УДК 621.3.013.62

С.С. Зельманов

МАТРИЧНЫЙ РЕЗОНАНС ФОРМЫ

Московский технический университет связи и информатики
(Волго-Вятский филиал МТУСИ)

Показана возможность существования резонанса формы в линейной стационарной динамической системе с n входами и одним выходом при действии на её входах векторной совокупности сигналов со сложными конструкциями. Особенностью такого резонанса как свойства внешнего состояния системы является возможность его обнаружения при отсутствии признаков частотного резонанса в системе. Эта особенность весьма существенна при поиске в системе резонансных явлений, связанных с их возможными негативными последствиями.

Ключевые слова: резонанс формы, парциальные импульсные характеристики, матричный резонатор, векторная совокупность входных сигналов, внешнее состояние системы.

Постановка задачи

Динамическая система любой физической реализации и известной структуры может быть представлена как система с n входами и одним выходом. На её входы подаются внешние воздействия, а на выходе возникает экстремальная ответная реакция. При таком подходе основная задача — это поиск некоторой комбинации управляющих воздействий, обеспечивающих экстремальное реакцию системы на её выходе.

При этом резонанс рассматривается как свойство системы с внешним описанием. Это свойство альтернативно традиционному резонансу системы с внутренним описанием.

Введем обобщение, состоящее в том, что на входах такой резонансной системы могут действовать ряд сигналов с подчас сложными сигнальными конструкциями.

Результатом наших исследований будет доказательство того факта, что в зависимости от формы этих сигналов только при определенном их сочетании на выходе системы может появиться экстремальный сигнал, пиковое значение которого может существенно превышать значения выходного сигнала при любых других сигналах на входах, – это резонанс.

Практическая ценность такой задачи состоит в том, что реальные системы действительно могут содержать много точек внешнего воздействия. При действии на эти точки определенного сочетания внешних сил в системе может возникать резонанс, которого не ждут и который может привести к непредсказуемым последствиям. При этом иные сочетания автономных воздействий внешних сил на отдельные входы системы экстремального отклика на выходе системы не вызывают. При традиционном обследовании таких систем частотным методом резонансы в них не обнаруживаются. К таким системам могут относиться мостовые конструкции, отрезки железнодорожных путей с движущимися по ним составам и другие системы с ограниченной базой, находящиеся под воздействием внешних сил в разных точках.

Поэтому при вариации видов и параметров входных сигналов необходимо установить в ней явление резонанса и предупредить нежелательные его последствия. Такой вид резонанса будет резонансом формы, и мы определим его как *матричный резонанс формы*. При этом необходимо показать, что в случае векторной совокупности входных сигналов при определенной их параметризации на выходе системы может иметь место экстремальный отклик, величина которого в некоторый момент времени больше, чем для любой иной комбинации входных сигналов.

Решение задачи

Теорема.

Для любой линейной стационарной динамической систем, имеющей n входов и один выход, существует сочетание (различных) сигналов с фиксированной энергией, подаваемых каждый на свой вход, только при одновременном возбуждении которыми n входов системы имеет место экстремальный отклик на выходе, т.е. резонанс в системе.

Доказательство.

Теорема констатирует, что резонанс в линейной системе при вариации формы *единственного* входного сигнала не является исключительным видом резонанса формы. Системный анализ явления резонанса предполагает дальнейшее развитие и совершенствование данного вида резонанса.

Рассмотрим явление резонанса в линейной стационарной динамической системе с постоянными параметрами, в которой имеется n входов и один выход. Пусть сигнал имеет n-мерное пространство состояний и вектор пространства состояний в момент t :

$$\vec{x}(t) = \left[x_1(t), \dots x_n(t)\right]^T \tag{1}$$

Тогда модель $n \times 1$ системы в матричном виде может быть представлена уравнениями вида

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t),$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t); \qquad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \tag{2}$$

где A - $n \times n$ матрица переходов состояния, удовлетворяющих условиям устойчивости,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \dots & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$ – матрица входов,

$$C = \left[c_1, c_2, \dots c_n\right]$$ – матрица выхода.

