

УДК 621.372.8

Н.И. Кузикова

**РАСЧЕТ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ РАССЕЯНИЯ АНТЕНН
В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАМОЧНОЙ АНТЕННЫ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассмотрен подход к решению задач анализа антенных систем с помощью обобщенных матриц рассеяния с использованием сферических гармоник. Рассчитаны основные характеристики двухэлементной антенной системы; приведен анализ взаимодействия рамочной антенны и диэлектрического шара.

Ключевые слова: антенные системы, обобщенные матрицы рассеяния, сферические гармоники, входное сопротивление, диаграмма направленности, рамочная антенна, диэлектрический шар.

Введение

В настоящей работе рассматривается применение метода обобщенных матриц рассеяния к решению задач антенной техники. Метод обобщенных матриц рассеяния известен достаточно давно [1]. Он аналогичен матричному методу, применяемому в теории электрических цепей, и позволяет выполнять анализ по внешним характеристикам, не интересуясь внутренней структурой цепи или антенны. Отличие обобщенной матрицы антенны от классической матрицы многополюсника заключается только в том, что, кроме прямых и обратных волн в фидерах, учитываются падающие на антенну и рассеянные ей волны свободного пространства.

Вместо термина «обобщенная матрица рассеяния» в научной литературе используются и другие названия: в [2] – термин «метод квази-виртуальных многополюсников», в [3] вместо обобщенной матрицы используется понятие дискриптора автономного блока. Далее в статье используется наиболее ранний термин – «обобщенная матрица рассеяния».

Несмотря на то, что в настоящее время разработаны удобные универсальные программы для расчета характеристик антенных систем, в ряде задач целесообразно использовать метод обобщенных матриц рассеяния. Например, при решении задачи об оптимальном размещении антенны на объекте (самолете, автомобиле и др.) представляется целесообразным вначале определить обобщенные матрицы рассеяния антенны и объекта. Затем по ним уже определять характеристики системы при различных положениях антенны. Так как матричные операции компьютер выполняет быстро, то такой путь позволит решить задачу значительно быстрее, чем многократное моделирование антенны с объектом.

Кроме этого, представляется неизбежным использование обобщенной матрицы объекта, если она определена экспериментально и электродинамическая модель объекта неизвестна.

Запись обобщенной матрицы рассеяния зависит от выбора вида волн, используемых для описания электромагнитного поля свободного пространства. Плоские электромагнитные волны имеют наиболее простую структуру поля и изучаются даже в средней школе. Однако их использование для записи обобщенной матрицы рассеяния реальных антенн конечных размеров представляется крайне затруднительным. Амплитуды плоских волн связаны с зависимостью электромагнитного поля от пространственных координат на некоторой плоскости двухмерным преобразованием Фурье [4].

Если представить, что для описания поля используется около ста пространственных гармоник по каждой из двух координат, то это означает, что обобщенная матрица рассеяния

будет иметь размер порядка $10^4 \times 10^4$. Выполнение вычислений с матрицами таких огромных размеров не представляется возможным. Поэтому в работе для описания поля свободного пространства предлагается использовать сферические гармоники. Приведенные примеры показывают, что при использовании сферических гармоник, размерность обобщенных матриц рассеяния оказывается небольшой.

Далее приведены краткие сведения по сферическим гармоникам и рассмотрен физический смысл элементов обобщенной матрицы рассеяния при использовании сферических гармоник. Получены формулы для расчета входного сопротивления системы из двух антенн и диаграммы направленности по обобщенным матрицам рассеяния элементов.

Предложена методика расчета обобщенных матриц рассеяния проволочных антенн. Приведены результаты численного анализа взаимодействия рамочной антенны и диэлектрического шара.

