УДК 53.088.23

С.Е. Пилипосян

УГОЛ ОТКЛОНЕНИЯ, ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ И ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Прецизионные измерения центрального момента инерции неоднородного твердого тела, проведенные по методу регистрации периода колебаний, требуют особого внимания к оценке погрешностей измерений. Приведена оценка влияния амплитуды на период колебаний и оценка вклада этой зависимости на погрешность измерения центрального момента инерции. Полученные результаты, позволили уточнить соответствующие формулы оценки систематических и статистических погрешностей, приводимые в литературе.

Ключевые слова: физический маятник, связь периода и амплитуды колебаний, полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода, погрешность измерения момента инерции.

Введение

Измерение главных или центральных моментов инерции неоднородных твердых тел является актуальной технических задачей [1–3]. В этих измерениях часто используется метод гармонических колебаний испытуемого тела вокруг заданной оси, при этом измеряется период малых колебаний испытуемого тела как физического маятника. С целью уменьшения погрешности измерения периода колебаний, как правило, приходится измерять совокупное время как можно большего числа (около 100) колебаний маятника, выведенного из состояния устойчивого равновесия. Действия диссипативных сил приводят к затуханию колебаний, поэтому провести измерения при малых колебаниях физического маятника бывает невозможным. То есть когда число колебаний, после которых амплитуда колебаний уменьшается в **e** раз, меньше ста ($N_e < 100$), значение угла начального отклонения φ_{max1} должен быть достаточно большим ($\varphi_{max1} \geq 20^o$). При сухом трении в точках опоры подвеса амплитуда колебаний уменьшается по арифметической прогрессии. При некотором, ненулевом значении амплитуды, эти колебания прекращаются из-за явления застоя, присущего сухому трению. При жидком трении в точках опоры подвеса амплитуда колебаний уменьшается по геометрической прогрессии, и формально колебания длятся бесконечно [4].

Связь угла отклонения и периода колебаний

Уравнение движения физического маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mathrm{mga}}{\mathrm{J}}\sin\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

имеет общее решение, которое описывает негармонические, но также периодические колебания, с амплитудным (уже немалым) значением угла $0 < \varphi_{max1} < \pi$. Период этих колебаний T зависит от угла φ_{max1}. Максимальный угол отклонения колеблющегося маятника от состояния равновесия не может быть больше π, в противном случае возникнет вращательное движение. Приведем связь T с T_o [5]. Напомним, что T_o – период колебаний с амплитудным значением угла отклонения $\varphi_{max1} \to 0$. Так как математический маятник является частным случаем физического маятника, то общее решение приведенного дифференциального уравнения полностью удовлетворяет уравнениям движения математического маятника.

Умножая обе части этого второго порядка линейного однородного дифференциального уравнения на $d\varphi$ и интегрируя, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}d\varphi=-\omega_0^2\sin\varphi d\varphi,\quad d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)=\omega_0^2 d\left(\cos\varphi\right),$$

$$\int d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)=\int\omega_0^2 d\left(\cos\varphi\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\omega_0^2\cos\varphi+C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 найдем, записывая начальные условия для угла отклонения физического маятника. Пусть, когда $t=0,\ \varphi=\varphi_{\max1},\ d\varphi/dt=0$. Тогда $C_1=-\omega_0^2\cos\varphi_{\max1}$.

Следовательно, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2\omega_0^2\left(\cos\varphi-\cos\varphi_{\max1}\right)$ или $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\varphi_{\max1}\right)}$,

откуда следует, что $dt=\frac{1}{\omega_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\varphi_{\max1}\right)}}$.

