УДК 517.51, 519.86

Л.Н. Ерофеева

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева

Приведены примеры непрерывных недифференцируемых функций и установлена их фрактальная размерность.

Ключевые слова: временной ряд, недифференцируемость, фрактал.

В 70 годах XVII столетия И. Ньютон и Г. Лейбниц ввели понятие производной и заложили основы дифференциального и интегрального исчисления. Созданный математический аппарат обеспечил бурное развитие естественных и точных наук на несколько столетий вперед. Основным объектом изучения классического математического анализа являются гладкие (или дифференцируемые) функции. Математики имели дело со сравнительно небольшим набором функций, которые принято в настоящее время считать элементарными. Возникавшие до недавнего времени практические задачи достаточно хорошо описывались элементарными функциями. Производные от них могут быть найдены с помощью формальных правил и всегда существуют, если не считать некоторых исключительных точек, как, например, $x=0$ для $y=\sqrt[3]{x}$. Долгое время эти случаи считались досадным исключением, не относящимся к делу.

Конечно, негладкие функции естественным образом появлялись и в самой математике и в ее приложениях, но они представлялись чаще всего досадным исключением, не относящимся к делу. Однако развитие понятия дифференцируемости, начиная со знаменитого спора Эйлера и Даламбера о природе решений уравнения колебания струны и заканчивая введением современного определения функции, изменили положение вещей. Разумеется, что ни у кого не вызывает удивления существование нигде не дифференцируемых функций, таких как функция Дирихле $D(x)$, которая равна нулю или единице в зависимости от рациональности или иррациональности аргумента. Однако интуиция прикладников отказывалась допустить существование нигде не дифференцируемых непрерывных функций до тех пор, пока Вейерштрасс не построил пример. И все же физики, тем не менее, игнорировали подобные результаты, относя их к патологиям, не встречающимся на практике.

Положение изменилось при изучении хаотических явлений, в частности, броуновского движения. В одной из моделей броуновского движения – винеровском случайном процессе – почти все траектории представимы непрерывными, но нигде недифференцируемыми функциями, что привлекло внимание к последним. Впоследствии при исследовании экономических моделей, в частности, так называемых временных рядов возникла необходимость их описания недифференцируемыми функциями.

Для современной науки функция без производной вовсе не абстрактное понятие. Негладкий анализ – это вполне сложившийся и быстро развивающийся раздел современной математики. Негладкая задача – это задача, которая описывается с помощью недифференцируемой функции. Для решения негладких задач разрабатываются специфические методы. Наиболее интересным и содержательным направлением в исследовании представляется связь недифференцируемых функций и фракталов. Самоподобие и другие замечательные свойства фракталов позволяют определять с их помощью различные нетривиальные функции. Наглядность и простота структуры фракталов значительно облегчает изучение свойств полученных функций [4, 5].

Приведем примеры непрерывных недифференцируемых функций, которые могут служить иллюстративным материалом при изложении курса математического анализа в вузе.

Теорема

Функция $f(x)=\sum\limits_{k+1}^{\infty}a^k\varphi\left(b^k x\right)$ (*)

является нигде недифференцируемой при следующих условиях:

1) $0<a<1,\ ab>1$,

2) $\varphi(x)$-непрерывная, ограниченная, периодическая функция с периодом $\min\varphi(x)=0,\ \max\varphi(x)=1$

3) $\varphi(x)$- удовлетворяет требованию

$|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|\le\lambda|\beta-\alpha|$, (**)

при некотором λ.

Рассмотрим доказательство данного утверждения, не вдаваясь в детали арифметического характера. Согласно признаку Вейерштрасса, рассматриваемая сумма ряда $f(x)$ есть непрерывная функция. Без ограничения общности можно рассматривать значения аргумента функции $f(x)$ из $[0;1]$.

Рассмотрим последовательность $x_n=x+\alpha_n$, где $\alpha_n\in(b^{-n-1};b^{-n})$ Очевидно, что $x_n\to x$ при $n\to\infty$.

Приращение $f(x_n)-f(x)$ представимо следующим образом:

$$f(x_n)-f(x)=\sum_{k<n}a^k\left[\varphi(b^k x_n)-\varphi(b^k x)\right]+a^n\left[\varphi\left(b^n x_n\right)-\varphi\left(b^n x\right)\right]+\sum_{k>n}a^k\left[\varphi\left(b^k x_n\right)-\varphi\left(b^k x\right)\right]=$$

$$=S_n+a^n\left[\varphi\left(b^n x_n\right)-\varphi\left(b^n x\right)\right]+T_n.$$

Оценим три слагаемых, входящих в приращение.