Структура обобщенной матрицы рассеяния и физический смысл ее элементов

Как уже упоминалось ранее, электромагнитное поле антенной системы будет характеризоваться суммой полей сферических гармоник. Различные составляющие электромагнитного поля удобно определить через электрический и магнитный потенциалы для волн Е - и Н - типа соответственно. Зависимость электрического потенциала U от пространственных координат может быть записана в виде [5]

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{r}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{n,m} h_n^{(2)}(kr) P_n^{(m)}(\cos\theta) e^{jm\varphi}, \quad (1)$$

где $k = \omega(\epsilon\mu)^{0.5}$ - волновое число; ϵ, μ - диэлектрическая и магнитная проницаемость среды (вакуума); ω - круговая частота гармонических источников; $h_n^{(2)}(kr)$ - сферические функции Ганкеля второго рода; $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ - присоединенная функция Лежандра.

Аналогичное выражение может быть записано и для магнитного потенциала волн Н - типа. Производные по пространственным переменным от потенциалов дают различные компоненты электрического и магнитного полей. Приведем используемое далее в статье выражение для компоненты E_θ электрического поля волн типа Е.

$$E_\theta = \frac{1}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{n,m} \frac{d(kr h_n^{(2)}(kr))}{d(kr)} \frac{d(P_n^{(m)}(\cos\theta))}{d\theta} e^{jm\varphi}. \quad (2)$$

Двухиндексная нумерация волн в выражениях (1 и 2) удобна для пояснения структуры поля, но неудобна при численных расчетах, поэтому полагаем в дальнейшем изложении, что вместо двухиндексной нумерации применена сквозная одноиндексная нумерация всех сферических гармоник, которые фигурируют в расчетах.

Полагаем, что антенная система может быть заключена между двумя сферическими поверхностями, схематично показанными пунктиром на рис. 1.

Все волны, падающие извне на антенну объединим в вектор \mathbf{c}^+ , а волны, рассеянные ей, – в вектор \mathbf{c}^- . Матрицу, определяющую вектор \mathbf{c}^- через \mathbf{c}^+ , и будем называть *обобщенной матрицей рассеяния*. Запись $\mathbf{c}^- = \mathbf{SG} \cdot \mathbf{c}^+$ позволяет указать физический смысл элемента $\mathbf{SG}_{m,n}$ обобщенной матрицы рассеяния.

Он определяет комплексную амплитуду рассеянной волны с номером m , если на антенную систему падает одна волна единичной амплитуды с номером n . Вектор \mathbf{c}^+ объединяет волны фидеров антенной системы \mathbf{c}_0^+ и падающие на антенную систему волны свободно-

го пространства \mathbf{c}_S^+ . Такое представление вектора \mathbf{c}^+ и аналогичное представление вектора \mathbf{c}^- позволяет записать обобщенную матрицу рассеяния в виде четырех подматриц:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^- \\ \mathbf{c}_S^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^+ \\ \mathbf{c}_S^+ \end{bmatrix}. \quad (3)$$

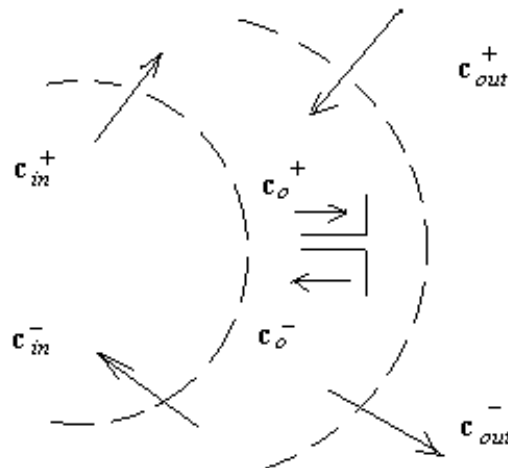


Рис. 1. Структурная схема антенной системы

Подматрицы $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{S} , \mathbf{G} , \mathbf{R} имеют следующий физический смысл. $\mathbf{\Gamma}$ связывает между собой волны антенных фидеров и являются обычной матрицей рассеяния, рассматриваемой в теории СВЧ-устройств, если антенную систему представлять как электрическую цепь [6]. Матрица \mathbf{S} связывает волны свободного пространства и характеризует рассеивающие свойства антенной системы. Матрица \mathbf{G} может быть названа *матрицей излучения*. Она определяет комплексные амплитуды излучаемых волн при возбуждении антенной системы через фидеры. \mathbf{R} целесообразно назвать *приемной матрицей*, она, наоборот, определяет комплексные амплитуды волн, возникающие в фидерах антенной системы при облучении ее волнами свободного пространства.