Для интегрирования произведем замену переменных, согласно равенствам

$$\sin\left(\xi\right)=\frac{\sin\left(\varphi/2\right)}{\sin\left(\varphi_{\max1}/2\right)},\quad d\left(\sin\left(\xi\right)\right)=\frac{1}{\sin\left(\varphi_{\max1}/2\right)}d\left(\sin\left(\varphi/2\right)\right),$$

$$\cos\left(\xi\right)d\xi=\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\varphi/2\right)}{\sin\left(\varphi_{\max1}/2\right)}d\varphi,\quad d\varphi=2\sin\left(\varphi_{\max1}/2\right)\frac{\cos\left(\xi\right)}{\cos\left(\varphi/2\right)}d\xi.$$

Интервалу значений $0\le\varphi\le\varphi_{\max1}$ соответствует интервал значений $0\le\xi\le\pi/2$ переменной ξ, то есть одна четвертая часть целого колебания. Следовательно,

$$dt=\frac{1}{\omega_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\cos\varphi-\cos\varphi_{\max1}\right)}}=\frac{1}{\omega_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(1-2\sin^2\left(\varphi/2\right)-1+2\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{2\sqrt{\left(-\sin^2\left(\varphi/2\right)+\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\right)}}2\sin\left(\varphi_{\max1}/2\right)\frac{\cos\left(\xi\right)}{\cos\left(\varphi/2\right)}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin^2\left(\varphi/2\right)/\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\right)}}\frac{\cos\left(\xi\right)}{\cos\left(\varphi/2\right)}d\xi=\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\xi\right)}}\frac{\cos\left(\xi\right)}{\cos\left(\varphi/2\right)}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\omega_0}\frac{d\xi}{\cos\left(\varphi/2\right)}=\frac{1}{\omega_0}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\left(\sin\left(\varphi_{\max1}/2\right)\sin\left(\xi\right)\right)^2}}=\frac{1}{\omega_0}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\sin^2\left(\xi\right)}}.$$

Таким образом, $\int\limits_0^{T/4}dt=\frac{1}{\omega_0}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{2\left(1-\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\sin^2\xi\right)}}$,

или, разложив в ряд подынтегральную функцию, получим

$$T=\frac{4}{\omega_0}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\sin^2\xi}}=T_0\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\sin^2\xi\right)^{-1/2}d\xi=$$

$$=T_0\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\sin^2\xi+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\sin^2\xi\right)^2+\ \ldots\ \right)d\xi= \tag{2}$$

$$=T_0\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\sin^2\left(\varphi_{\max1}/2\right)\right)^2+\ \ldots\ \right)>T_0.$$

Это решение можно представить в общем виде [6]:

$$\frac{T}{T_0}=\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin\left(\frac{\varphi_{max}}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi}\mathrm{K}(k)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right)=$$

$$=F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 k^4+\ \cdots= \tag{3}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\varphi_{max}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\varphi_{max}}{2}\right)+\ \cdots,$$

где $\mathrm{K}(k)\equiv\mathrm{K}(\sin(\varphi_{max}/2))\equiv\mathrm{K}(\sin(\alpha))=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2(\sin x)^2}}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2(\sin x)^2}}$

является полным нормальным эллиптическим интегралом Лежандра первого рода. Он, как убедились, не выражается через конечное число элементарных функций, рассчитывается методом приближений и приводится в виде таблиц [6]. Значения $\mathrm{K}(\sin(\alpha))$ в таблицах [6] приводится в зависимости от значения угла α, который в данном случае представляется равенством $\alpha\equiv\varphi_{max}/2$. Величина $F(a,\ b;\ c;\ z)$ в выражении для T - гипергеометрическая функция [6], являющаяся решением гипергеометрического дифференциального уравнения Гаусса: $z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz}-abw=0$. Она выражается формулой

$$w=F(a,\ b;\ c;\ z)\equiv 1+\frac{ab}{c}z+\frac{1}{2!}\cdot\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}z^2+\ \cdots\ ,$$

из которой следует, что $F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 k^4+\ \cdots$.

На рис. 1 и в табл. 1 приведены значения отношения T/T_0 для широкого интервала значений амплитуды угла отклонения $0<\varphi_{max}<\pi$.

