
МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 532.5

Е.А. Рувинская

СВОЙСТВА УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ: СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Цель: Работа посвящена исследованию свойств локализованных структурно устойчивых внутренних гравитационных волн в жидкости с симметричной трехслойной стратификацией.

Метод: Используется прямое численное интегрирование двумерной по пространству полнонелинейной системы уравнений Эйлера для несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска и модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза.

Результаты: Проанализирована зависимость количества уединенных внутренних волн, генерируемых из одинакового импульса начального возмущения, от соотношения толщин слоев для рассматриваемых моделей. Найдены величины предельных амплитуд солитонов для разных сочетаний условий в среде. Построены зависимости скорости, ширины, массы, энергии от амплитуды при фиксированных параметрах плотностной стратификации.

Выводы: Слабонелинейная теория может использоваться для определения волнового режима (существования солитонных решений для конкретных параметров среды), хорошо описывает форму и свойства уединенных внутренних волн при малых амплитудах, но переоценивает количество генерируемых солитонов.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза, численное моделирование, система уравнений Эйлера.

Введение

Изучение внутренних гравитационных волновых движений – актуальная задача механики жидкости, интерес к которой остается высоким в течение нескольких десятилетий. Теория внутренних гравитационных волн благодаря развитию гидродинамики, вычислительной математики и теории колебаний и волн постоянно совершенствуется, что обусловлено практическими нуждами человечества. Сложно переоценить роль интенсивных внутренних волн в динамических процессах, происходящих во всех природных стратифицированных водоемах от озер и водохранилищ до морей и океанов. Особый интерес для современной науки представляют солитоны внутренних волн, которые часто проявляются как весьма значительные, энергонесущие образования и играют ведущую роль в процессах, происходящих в окружающей их среде.

Для описания генерации и распространения солитонов внутренних волн часто используются упрощенные слоистые модели жидкости с кусочно-постоянным распределением плотности. Наиболее хорошо изучена волновая динамика в двухслойной жидкости (для большинства водоемов характерно наличие приповерхностного (прогретого) слоя более легкой жидкости и остальной (более холодной) толщи воды), однако возрастает и количество работ посвященных трехслойной среде [1-6], которая не только обладает существенно более сложной волновой динамикой, но и встречается в некоторых природных акваториях, таких как Балтийское или Южно-Китайское море [7, 8].

Стремительное развитие вычислительной математики и ЭВМ позволило мировому научному сообществу создать ряд вычислительных программных комплексов [9-14], позволяющих решать задачу о генерации и распространении внутренних волн путем прямого численного интегрирования полной системы уравнений гидродинамики невязкой идеальной или вязкой жидкости. Такие модели достаточно универсальны, поскольку позволяют исследовать динамику внутренних волн в бассейне с произвольными параметрами, но к их недостаткам можно отнести неочевидность связей между параметрами численного решения и, как правило, большие затраты вычислительных ресурсов.

Наряду с численными продолжают развиваться приближенно-аналитические методы, позволяющие с помощью асимптотических процедур сводить исходную систему уравнений гидродинамики к нелинейному эволюционному уравнению, позволяющему определить особенности волнового режима стратифицированной среды и применить весь арсенал теории возмущений к анализу данного класса задач.

Таким образом, если численные модели для исследователя являются основным техническим инструментом расчета внутренних волновых полей в исследуемом бассейне, то эволюционные уравнения предоставляют широкие возможности для анализа волновых режимов в зависимости от условий исследуемой среды и обобщения результатов на близкие по соотношению параметров модельные случаи без необходимости проведения дополнительных вычислительных экспериментов.

Целью настоящей работы является исследование свойств уединенных внутренних волн в симметричной трехслойной жидкости. Для их более детального изучения будет проведено сравнение параметров уединенных внутренних волн, а также особенностей их генерации как в рамках полнонелинейной численной модели, так и с помощью слабонелинейной теории.