Заметим, что для одноходовой антенны матрица излучения становится вектором столбцом \mathbf{G} . Элементы этого вектора – комплексные амплитуды сферических гармоник, возбуждаемые антенной в режиме излучения. Матрица \mathbf{R} становится вектором строк. Матрица $\mathbf{\Gamma}$ в этом случае связывает отраженную от входа антенны волну с падающей, т.е. становится коэффициентом отражения $\mathbf{\Gamma}$.

Рис.1 показывает, что вектор \mathbf{c}_S^+ целесообразно разделить на внутренние \mathbf{c}_{in}^+ и внешние \mathbf{c}_{out}^+ подвекторы. Такое подразделение определяет представление обобщенной матрицы рассеяния в виде большего числа подматриц. Для одноходовой антенны представление имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^- \\ \mathbf{c}_{in}^- \\ \mathbf{c}_{out}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{R}_{in}^T & \mathbf{R}_{out}^T \\ \mathbf{G}_{in} & \mathbf{S}_{ii} & \mathbf{S}_{io} \\ \mathbf{G}_{out} & \mathbf{S}_{oi} & \mathbf{S}_{oo} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^+ \\ \mathbf{c}_{in}^+ \\ \mathbf{c}_{out}^+ \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь использована сокращенная запись индексов у подматриц рассеяния, например,

S_{io} вместо $S_{in\ out}$.

Заметим, что для отдельных антенных элементов выражение (4) может иметь более простой вид. Так, для антенного элемента, расположенного в начале координат и окруженного только одной внешней сферой, в (4) следует удалить строку 2 и второй столбец в обобщенной матрице рассеяния.

Расчет характеристик двухэлементной антенной системы по обобщенным матрицам рассеяния

Двухэлементная антенная система изображена на рис. 2.

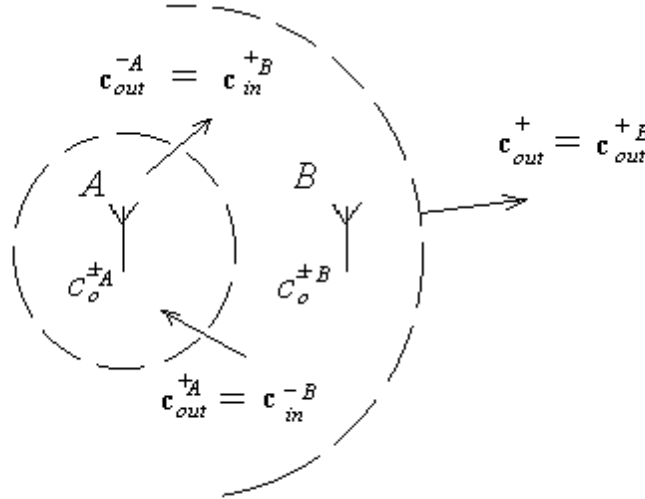


Рис. 2. Структурная схема двухэлементной антенной системы

Полагаем, что антенные элементы одноходовые и для них известны обобщенные матрицы рассеяния SG^A и SG^B . Необходимо по матрицам SG^A и SG^B рассчитать обобщенную матрицу рассеяния системы на рис. 1. Решение этой задачи приведено в [3]. Оно основано на записи соотношения (4) для элементов системы.