Положим $D = \left[d_1, d_2, \dots d_n\right] = \left[0, 0, \dots 0\right]$, что соответствует отсутствию прямого прохождения сигнала с входа на выход для упрощения.

Известно, что (2) имеет решение в плоскости комплексной переменной:

$$\vec{X}(p) = \begin{bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \dots \\ X_n(p) \end{bmatrix},$$

где $$X_i(p) = \int_0^\infty x_i(t) e^{-pt} dt$$

$$\vec{U}(p) = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ \dots \\ U_n(p) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $U_i(p)=\int_0^\infty u_i(t)e^{-pt}dt$

при нулевых начальных условиях.

$$\vec{x}(p)=(pI-A)^{-1}\cdot B\cdot\vec{U}(p)$$

где I - единичная матрица.

Для выхода будем иметь

$$Y(p)=\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt=C(pI-A)^{-1}\cdot B\cdot\vec{U}(p) \qquad (4)$$

Матрица размера - $1\times n$ с коэффициентами, зависящими от p (комплексной переменной) $C(pI-A)^{-1}\cdot B=K(p)$, имеет смысл матричной передаточной функции вида

$$K(p)=\left[K_1(p),...K_n(p)\right]. \qquad (5)$$

Легко проследить, что

$$Y(p)=\left[K_1(p)...K_n(p)\right]\begin{bmatrix}U_1(p)\\U_2(p)\\...\\U_n(p)\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}K_i(p)U_1(p), \qquad (6)$$

где $K_i(p)$ - передаточная функция с i входа на выход; $K_i(p)$ - представляют собой дробно-рациональные функции многочленов, стоящих в числителе и знаменателе и зависящих от коэффициентов матриц A, B и C.

Полюса $K_i(p)$ определяются соответствующими числами матрицы A.

Если обозначить соответствующие оригиналы

$$h_\delta(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}K_i(p)e^{pt}dp,$$

то можно считать, что этот набор функций определяет ***матричную импульсную характеристику системы***, т.е.

$$G(t)=\left[h_1(t)...h_n(t)\right] \qquad (7)$$

а функции $h_i(t)$ считать парциальными импульсными характеристиками по i -входу.

Выражение (6) можно интерпретировать как декомпозицию произвольной линейной системы с постоянными параметрами, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями и имеющую n - входов и один выход.

Такая система может быть представлена блок-схемой в следующем виде (рис. 1).

Можно обобщить эту модель на все линейные стационарные системы, в том числе описываемые не только обыкновенными дифференциальными уравнениями, поскольку для всех них также можно представить связь n входов и одного выхода через парциальные передаточные функции, образующие матричную импульсную характеристику (7). Только в этом случае $K_i(p)$ не будут дробно-рациональными функциями переменной p.

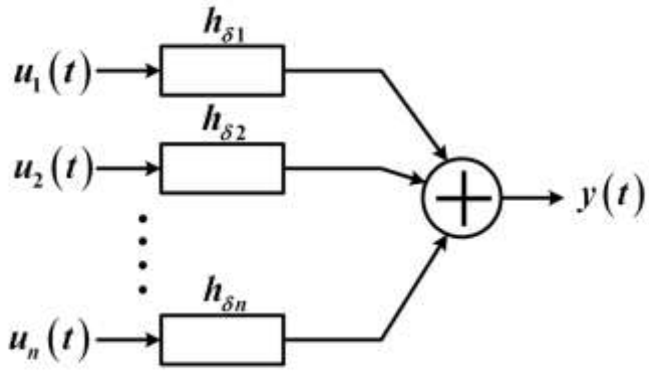

Рис. 1. Модель матричного резонатора общего вида

Покажем, что когда на входах системы действуют сигналы $s_1(t)s_2(t).....s_n(t)$, которые связаны с парциальными импульсными характеристиками соотношением

$$u_i(t) = h_i(T - t)\,1(T - t),\; i = 1,2...n, \tag{8}$$

то на выходе будет иметь место экстремальный отклик, т.е. будет иметь место матричный резонанс в том смысле, который сформулирован в теореме о матричном резонансе.