Постановка задачи. Описание моделей

Рассматривается задача о генерации уединенных внутренних волн из начального возмущения в виде импульса прямоугольной формы в бассейне глубины H с ровным плоским дном и поверхностью с симметричной устойчиво стратифицированной трехслойной жидкостью (рис. 1).

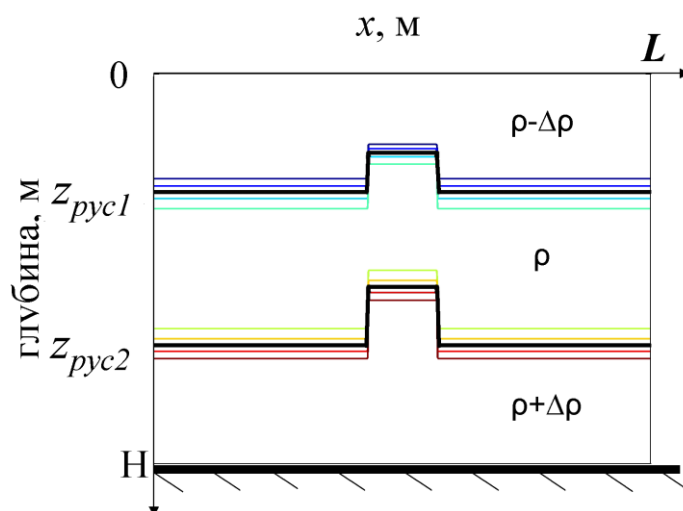


Рис. 1. Схема задачи

Границы между слоями разной плотности резкие (для слабонелинейной модели) или представляющие собой тонкий переходный слой (для полнонелинейной модели). На рис. 1 изображены возмущенные линии одинаковой плотности (изопикны) внутри верхнего и нижнего переходного слоя для полнонелинейной модели в начальный момент времени, жирной

черной линией обозначены резкие границы между слоями (толщины симметричных верхнего и нижнего слоев обозначим $h = z_{\text{пл1}} \equiv H - z_{\text{пл2}}$).

Наиболее простой моделью для описания динамики внутренних волн в симметричной трехслойной жидкости в предположении малой амплитуды является модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (мКдВ) [15], поскольку для такой среды в силу симметрии коэффициент квадратичной нелинейности в слабонелинейных эволюционных уравнениях обращается в нуль:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c \frac{\partial A}{\partial x} + \alpha_1 A^2 \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

A – смещение волнового интерфейса в точке максимума линейной моды; c – фазовая скорость распространения волны; α_1 – коэффициент кубической нелинейности; β – коэффициент дисперсии. Физический смысл и выражения коэффициентов уравнения (1) для трехслойной среды содержатся в [15, 16].

Исследование эволюции начального возмущения в рамках уравнения (1) проводилось с помощью численного интегрирования на основе неявной псевдоспектральной схемы с контролем сохранения интегралов массы и энергии.

Так как коэффициент кубической нелинейности может менять знак в зависимости от соотношения толщин слоев в симметричной трехслойной жидкости, в работах [5, 17, 18] были получены уточнения мКдВ, позволяющее корректно описывать особенности солитонов внутренних волн в бассейнах со стратификациями плотности, соответствующими вырождению коэффициента кубической нелинейности.

Для численного моделирования уединенных внутренних волн использован программный комплекс, разработанный профессором университета Ватерлоо (Канада) К. Лэмбом, решающий систему уравнений, описывающих движение невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в вертикальной плоскости в приближении Буссинеска, путем прямого численного интегрирования:

$$\begin{aligned} \vec{U}_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} - f \vec{v} \vec{i} &= -\vec{\nabla} p - \rho g \vec{k}, \\ v_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} v + f u &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\rho_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0,$$