$$\begin{bmatrix} c_0^{A-} \\ c_{out}^{A-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^A & \mathbf{R}_{out}^{AT} \\ \mathbf{G}_{out}^A & \mathbf{S}_{oo}^A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0^{A+} \\ c_{out}^{A+} \end{bmatrix}, \quad (5a)$$

$$\begin{bmatrix} c_0^{B-} \\ c_{in}^{B-} \\ c_{out}^{B-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^B & \mathbf{R}_{in}^{BT} \\ \mathbf{G}_{in}^B & \mathbf{S}_{ii}^B \\ \mathbf{G}_{out}^B & \mathbf{S}_{oi}^B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0^{B+} \\ c_{in}^{B+} \\ c_{out}^{B+} \end{bmatrix}. \quad (5b)$$

При записи соотношения (5a) учтено, что у элемента A отсутствуют внутренние волны (c_{in}^{A+} и c_{in}^{A-}), а при записи соотношения (5b) полагается, что нас интересуют только излучающие свойства антенной системы, т. е. на нее внешние волны не падают ($c_{out}^{B+} = 0$).

Для дальнейших преобразований необходимо учесть связь волн антенных элементов, показанную на рис. 2:

$$c_{out}^{A+} = c_{in}^{B-}, \quad c_{out}^{A-} = c_{in}^{B+}. \quad (6)$$

Кроме этого, при анализе взаимодействия рамочной антенны и диэлектрического шара мы будем рассматривать шар как рассеиватель. При этом

$$c_0^{B-} = -c_0^{B+}. \quad (7)$$

Преобразование выражений (5) с учетом равенств (6) и (7) позволяет определить входное сопротивление антенной системы Z_{IN} и амплитуды излучаемых волн c_{out} при возбуждении входа A падающей волной единичной амплитуды. Опуская простые, но громоздкие преобразования, приведем окончательные расчетные формулы:

$$Z_{IN} = W \frac{1 + \Gamma_1}{1 - \Gamma_1},$$

где W – волновое сопротивление; \mathbf{I} – единичная матрица.

$$\Gamma_1 = \Gamma + S_0 - S_1 R_{in}^{B T} S R G_{out}^A S_2^{-1},$$

причем
$$S_0 = R_{out}^{A T} S_{ii}^B S R G_{out}^A, \quad S_1 = R_{out}^{A T} G_{in}^B + R_{out}^{A T} S_{ii}^B S R S_{oo}^A G_{in}^B, \quad (8)$$

$$S_2 = 1 + \Gamma + R_{in}^{B T} S R S_{oo}^A G_{in}^B, \quad S R = (\mathbf{I} - S_{oo}^A S_{ii}^B)^{-1}, \quad \Gamma^A = \Gamma^B = \Gamma;$$

$$c_{out} = S_{oi}^B S R G_{out}^A + (-1) S_2^{-1} (R_{in}^{B T} S R G_{out}^A) (G_{out}^B + S_{oi}^B S R S_{oo}^A G_{in}^B).$$

Численный расчет обобщенных матриц рассеяния проволочных антенн

При численном расчете матрицы рассеяния проволочной антенны следует вначале определить токи в проводах антенны при возбуждении ее либо со стороны фидера, либо электромагнитным полем внешней сферической гармоники. Полагаем, что такой расчет может быть выполнен по формулам, на которых основаны программы анализа антенных систем. при выполнении расчетов, результаты которых приведены далее, использованы формулы [7].

Элементы матрицы рассеяния антенны определяются через комплексные амплитуды различных сферических гармоник рассеянного (излученного) поля. Для подсчета комплексных амплитуд сферических гармоник целесообразно антенну представить как совокупность элементарных излучателей и просуммировать амплитуды гармоник, создаваемых всеми элементарными излучателями. Выражения для расчета комплексных амплитуд сферических гармоник, создаваемых элементарным излучателем, получены в [8]. Приведем их с некоторыми изменениями. Эти изменения связаны с тем, что в [8] рассматриваются диполи, расположенные на оси z сферической системы координат. При расчете обобщенных матриц рассеяния приходится рассматривать диполи, расположенные в различных точках пространства. для радиального диполя расчетные формулы имеют вид