Очевидно, что при $\varphi_{max}<10^{\circ}$

$$((T-T_0)/T_0)<0{,}2\%.$$

Если же $\varphi_{max}>23^{\circ}$, то

$$((T-T_0)/T_0)>1{,}0\%.$$

Поскольку неравенство $T>T_0$ выполняется для всех значений $0<\varphi_{max1}<\pi$, то возникает систематическая погрешность измерения периода колебаний, которая, в свою очередь, приводит к систематической погрешности измерения центрального момента инерции J_c испытуемого тела.

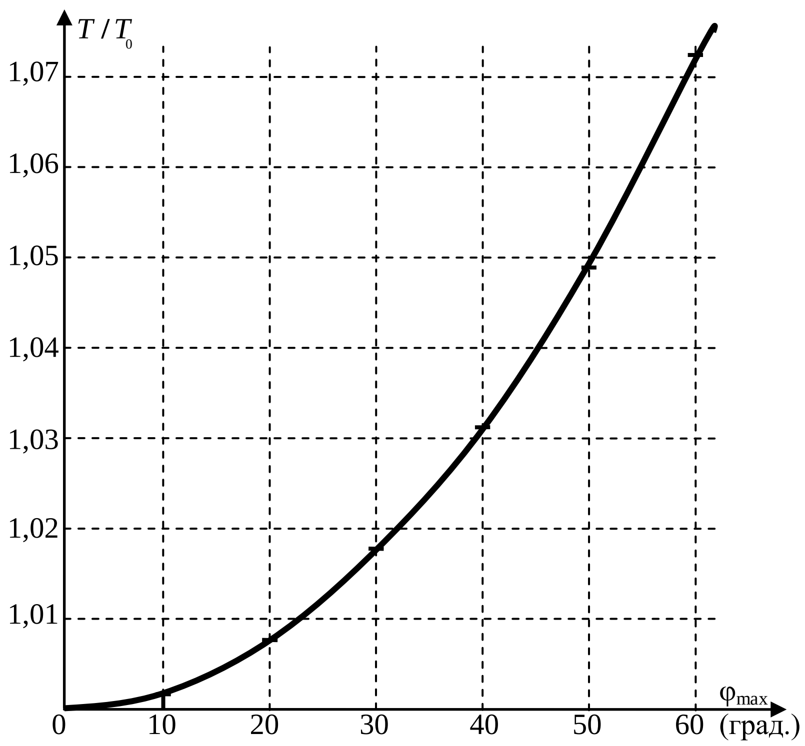

Рис. 1. Зависимость периода от амплитуды угла колебаний

Таблица 1

Зависимость периода колебаний от амплитуды угла отклонения маятника

φ_{max}(град)	0	10	20	30	40	60	90	120	150
T/T_o	1	1,0019	1,0076	1,0179	1,0313	1,0732	1,1803	1,3729	1,7622

Во время эксперимента маятник выводится из положения устойчивого равновесия на определенный угол $\varphi_{\max 1}$ и измеряется совокупное время τ для $N>>1$ колебаний. Регистрируется амплитудное значение угла отклонения после N колебаний - $\varphi_{\max N}$. Для этих N колебаний определяются среднее время одного колебания $\overline{T}=\tau/N$ и среднее значение амплитуды угла отклонения $\overline{\varphi}_{\max}=\left(\varphi_{\max 1}+\varphi_{\max N}\right)/2$.

$$\overline{T}=T_0\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin\left(\frac{\overline{\varphi}_{\max}}{2}\right)\right)=T_0\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\overline{\varphi}_{\max}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\overline{\varphi}_{\max}}{2}\right)+\cdots\right\}. \qquad (4)$$

Поскольку неравенство $\overline{T}>T_0$ выполняется для всех значений $0<\varphi_{\max 1}<\pi$, то возникает систематическая погрешность измерения J_c.