Сначала рассмотрим (8) в частотной области. Для этого применим преобразование Лапласа и учтем зеркальность по времени функции в правой части. При вычислении получим следующее выражение через матричную передаточную функцию системы;

$$U(p) = K^*(p)e^{pt} = -C(pI + A)^{-1} \cdot Be^{pT}. \tag{9}$$

Это решение может рассматриваться и как решение вариационной задачи на множестве всех функций входных сигналов при фиксированной энергии каждого из них. При этом вариация должна осуществляться как формой каждого сигнала, так и числом ненулевых сигналов, добиваясь уникального сочетания сигналов на *n* входах, обеспечивающего появление непредсказуемого резонансного значения сигнала на выходе системы. Выражение для сигнала на выходе системы при этом будет иметь вид

$$y(t) = \left[u_1(t)u_2(t).....u_n(t)\right] \otimes \begin{bmatrix} h_{1\delta}(t) \\ h_{2\delta}(t) \\ .... \\ h_{n\delta}(t) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

или

$$y(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^t u_i(\tau) h_\delta(T - \tau)d\tau, \tag{11}$$

где $u_1(t)u_2(t).....u_n(t)$ -входные сигналы; $h_k(t)$ – импульсные характеристики. Приведенное решение для многих систем может дать в качестве сигнала физически не реализуемую функцию (например, монотонно возрастающую до бесконечности). Далее мы приведем особенности решения с учетом требования финитности находимого решения.

Каждый из возможных входных сигналов $u_i(t) = 0$ при $t \le 0$. При образовании импульсной характеристики из такого сигнала с помощью его «зеркального» отображения и сдвига на величину *T* эта характеристика $h_i(t) = 0$ при $t \ge T$. Эта оговорка не может заменить строго математического представления импульсной характеристики на временном интервале в бесконечных пределах. Такое представление может быть сделано с помощью «окна» вида $\left[1(t)-1(t-T)\right]$, умноженного на функцию входного сигнала, т.е

$$u_1(t)\cdot\left[1(t)-1(t-T)\right].$$

Тогда в общем случае:

1. Функция сигнала и его изображение будут иметь вид

$$u_1(t) \risingdotseq K^*(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{A(p)}{(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots(p-\alpha_n)}, \qquad (12)$$

где $K^*(p)$- изображение сопряженного комплекса передаточной функции системы, которая имеет вид

$$K(p)=U^*{}_1(p)\cdot e^{-pT}. \qquad (13)$$

2. Функция «окна» и его изображение:

$$1(t)-1(t-T) \risingdotseq \frac{1}{p}\left(1-e^{-pT}\right). \qquad (14)$$

3. Изображение произведения функций входного сигнала и «окна» с использованием вычетов в полюсах будет иметь вид

$$F(p)=F\left[u_1(t)\cdot\left(1(t)-1(t-\tau)\right)\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\lambda-j\omega}^{\lambda+j\omega}F_1(z)\cdot F_2(p-z)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\lambda-j\omega}^{\lambda+j\omega}\frac{A(z)}{(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\cdots(z+\alpha_n)}\cdot\frac{1-e^{-(p-z)T}}{(p-z)}dz=\frac{1}{2\pi j}\int_{\lambda-j\omega}^{\lambda+j\omega}\frac{\varphi(z)}{q(z)}dz, \qquad (15)$$

где $\varphi(z)=A(z)\left[1-e^{-(p-z)T}\right]$; $\quad q(z)=(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\cdots(z+\alpha_n)(p-z)$.

Корни знаменателя: $z_1=-\alpha_1$, $z_2=-\alpha_2$, $\cdots z_n=-\alpha_n$, $z_{n+1}=p$.