$$\alpha_{n,m}^{rad} = 60\pi k \Delta z I_{\Delta z} (-1)^{n+1} (2m+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{j_n(kr_0)}{kr_0} P_n^{(m)}(\cos\theta_0).$$

$$\beta_{n,m}^{rad} = 0.$$

Для меридионального диполя

$$\alpha_{n,m}^{mer} = 60\pi k \Delta z I_{\Delta z} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{d(kr j_n(kr))}{d(kr)} \Big|_{kr=kr_0} \frac{dP_n^{(m)}(\cos\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$$

$$\beta_{n,m}^{mer} = 60\pi k \Delta z I_{\Delta z} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} j_n(kr_0) \frac{P_n^{(m)}(\cos\theta_0)}{\sin\theta_0}.$$

(9)

При записи формул полагается, что рассматриваются только плоские проволочные антенны, поэтому угол φ_0 в формулах (9) не фигурирует: он полагается равным нулю. Это также позволяет не пользоваться формулами для диполя азимутальной ориентации, которые при записи (9) опущены.

Заметим, что выражения (9) определяют амплитуды сферических гармоник поля для $r > r_0$. При $r < r_0$ следует в (9) сферические функции Бесселя $j_n(x)$ заменить на сферические функции Ганкеля $h_n^{(2)}(x)$.

Результаты численного анализа взаимодействия рамочной антенны и диэлектрического шара

Рассмотрим задачу анализа взаимодействия рамочной антенны с шаром из диэлектрика. Структурная схема данной антенной системы приведена на рис. 3.

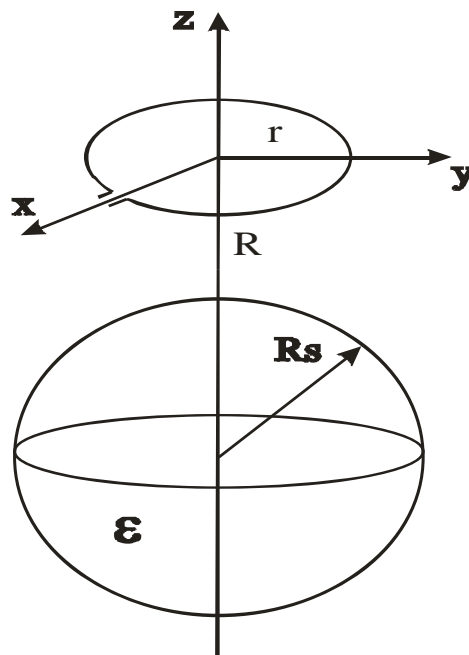


Рис. 3. Структурная схема расположения рамочной антенны и диэлектрического шара

Полагаем, что рамочная антенна подключается к источнику кабелем с волновым сопротивлением $W = 75$ Ом. Диэлектрический шар радиусом R_s рассматривается как рассеиватель. Радиус рамки r подобран так, чтобы наблюдался резонанс. Расстояние R между рамочной антенной и шаром изменялось, вход рамки находился на оси x , плоскость рамки располагалась в плоскости xoy .

Для расчета обобщенной матрицы рассеяния диэлектрического шара используется граничное условие равенства тангенциальных компонент электромагнитного поля на поверхности диэлектрического шара для Е-волн и Н-волн. В этом случае имеем

Е-волны:

$$tDj_n(kR) - SS_n^E Dh_n^{(2)}(k_0R) = Dj_n(k_0R),$$

$$t\sqrt{\varepsilon}j_n(kR) - SS_n^E h_n^{(2)}(k_0R) = j_n(k_0R),$$

$$\Delta = -h_n^{(2)}(k_0R)Dj_n(kR) + \sqrt{\varepsilon}j_n(kR)Dh_n^{(2)}(k_0R),$$

$$\Delta_n^E = j_n(k_0R)Dj_n(kR) - \sqrt{\varepsilon}j_n(kR)Dj_n(k_0R),$$

Н-волны:

$$t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} j_n(kR) - SS_n^H h_n^{(2)}(k_0R) = j_n(k_0R), \tag{10}$$

$$tDj_n(kR) - SS_n^H Dh_n^{(2)}(k_0R) = Dj_n(k_0R),$$

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Dh_n^{(2)}(k_0R)j_n(kR) + Dj_n(kR)h_n^{(2)}(k_0R),$$

$$\Delta_n^H = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} j_n(kR)Dj_n(k_0R) - j_n(k_0R)Dj_n(kR),$$