Используя условие (**), имеем

$$|S_n|=|\sum_{k<n}a^k\left[\varphi(b^k x_n)-\varphi(b^k x)\right]|<\sum_{k<n}a^k b^k|x_n-x|\lambda=\lambda\alpha_n\frac{(ab)^n-1}{ab-1}<\lambda\alpha_n\frac{(ab)^n}{ab-1};$$

$$|T_n|=|\sum_{k>n}a^k\left[\varphi(b^k x_n)-\varphi(b^k x)\right]|\le\sum_{k>n}a^k=\frac{a^{n+1}}{1-a},\ \text{так как}\ |\varphi(y)-\varphi(x)|<1.$$

Далее рассмотрим второе слагаемое, входящее в приращение. Поскольку $b^n x_n-b^n x=b^n\alpha_n\in(0,1)$, то α_n можно выбрать так, что $\left|\varphi\left(b^n x_n\right)-\varphi\left(b^n x\right)\right|\ge\frac{1}{2}$,

тогда $\left|a^n\left[\varphi\left(b^n x_n\right)-\varphi\left(b^n x\right)\right]\right|\ge a^n\frac{1}{2}$.

Таким образом, $|f(x_n)-f(x)|\ge-\lambda\alpha_n\frac{(ab)^n}{ab-1}+a^n\frac{1}{2}-\frac{a^{n+1}}{1-a}=a^n\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{1-a}\right)-\lambda\frac{(ab)^n}{ab-1}\alpha_n$.

Учитывая, что $\frac{a^n}{\alpha_n}>\frac{a^n}{b^{-n}}=(ab)^n$, имеем

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right|\ge\frac{a^n}{\alpha_n}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{1-a}\right)-\lambda\frac{(ab)^n}{ab-1}>(ab)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{a}{1-a}-\frac{\lambda}{ab-1}\right].$$

Полученное неравенство позволяет сделать вывод, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$

не существует, так как a,b можно выбрать так, что $\left[\frac{1}{2}-\frac{a}{1-a}-\frac{\lambda}{ab-1}\right]>0$, а значит $f(x)$ нигде не дифференцируемая функция.

Далее перейдем к понятию размерности.

С современной точки зрения странные свойства объектов, изучаемых в негладком анализе, связаны с тем, что они рассматриваются как одномерные. Гладким линиям, в частности, прямой, принято приписывать размерность 1. График недифференцируемой функции гладким не является, а значит неразумно приписывать ему размерность 1. Более естественно считать недифференцируемую функцию объектом более высокой, в том числе и дробной размерности (по современной терминологии – фракталом). При описании негладких объектов место обычной размерности занимает дробная, введенная Хаусдорфом, а место производной – показатель Гёльдера, или дробная производная.

Как уже отмечалось, в классическом математическом анализе размерность равна числу независимых переменных, необходимых для того, чтобы задать точку на рассматриваемом объекте: точка имеет размерность равную нулю, отрезок, окружность, вообще, любая обычная кривая на плоскости или в пространстве – размерность 1, круг, сфера – двумерны, тела – трехмерны. Однако смысл понятия "размерность" шире. Оно характеризует более "тонкие" топологические свойства объектов и совпадает с числом независимых переменных, необходимых для описания объекта только в частных случаях [7].

В 1919 году Феликс Хаусдорф определил α-меру для любого $\alpha \geq 0, (\alpha \in R)$и на этой основе каждому множеству в евклидовом пространстве сопоставил число, названное им метрической размерностью. Идеи Хаусдорфа были развиты А.С. Безиковичем, который длительное время был автором или соавтором практически всех работ по данной тематике.

Первый шаг в построении теории дробной размерности состоит в определении d-меры шара радиуса r в R^n,где d - любое неотрицательное вещественное число. Это достигается путем распространения формулы

$$V_d = r^d \frac{\tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right)^d}{\tilde{A}\left(1+\frac{1}{2}\right)}, \tag{1}$$

где $\tilde{A}(x)$- гамма функция Эйлера, $d = 1,2,3...$ на все вещественные $d \succ 0$.

Следующий шаг заключается в переносе понятия d-меры с шара на произвольное множество $A \subset R^n$. Для этого построим покрытие A множеством шаров $B_\varepsilon(x_i)$.

Просуммируем их объемы:

$$\sum_{i=1}^{M} \varepsilon^d \frac{\tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right)^d}{\tilde{A}\left(1+\frac{1}{2}\right)}. \tag{2}$$

Определение. ε*-фрактальной* d *-мерой множества называется число*

$$\mu(A,d,\varepsilon) = \min M \cdot \varepsilon^d \equiv \varepsilon^d N(\varepsilon), \tag{3}$$

где $N(\varepsilon) = \min M$, причем $\min M$ берется по всевозможным покрытиям множества A .

$$\mu(A,d,\varepsilon)=\inf\left\{\sum\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{d}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}\cdot\varepsilon^{d}\,\middle|\,\text{по всевозможным покрытиям А}\right\}$$

Определение. *Фрактальной d - мерной сферической мерой Хаусдорфа называется число*

$$\mu_F(A,d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\mu(A,d,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\sup\left(\varepsilon^{d}N(\varepsilon)\right). \tag{4}$$

Заметим, что часто бывает

$$\mu_F(A,d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\mu(A,d,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left(\varepsilon^{d}N(\varepsilon)\right).$$

Безикович показал, что для каждого X всегда существует число $d_H\in R$, что d -мерная мера Хаусдорфа компакта X бесконечна при $d\prec d_H$, и равна 0 при $d\succ d_H$.