Период колебаний и погрешность измерения центрального момента инерции

Центральный момент инерции тела J_c определяется, согласно равенствам

$$J_c\left(m,\, a,\, T_0\right)=ma\left(\frac{gT_0^2}{4\pi^2}-a\right)=mR_c^2,\quad J_c\left(m,\, a,\, \overline{T}\right)=ma\left(\frac{g\overline{T}^2}{4\pi^2}-a\right), \qquad (5)$$

где m – масса тела; R_c - его радиус инерции; a - расстояние точки центра масс тела от оси вращения.

Следовательно, систематическую абсолютную погрешность измерения центрального момента инерции $\Delta J_{c,\,\varphi}$ можно представить выражением

$$\Delta J_{c,\,\varphi}=J_c\left(m,\, a,\, \overline{T}\right)-J_c\left(m,\, a,\, T_0\right)=\frac{mag}{4\pi^2}\left(\overline{T}^2-T_0^2\right)=$$
$$=\frac{mag}{4\pi^2}\overline{T}^2\left(1-T_0^2/\overline{T}^2\right)=\left(J_c\left(m,\, a,\, \overline{T}\right)+ma^2\right)\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}\right), \qquad (6)$$

где $\alpha\equiv\dfrac{\overline{\varphi}_{\max}}{2}=\dfrac{\varphi_{\max 1}+\varphi_{\max N}}{4}$.

Относительная систематическая погрешность определения центрального момента инерции, обусловленная немалым значением амплитуды угла отклонения, будет

$$\left(\delta J\right)_{c,\varphi}=\frac{\Delta J_{c,\varphi}}{J_{c,\varphi}}=\frac{J_c\left(m,\, a,\, \overline{T}\right)-J_c\left(m,\, a,\, T_0\right)}{J_c\left(m,\, a,\, T_0\right)}=$$
$$=\frac{\left(J_c\left(m,\, a,\, \overline{T}\right)+ma^2\right)\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}\right)}{mR_c^2}=\left(\frac{J_c\left(m,\, a,\, \overline{T}\right)}{mR_c^2}+\frac{a^2}{R_c^2}\right)\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}\right)= \qquad (7)$$
$$=\left(\frac{mR_c^2+\Delta J_{c,\varphi}}{mR_c^2}+\lambda^2\right)\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}\right)=\left(1+\left(\delta J\right)_{c,\varphi}+\lambda^2\right)\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}\right).$$

Решив это линейное уравнение относительно $(\delta J)_{c,\varphi}$, получим

$$(\delta J)_{c,\varphi}=\left(1+\lambda^2\right)\left(\frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^2-1\right). \qquad (8)$$

С поправкой на систематическую погрешность (6), для J_c получим

$$\begin{aligned}&J_c\left(m,\ a,\ T_0\right)=J_c\left(m,\ a,\ \bar{T}\right)-\Delta J_{c,\,\varphi}=\\&=J_c\left(m,\ a,\ \bar{T}\right)-\left(J_c\left(m,\ a,\ \bar{T}\right)+ma^2\right)\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}\right)= \qquad (9)\\&=\left(J_c\left(m,\ a,\ \bar{T}\right)+ma^2\right)\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}-ma^2=J\left(m,\ a,\ \bar{T}\right)\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}-ma^2.\end{aligned}$$

Таким образом, измеренное значение момента инерции неоднородного твердого тела относительно центральной оси, параллельной выбранному направлению AA_1 можно, представить в виде

$$J_c=J_c\left(m,\ a,\ T_0\right)\left(1\pm\left(\delta J_c\right)_{m,\,a,\,T}\right)=J_c\left(m,\ a,\ T_0\right)\left(1\pm\sqrt{\left(\delta J_c\right)_m^2+\left(\delta J_c\right)_T^2+\left(\delta J_c\right)_a^2}\right), \qquad (10)$$