где t^E, t^H – коэффициенты прохождения для Е- и Н- волн соответственно,

$$Dj_n(kR) = \frac{1}{kR} \frac{d(kRj_n(kR))}{d(kR)},$$

$$Dh_n^{(2)}(kR) = \frac{1}{kR} \frac{d(kRh_n^{(2)}(kR))}{d(kR)}.$$

Откуда интересующие нас компоненты для коэффициента отражения определены следующим образом:

$$SS_n^E = \frac{\Delta_n^E}{\Delta} \text{ – коэффициент отражения для Е-волн,}$$

$$SS_n^H = \frac{\Delta_n^H}{\Delta} \text{ – коэффициент отражения для Н-волн.} \tag{11}$$

Представлены зависимости реальной (рис. 4, а) и мнимой (рис. 4, б) составляющих входного сопротивления от расстояния между рамкой и шаром при $\varepsilon=5$. Для резонансной частоты при $R > R_c$ для больших расстояний при изменении R наблюдается небольшое колебание активной и реактивной составляющих входного сопротивления.

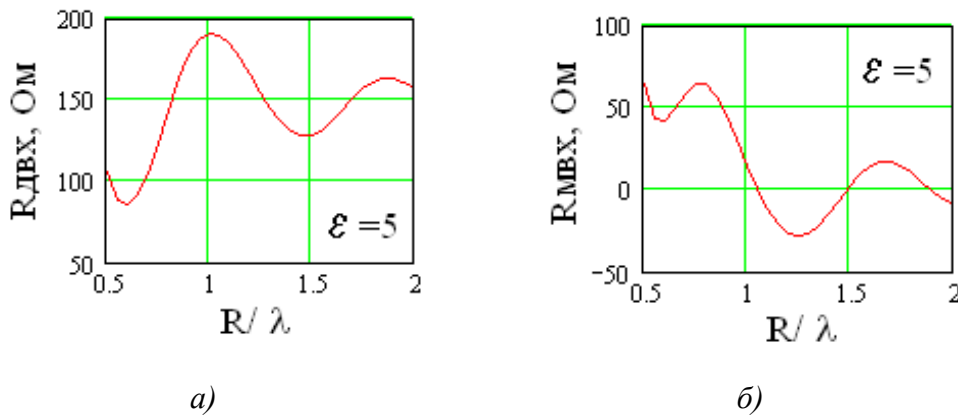


Рис. 4. Зависимость входного сопротивления:
 а - действительная составляющая; б - мнимая составляющая) от расстояния между рамкой и шаром ($\varepsilon=5$)

Если $R < R_s$ (диэлектрик входит в рамку), как можно заметить из рис. 5, наблюдается сильное изменение реактивной составляющей входного сопротивления. Этот эффект особенно заметен при близких размерах рамки и шара, а также при значительных диэлектрических проницаемостях шара. Его необходимо учитывать при проектировании приемно-передающих устройств. Иначе входная цепь окажется не настроенной в резонанс, а для получения нужной излучаемой мощности придется увеличивать амплитуду сигнала передатчика, что приведет к увеличению помех и воздействия электромагнитного сигнала на человека.