Определение. *Число* d_H*, удовлетворяющее соотношению* $d_H=\inf\left\{d\,|\,\mu_F(A,d)=0\right\}$*: называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича (метрической или фрактальной размерностью) множества* A*. Обозначается как* d *,*d_H *или* d_F.

Выполнив некоторые преобразования, можно показать, что если

$$0\prec C_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d}\le N(\varepsilon)\le C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d}, \text{ то}$$

$$d=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{5}$$

Для большинства "хороших" объектов, пространств, множеств размерность и фрактальная размерность совпадают, однако существуют объекты, для которых размерность меньше, чем фрактальная размерность. Это и есть фракталы.

Чтобы понять формулу (5), умножим обе части на $\ln\frac{1}{\varepsilon}$ и введем d под знак логарифма. В результате получим

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d}\sim N(\varepsilon). \tag{6}$$

Так, для покрытия, например, единичного отрезка, квадрата или куба его копиями размера ε, их потребуется соответственно $\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon^2},\frac{1}{\varepsilon^3}$, то возникающий показатель степени можно понимать как размерность, что и отражает формула (5).

Определим фрактальную размерность функции, описанной в теореме, следующим образом.

Если $f(x_n)-f(x)=0\left((\Delta x)^{h}\right)$, с наибольшим h, то $\dim f(x)=2-h$.

Поместим приращение Δx в интервал вида $\left(b^{-n-1}; b^{-n}\right)$. Используя прежнее разбиение приращения функции на три слагаемых, имеем

$$\left| f(x+\Delta x) - f(x) \right| \prec a^n + \frac{\lambda (ab)^n}{ab-1}\Delta x + \frac{a^{n+1}}{1-a}, \text{ следовательно,}$$

$$\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \prec \frac{a^n}{\Delta x}\left(1+\frac{a}{1-a}\right) + \frac{\lambda (ab)^n}{ab-1} < \frac{a^n b^{n+1}}{1-a} + \frac{\lambda (ab)^n}{ab-1} = (ab)^n\left(\frac{b}{1-a} + \frac{\lambda}{ab-1}\right) =$$

$$= b^{n\log_b(ab)}\left(\frac{b}{1-a} + \frac{\lambda}{ab-1}\right) < \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^{\log_b ab}\left(\frac{b}{1-a} + \frac{\lambda}{ab-1}\right),$$

так как $\dfrac{1}{\Delta x} > b^n$.

Итак, $\left| f(x+\Delta x) - f(x) \right| < (\Delta x)^{1-\log_b(ab)}\left(\dfrac{b}{1-a} + \dfrac{\lambda}{ab-1}\right)$, что позволяет сделать следующий вывод:

$\dim f(x) = 2 - h = 2 - (1 - \log_b(ab)) = 1 + \log_b(ab)$, т.е. $1 < \dim f(x) < 2$, причем может принимать любое значение из указанного интервала.

Библиографический список

1. **Рыбников, К.А.** История математики. II / К.А. Рыбников. – М.: МГУ, 1963.
2. **Немыцкий, В.** Курс математического анализа / В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов. – М.-Л., 1940. Т. 1.
3. **Петерс, Э.** Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике / Э. Петерс. Интернет-трейдинг, 2004.
4. **Шибинский, В.М.** Фракталы и построение примеров нетривиальных функций // XVI международные Ломоносовские чтения: сб. научн. тр. – Архангельск: Поморский госуниверситет, 2004. С. 262–266.
5. **Шибинский, В.М.** Фрактал и построение всюду непрерывной, но нигде недифференцируемой функции //XVI международные Ломоносовские чтения: сб. научн. тр. – Архангельск: Поморский госуниверситет, 2004. С. 266–273.
6. **Демьянов, В.Ф.** Обобщение понятия производной в негладком анализе // Соросовский образовательный журнал. Математика. 1996. №5. С. 121–127.
7. **Вишик, М.И.** Фрактальная размерность множеств. Соросовский образовательный журнал. Математика. 1998. №1. С. 122–127.

Дата поступления
в редакцию 02.08.2011

L.N. Erofeeva

FRACTAL DIMENSION OF NONDIFFERENTIATED FUNCTIONS

Some examples of continuous nondifferentiated functions are given and their fractal dimension is found.

Key words: time series, nondifferentiated, fractal.