где

$$J_c\left(m,\ a,\ T_0\right)=J\left(m,\ a,\ \bar{T}\right)\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{K}\left(\sin(\alpha)\right)\right)^{-2}-ma^2. \qquad (11)$$

В монографии М.М. Гернета и В.Ф. Ротобыльского [1] для расчета погрешности измерений обсуждаемым здесь методом приведены две некорректные формулы (сравни с формулой(10))

$$\delta J_c=\sqrt{\left(\delta J_{c\varphi}\right)^2+\left(\delta J_{cm}\right)^2+\left(\delta J_{ca}\right)^2+\left(\delta J_{cT}\right)^2},$$

где (сравни с формулой (8)).

$$\delta J_{c\varphi}=\left(1-\frac{4\mathrm{K}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{R_c^2}\right)$$

Систематическая погрешность неправильно оценена. Действительно, при $\lambda=a/R_c=1$ она равна нулю при любом значении амплитуды угла отклонения маятника. Кроме того, систематическая погрешность использована в качестве статистической, когда ее следует использовать как поправку.

Разумеется, чем больше влияние диссипативных сил, тем большим должен быть угол начального отклонения для получения одинакового числа колебаний. Следовательно, тем большим окажется связанная с ним поправка периода колебаний в выражении для δJ_c.

Следует отметить, что, как доказал Н.Е. Жуковский, трение в опорах влияет на амплитуду, но не влияет на изменение периода для данного значения амплитуды колебаний. На амплитуду влияют также сопротивление воздуха, упругие силы и моменты сил трения качения в опорах, однако влиянием этих факторов на период колебаний можно пренебречь.

Если испытуемое тело вместе с подвесом обладает небольшой массой, то его целесообразно качать на призмах, в противном случае необходимо использовать цилиндрические шипы и смазку.

Таким образом, для прецизионного измерения центрального момента инерции произвольного твердого тела методом физического маятника [7] проведены точная оценка и правильный учет систематических и статистических погрешностей измерений, заслуживающие доверия.

Библиографический список

1. **Гернет, М.М.** Определение моментов инерции / М.М. Гернет, В.Ф. Ратобыльский. – М.: Машиностроение, 1969. - 315 с.
2. **Строженко, В.А.** Синхронизация вращения в задаче определения главной центральной оси инерции неоднородного твёрдого тела. Проблемы механики / В.А. Строженко. – М.: Физматлит, 2003.
3. **Строженко, В.А.** Определение направлений главных осей инерции в теле произвольной формы / В.А. Строженко. - Киев, 1986. - 40 с.
4. **Голубева, О.В.** Теоретическая механика / О.В. Голубева. – М.: Физматлит, 1961. – 701 с.
5. **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учеб. пособие. В 3-х т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2006. - 432 с.
6. **Корн, Г.А.** Справочник по математике / Г.А. Корн, Т.М. Корн. – М.: Наука, 1974.– 832 с.
7. **Пилипосян, С.Е.** Измерение момента инерции произвольного твердого тела // Машиностроение и автоматизация: труды НГТУ. – Н. Новгород, 2010. №4 (83). С. 100–110.

Дата поступления
в редакцию 02.04.2010

S.E. Piliposian

DEVIATION ANGLE, VIBRATION PERIOD AND MEASUREMENT ERROR OF PHYSICAL PENDULUM CENTRAL MOMENT OF INERTIA

Special attention should be paid to estimation of measurement errors during precision measurements of central moment of inertia of heterogeneous solid body performed via the method of vibration period recording.

The article estimates amplitude effects on vibration period and contribution of this dependence to measurement error of central moment of inertia.

The obtained results point out the incorrectness of corresponding formulas for estimation of the systematic and statistical errors given in the monograph of M.M. Gernet and V.F. Ratobylskiy [1].

Key words: physical pendulum, connection between vibration period and amplitude, complete elliptic integral of the first kind in Legendre normal form, moment of inertia measurement error.