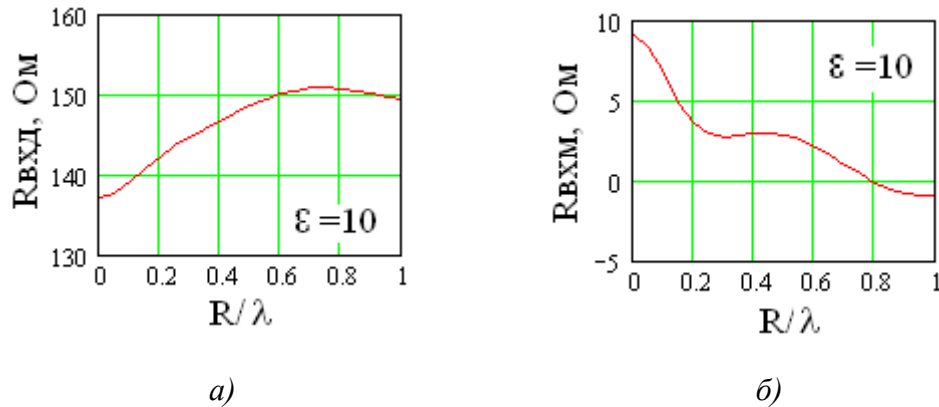


Рис. 5. Зависимость входного сопротивления:

a - действительная составляющая; *б* - мнимая составляющая)

от расстояния между рамкой и шаром ($\epsilon=10$) (шар входит в рамку) $R_s=0.1$ м, $r=0.263$ м

На рис. 6 и рис. 7 изображены диаграммы направленности системы рамка - шар при различных расстояниях между ними и для разных значений диэлектрической проницаемости. Для каждого значения R приведены диаграммы: *a* – в вертикальной плоскости, *б* – в горизонтальной.

Как видно из рис. 8, диаграмма направленности системы на низких частотах при малой сфере – это диаграмма направленности магнитного диполя. По E_φ - круговая в горизонтальной плоскости и меняется по $\sin \theta$ в вертикальной плоскости. Рассчитанное для низких частот входное сопротивление имеет реактивный характер. Соответствующая в этом случае входному сопротивлению величина индуктивности сравнивалась с рассчитанной по формуле из [9]. Отличие результатов менее 0.1%.

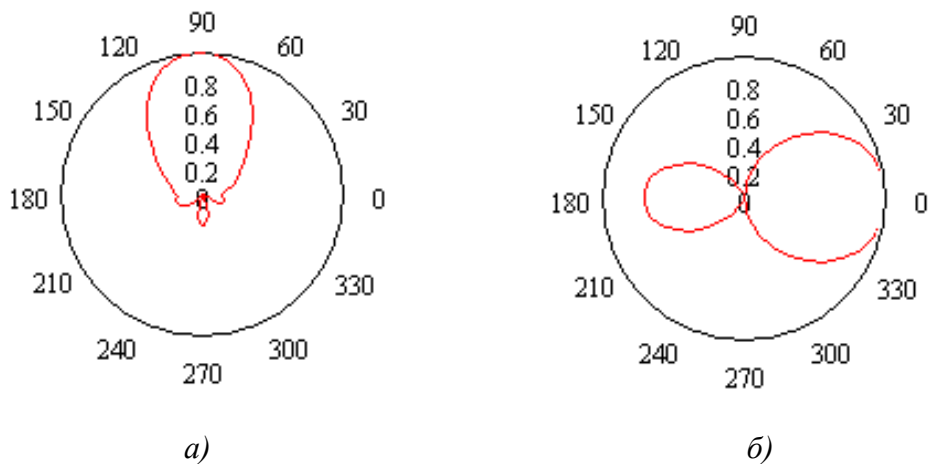


Рис. 6. Диаграмма направленности системы рамка – шар ($R=\lambda$, $\epsilon = 5$):

a - в вертикальной плоскости; *б* - в горизонтальной плоскости)



Рис. 7. Диаграмма направленности системы рамка – шар ($R=2.5\lambda$, $\epsilon = 5$):
a - в вертикальной плоскости; *б* - в горизонтальной плоскости)