$$\rho = \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_0}. \quad (3)$$

Эти уравнения решаются в пространстве размерности 2+1, т.е. все физические величины являются функциями x , z и t . Здесь $\vec{U} = (u, w)$ – вектор скорости в вертикальной плоскости (x, z) ; u – скорость вдоль горизонтальной оси x ; w – скорость вдоль вертикальной оси z , v – компонента скорости в поперечном направлении y ; $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор градиента; t – время; ρ_f – плотность морской воды; ρ_0 – постоянная характерная плотность (возникает в силу предположения, что плотность воды в исследуемом бассейне меняется незначительно, т. е. в силу приближения Буссинеска: $\rho_f = \rho_0(1 + \rho)$), ρ – безразмерная величина (аномалия плотности); g – гравитационное ускорение; f – параметр Кориолиса; \vec{i} и \vec{k} – единичные орты по осям x и z .

Пространственная расчетная область имеет горизонтальный размер L , вертикальный – H . Задача решается в области $\{-L/2 \leq x \leq L/2, -H \leq z \leq 0\}$. На поверхности океана используется приближение «твердой крышки» $w = 0$ при $z = 0$. Граничное условие на дне ставится как условие непротекания $w = 0$ при $z = -H$. Правая и левая границы являются открытыми.

Процедура численного решения системы основана на неявной предиктор-корректорной двухшаговой конечно-разностной схеме.

Верификация модели была проведена ранее в работах [9, 19, 20].

Для инициализации модели необходимо задать горизонтально-однородное невозмущенное поле плотности морской воды $\rho_{mean}(z)$, а также начальное возмущение поля плотности в форме $\rho(x, z, t = 0) = \rho_{mean}(z - \eta(x))$ и начальное распределение скоростей, которое выбирается исходя из линейной теории длинных волн в соответствии с возмущением плотности.

При проведении численных экспериментов полная глубина жидкости принималась равной 100 м.

Сглаженная почти трехслойная стратификация задавалась функцией вида

$$\rho_{mean}(z) = -0.005 \tanh\left(\frac{z - z_{pvc1}}{4.0}\right) - 0.005 \tanh\left(\frac{z - z_{pvc2}}{4.0}\right). \quad (4)$$

Параметры используемых стратификаций и соответствующие им коэффициенты уравнения мКдВ представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры стратификаций плотности, используемые для постановки начальной задачи и соответствующие им значения коэффициентов уравнения мКдВ

Коэффициенты	Параметры			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
$z_{pvc1}, \text{ м}$	- 25	- 26	- 27	- 28
$z_{pvc2}, \text{ м}$	-75	- 74	-73	- 72
$c, \text{ м/с}$	1.4930	1.5246	1.5557	1.5861
$\beta, \text{ м}^3/\text{с}$	668.1055	692.8752	716.8003	739.8218
$\alpha, \text{ с}^{-1}$	0	0	0	0
$\alpha_1, (\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$	$6.68 \cdot 10^{-3}$	$5.55 \cdot 10^{-3}$	$4.46 \cdot 10^{-3}$	$3.52 \cdot 10^{-3}$
	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
$z_{pvc1}, \text{ м}$	- 29	- 30	- 31	- 32
$z_{pvc2}, \text{ м}$	-71	- 70	- 69	- 68
$c, \text{ м/с}$	1.6159	1.6453	1.6741	1.702
$\beta, \text{ м}^3/\text{с}$	761.8882	782.9382	802.9169	821.776
$\alpha, \text{ с}^{-1}$	0	0	0	0
$\alpha_1, (\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$	$2.71 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-3}$	$8.59 \cdot 10^{-4}$

Начальное возмущение поля плотности задавалось в виде

$$\eta(x, z, t = 0) = F(x)\Phi(z), \quad (5)$$

где $\Phi(z)$ – решение краевой задачи для вертикальной структуры моды:

$$\begin{cases} \Phi'' + \frac{N^2(z)}{c^2} \Phi = 0, \\ \Phi(0) = \Phi(H) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