Тогда изображение Лапласа для финитной функции входного сигнала:

$$U_1(p)=\mathrm{Res}(z=z_1)+\mathrm{Res}(z=z_2)+\cdots\mathrm{Res}(z=z_n)+\mathrm{Res}(z=z_{n+1})=$$

$$=\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_1}+\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_2}+\cdots\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_n}+\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_{n+1}} \qquad (16)$$

В частном случае, входной сигнал $u_1(t)$ при ограничении его длительности в интервале $[0,T]$ будет иметь вид $u_1(t)\left[1(t)-1(t-T)\right]$, примем $f_1(t)=u_1(t)=e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p+\alpha}$;

$$f_2(t)=\left[1(t)-1(t-T)\right] \risingdotseq \frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-pT}=\frac{1-e^{-pT}}{p}. \qquad (17)$$

$$F_1(p)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\lambda-j\omega}^{\lambda+j\omega}\frac{1}{(z+\alpha)}\cdot\frac{1-e^{-(p-z)T}}{(p-z)}dz=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\lambda-j\omega}^{\lambda+j\omega}\frac{\varphi(z)}{q(z)}dz\,. \qquad (18)$$

$$\varphi(z)=1-e^{-(p-z)T};\, q(z)=(z+\alpha)(p-z)=zp-z^2+\alpha p-\alpha z\,, \qquad (19)$$

где корни $z_1=-\alpha$, $z_2=p$.

$$F_1(p)=F\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right]=Res(z=z_1)+Res(z=z_2)=$$

$$=\frac{\varphi(z=z_1)}{q'(z=z_1)}+\frac{\varphi(z=z_2)}{q'(z=z_2)}=\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_1}+\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_2} \qquad (20)$$

$$q'(z)=p-2z-\alpha\,;\quad q'(z=z_1=-\alpha)=p+2\alpha-\alpha=(p+\alpha)$$

$$q'(z=z_2=p)=p-2p=\alpha=-(p+\alpha)$$

$$F(p)=F\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right]=\frac{1-e^{-(p+\alpha)T}}{p+\alpha}+\frac{\overbrace{\left(1-e^{-(p-p)T}\right)}^{=0}}{-(p+\alpha)}=\frac{1-e^{-(p+\alpha)T}}{p+\alpha}, \qquad (21)$$

где

$$F\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right]=\frac{1-e^{-(p+\alpha)T}}{p+\alpha}.$$

Таким образом, для системы с заданной передаточной функцией резонансный финитный сигнал будет иметь вид

а) в общем случае:

$$U_1(p)=\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_1}+\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_2}+\cdots\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_n}+\left.\frac{\varphi(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_{n+1}}. \qquad (22)$$

При этом будет выполняться $K(p)=U^*{}_1(p)\cdot e^{-pT}$; (23)

б) в частном случае, в качестве примера покажем, что системы с нерациональными передаточными функциями могут иметь простые резонансные сигналы.

Пусть
$$K(p)=\frac{e^{-\alpha T}-e^{-pT}}{p+\alpha}. \qquad (24)$$

Тогда резонансный сигнал $u_1(t)=e^{-\alpha t}$. Покажем это:

$$U_1(p)=\frac{1-e^{-(p+\alpha)T}}{p+\alpha}. \qquad (25)$$

Заменив p на $-p$, в силу сопряженности комплекса получим

$$U_1^*(p)=\frac{1-e^{-(p+\alpha)T}}{-p+\alpha}=\frac{1-e^{(p-\alpha)T}}{-p+\alpha} \qquad (26)$$

$$K(p)=U^*(p)\cdot e^{-pT}=\frac{1-e^{(p-\alpha)T}}{-p+\alpha}e^{-pT}=\frac{e^{-pT}-e^{-\alpha T}}{-p+\alpha}=\frac{e^{-\alpha T}-e^{-pT}}{p-\alpha}. \qquad (27)$$

Покажем теперь, что найденное решение для сигнала, названного резонансным, имеет экстремальное свойство. Для любой парциальной системы можно записать

$$y_j(t) = k\int_0^t u_j(\tau) h_{\delta j}(t-\tau)\, d\tau_{h_\delta(t-\tau)\ =0 \text{ при } \tau>t} = kB_{u_j h_{\delta j}}(t) \tag{28}$$

где $B_{u_j h_{\delta j}}(t)$ – взаимнокорреляционная функция сигнала $u_i(t)$ и импульсной характеристики любого канала системы, характеризующая их взаимную энергию; $k \geq 1$ – это коэффициент пропорциональности.