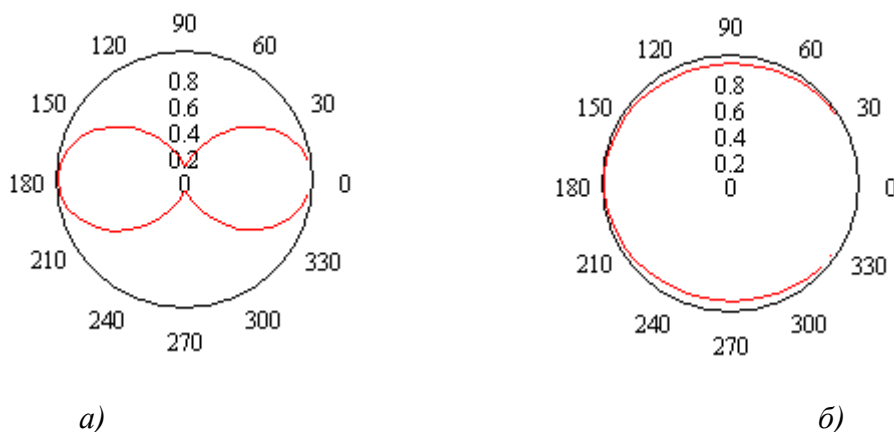


Рис. 8. Диаграмма направленности системы рамка – шар ($R=2.5\lambda$, $\epsilon = 10$):
a - в вертикальной плоскости; *б* - в горизонтальной плоскости на низкой частоте
(меньше в 10 раз, чем на рис. 6 и рис. 7)

Таким образом, использование сферических гармоник при записи обобщенных матриц рассеяния антенных элементов позволяет уменьшить размерность матриц без существенного увеличения погрешностей. Это позволяет использовать обобщенные матрицы рассеяния на практике при расчете характеристик антенных систем.

Библиографический список

1. **Race, J.** Generalized scattering matrix analysis of waveguide discontinuity problems / J. Race, R. Mittra - Quasi-Optics, XIV, 172-197, Polytechnic Institute of Brooklyn Press. - New York, 1964.
2. **Гальченко, Н.А.** Метод квази - виртуальных многополюсников в матрично-электродинамической теории СВЧ – устройств / Н.А. Гальченко, А.В. Кравченко, С.А. Варта-ньян // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1998. № 3. С. 10.
3. **Никольский, В.В.** Декомпозиционный подход к задачам электродинамики / В.В. Никольский, Т.И. Никольская – М.: Наука, 1989.
4. **Зверев, В.А.** Радиооптика. Преобразования сигналов в радио и оптике / В.А. Зверев. – М.: Сов. Радио, 1975.
5. **Анго, А.** Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1967.
6. **Фельдштейн, А.Л.** Синтез четырехполюсников и восьмиполусников на СВЧ / А.Л. Фельдштейн, Л.Р. Явич. – М.: Связь, 1971.
7. **Harrington, R.F.** Matrix Methods for Field Problems / R.F. Harrington // Proceedings of the IEEF. Volume 55. № 2. February. P. 136-149.

8. **Марков, Г.Т.** Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – М.: Радио и связь, 1983. – 296 с.
9. **Калантаров, П.Л.** Расчет индуктивностей. Справочная книга / П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. – Л.: Энергоатомиздат, 1986.

*Дата поступления
в редакцию 11.10.2011*

N.I. Kuzikova

**CALCULATION OF THE GENERALIZED SCATTERING MATRICES
IN THE SPHERICAL SYSTEM OF COORDINATES AND ITS APPLICATION
FOR THE ANALYSIS THE INTERACTION OF A LOOP ANTENNA
AND A DIELECTRIC SPHERE**

It is considered a method of solving of antenna analysis problems by means of the generalized scattering matrices formalism using spherical field harmonics. Main parameters of the two-element antenna system are calculated. Results analyses the interaction of a loop antenna and a dielectric sphere were obtained.

Key words: antenna system, generalized scattering matrices, spherical field harmonics, input impedance, radiation pattern.