здесь c – фазовая скорость длинных линейных внутренних волн; $N(z)$ – частота Вэйсяля-Брента.

$$F(x) = \frac{a}{2} \left(1 + \text{th} \left(\frac{(x - x_0)}{d} \right) \right) - \frac{a}{2} \left(1 + \text{th} \left(\frac{(x - x_2)}{d} \right) \right). \quad (7)$$

Горизонтальная и вертикальная составляющие скорости задавались в линейном приближении:

$$u(x, z, t = 0) = cF(x) \frac{d\Phi}{dz}, \quad (8)$$

$$w(x, z, t = 0) = -c\Phi(z) \frac{dF}{dx}. \quad (9)$$

Шаг по пространству между узлами сетки, а также шаг по времени выбирались исходя из критерия устойчивости Куранта -Фридрихса -Леви.

Численные эксперименты проводились как для волн понижения, так и повышения уровня. В процессе нелинейной эволюции начальная волна трансформировалась в распространяющийся волновой пакет, причем со временем происходило разделение головной УВВ и осциллирующего следа. Критерием формирования УВВ служили оценки изменения параметров, описанные в работе [21]. Сравнение вертикальной структуры волновых полей проводилось аналогично [22].

Особенности генерации уединенных внутренних волн в симметричной трехслойной жидкости в зависимости от соотношения толщин слоев

Как отмечалось ранее, анализ коэффициентов слабонелинейных эволюционных уравнений позволяет предсказывать возможные волновые режимы для выбранного сочетания начальных условий в жидкости, в том числе делать прогноз относительно генерации солитонов внутренних волн в бассейне с заданной стратификацией.

В трехслойной симметричной жидкости коэффициент квадратичной нелинейности вырождается, а коэффициент кубической нелинейности может быть положительным ($\alpha_1 > 0$), что свидетельствует о возможности существования уединенных волн (соответствующих в слабонелинейном пределе солитонам уравнения мКдВ), отрицательным ($\alpha_1 < 0$) – характеризующим жидкость, в которой не могут генерироваться солитоны (возможно существование уединенных волн только на ненулевом пьедестале, а также стационарных решений в виде бездиссипативных ударных волн [15]), и равным нулю.

Смена знака кубической нелинейности для трехслойной симметричной жидкости происходит при $h/H = 9/26$ ($\alpha_1 > 0$ при $h/H < 9/26$), где h – толщина верхнего и нижнего слоев; H – полная глубина [15]. Так как мы рассматриваем стратификацию плотности со сглаженным пикноклином, значение h/H , при котором $\alpha_1 = 0$, немного отличается от указанного для слоистой модели: оно сдвигается влево по числовой оси (рис. 2).