Коэффициент пропорциональности является фиксированной величиной для линейной системы и связан с определением импульсной характеристики, размерность которой 1/с. Когда мы говорим, что подаем на вход сигнал, равный зеркальной импульсной характеристике, то имеем в виду, что совпадают формы, а равенство существует с некоторым коэффициентом размерности (с). Физический смысл этого коэффициента обычно связывают с временем интегрирования в системе, т.е. с длительностью импульсной характеристики. Этот коэффициент будет присутствовать и в равенствах, содержащих ВКФ и АКФ

Максимальное значение сигнала на выходе линейной системы с одним входом и одним выходом при резонансе формы будет

$$y(T) = \frac{k}{2\pi}\int_0^T U_i^2(\omega)\, d\omega = kE_s \ > y(t) \text{ для } t \neq T \tag{29}$$

т.е. в том случае, когда сигнал описывается функцией, являющейся зеркальной во времени функции импульсной характеристики парциального канала. Тогда парциальный выходной сигнал воспроизводит во времени сдвинутую АКФ входного сигнала, причем так, что максимум на выходе достигается в момент T_i. По определению АКФ сигнала конечной длительности имеет размерность энергии в точке T_i и равна энергии сигнала. Это определяет максимально возможное пиковое значение в канале.

Если входные сигналы окажутся такими, что для каждого парциального канала будут выполнены условия (29) для одного и того же момента времени *T*, то на выходе образуется сигнал с пиковым значением, равным сумме пиковых значений каждого из парциальных каналов, пропорциональный сумме энергий входных сигналов:

$$y(T) = kB_{\max} = \sum_{i=1}^{i=n}\int_0^T u_i(t) h_{\delta i}\, dt \geq \max\left[u_{k\max}(T)\right], \tag{30}$$

где индекс $k_{\max}$ относится к максимальному входному сигналу одного из каналов. В матричной форме выражение для выходного сигнала будет иметь вид

$$Y(p) = K^*(p) e^{pT} \cdot U(p) = -C(pI - A)^{-1} \cdot Be^{pT} U(p) / \tag{31}$$

Очевидно, что большего пикового значения, чем указанное d выражении (30) на выходе данной линейной системы при фиксированной энергии входных сигналов, получить невозможно.

Выводы

В линейной стационарной системе с *n* входами (при *n*>1) и одним выходом возможен резонанс формы сигнала, при котором значение выходного сигнала в момент отсчета будет больше или равно значению максимального из входных сигналов, т.е. матричный резонанс в линейной системе с многополюсным входом и одиночным выходом возможен.

---

1. **Зельманов, С.С.** Исследование явления резонанса формы сигнала в согласованном фильтре / // Электросвязь. 2011. №1.

Дата поступления
в редакцию 11.10.2011

S.S. Zelmanov

FROM MATRIXER RESONANCE

The possibility of the resonance form existence in the liner stationary dynamic system with n inputs and one output by the action of the vector signal totality with the composite designs is presented in this article. The peculiarity of such resonance as the characteristic of the external system state is its reality by the absence of the frequency resonance signs in the system. This peculiarity is extremely sensational by the search in the system of the resonance phenomenon's which are connected with its possible negative consequences. Key words: resonance forms, partial impulse characteristics matrix resonator, vector total combination of input signals, external state of the system.

Key words: resonance forms, partial impulse characteristics matrix resonator, vector total combination of input signals, external state of the system.