылки Клейна показать разрез, при котором получаются два листа Мебиуса, являющиеся зеркальным отображением друг друга (левый и правый листы). Как нужно провести разрез, чтобы образовался всего один лист Мебиуса? Как получить два листа Мебиуса и цилиндр, если можно проводить два разреза.

Исходя из полученной задачи, в таблице заполняется только столбец *предполагаемый* (желаемый) *результат* – цель эксперимента (табл. 3). Далее при работе студенты дают описание эксперимента в таблице, затем изготавливают модель и проводят разрезание. Последним заполняется столбец с действительными результатами. Сравнивая записи в двух последних столбцах таблицы, студенты делают выводы о достижении или не достижении поставленной цели эксперимента.

Таблица 3

## Разрезание бутылки Клейна

№ п/п	описание эксперимента	Желаемый результат эксперимента	Действительный результат эксперимента
1		два листа Мебиуса, являющиеся зеркальным отражением друг друга	
2		один лист Мебиуса	
3		два листа Мебиуса и цилиндр	

**Выводы:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

При выполнении этих заданий у студентов рождаются идеи новых экспериментов с интересными результатами. Их также добавляют в таблицу. Итогом экспериментальной работы является формулировка студентом выводов о свойствах топологических поверхностей.

Эксперимент позволяет, что называется «почувствовать собственными руками» строение поверхностей, открывает новую грань восприятия этих свойств. Более того, самостоятельная деятельность с моделями делает полученные знания лично значимыми для учащегося. Эксперимент дает студентам знания, приобретенные на основе собственного опыта. Источниками знаний выступают: наблюдение, опыт, анализ и обсуждение полученного материала. Это приводит к более глубокому осмыслению учебного материала.

Вузовская геометрия подразумевает достаточно высокий уровень абстракции в изложении материала. Поэтому не следует пренебрегать ни малейшей возможностью «приблизить» к студенту эти абстракции. Топологический эксперимент дает такую возможность: живое динамичное существование и преобразование поверхностей в руках студента!

Обобщая точку зрения Ф. Клейна, геометрию понимают как теорию структур более богатых, чем структура топологического пространства, т.е. все пространства, изучаемые в геометрии, прежде всего топологические пространства. Более того, это топологические пространства с обогащенной структурой. То есть топологические свойства фигур – в известном смысле это самые глубокие, самые основные геометрические свойства.

Поэтому топологические эксперименты (в некотором объеме) целесообразно проводить и со школьниками. Есть опыт обучения элементам топологии учащихся средней школы на занятиях кружка [2]. Разработаны методические аспекты организации и проведения дополнительных занятий по топологии.

### Библиографический список

1. **Гарднер М.** Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. – М.: Мир, 1971.
2. **Сангалова М.Е.** Теория и методика обучения элементам топологии / М.Е. Сангалова. – Арзамас: Арзамас. гос. пед. ин-т, 2005.

*Дата поступления  
в редакцию 02.08.2011*

**М.Е. Sangalova**

### **EXPERIMENTS WITH THE MODELS OF TOPOLOGICAL SURFACES AS A BASIS FOR UNDERSTANDING OF THEIR STRUCTURE AND PROPERTIES**

This paper is about the experimental work of students in studying topology aware "Differential geometry and topology». Experiments with paper models of topological surfaces offer a new dimension of perception properties on those surfaces.

*Key words:* topology, experiment, education in higher school.