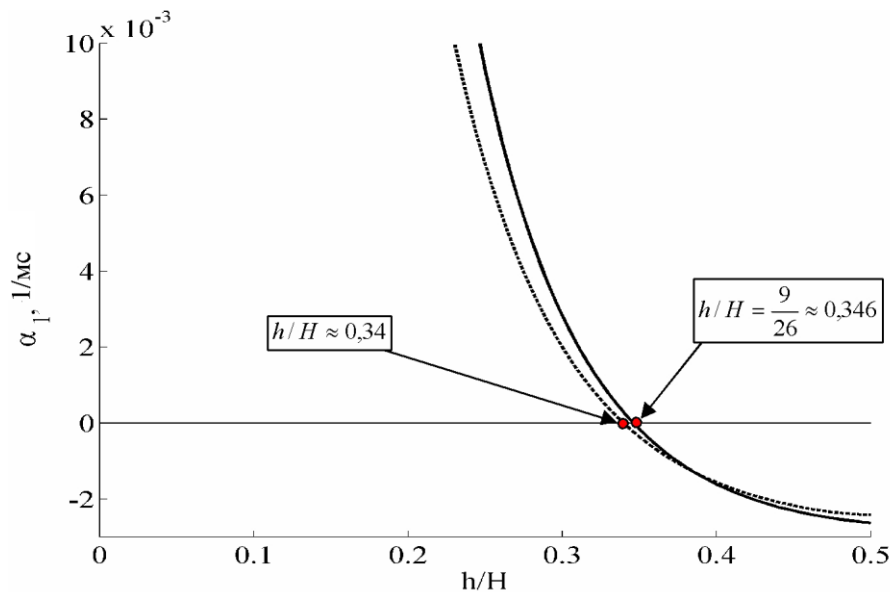


Рис. 2. Коэффициент кубической нелинейности при различных соотношениях толщин слоев для трехслойной симметричной жидкости с резкими границами между слоями разной плотности и сглаженными (пунктир)

В работе [3] для моделирования стационарных внутренних волн в симметричной трехслойной среде использовалось полнонелинейное уравнение DJL (Dubreil-Jacotin-Long) (аналог системы уравнений Эйлера) и было установлено, что солитоны не генерируются из начального возмущения уже при $h/H = 0.3$.

В рамках прямого численного интегрирования системы уравнений Эйлера с использованием программного комплекса Лэмба был проведен ряд численных экспериментов (табл. 1 № 1-8) и установлено, что точка смены волновых режимов находится между $h/H = 0.31$ и $h/H = 0.32$, что несколько меньше значения, предсказанного для слабонелинейной теории, но превышает прогнозируемую в работе [3] величину.

В трехслойных жидкостях с симметричными стратификациями плотности, удовлетворяющими условию $h/H < 9/26$, из прямоугольного импульса могут появляться сразу несколько солитонов. Исследуем зависимость от соотношения толщин слоев количества генерируемых уединенных волн при эволюции прямоугольного импульса фиксированной массы в рамках полнонелинейной модели и уравнения мКдВ.

В работе [23] для определения числа солитонов, появляющихся при эволюции начального возмущения в рамках уравнения мКдВ, применяется ассоциированная задача рассеяния и определяется дискретный спектр, в котором действительные собственные значения соответствуют солитонам, а комплексные собственные значения – бризерам. При этом однополярные возмущения (положительные или отрицательные) могут генерировать только солитоны, их число зависит от массы начального импульса. Для прямоугольного импульса число дискретных собственных значений (генерируемых солитонов) определяется формулой

$$N = \left[\frac{UL}{\pi} + \frac{1}{2} \right], \quad (10)$$

где U – безразмерная амплитуда; L – безразмерная ширина; квадратные скобки обозначают целую часть числа.

В размерном виде выражение (10) запишется следующим образом:

$$N = \left[\frac{al \sqrt{\frac{\alpha_1}{6\beta}}}{\pi} + \frac{1}{2} \right], \quad (11)$$

где a – амплитуда импульса, м; l – ширина импульса, м; α_1 и β – коэффициенты уравнения мКдВ при заданной стратификации плотности.

Для сравнения количества генерируемых уединенных внутренних волн в рамках уравнения мКдВ и полнонелинейной численной модели (рис. 3) проводились численные эксперименты с параметрами плотностных стратификаций № 1-8 табл. 1, начальное возмущение задавалось в виде прямоугольного импульса (7) с $a = 15$ м, $l = 2500$ м.

Согласно рис. 3, слабонелинейная теория переоценивает число возможных солитонов внутренних волн. Это происходит, потому что большая часть энергии начального импульса в полнонелинейной модели уходит на формирование солитона предельной амплитуды, тогда как в рамках уравнения мКдВ уединенные волны не имеют амплитудных ограничений (рис. 4). Солитон, достигающий предельной амплитуды, может сосредотачивать в себе фактически неограниченное количество энергии, поскольку способен уширяться, приобретая столбовую форму. Классическим примером уединенных волн с уплощенной вершиной является солитон уравнения Гарднера. Для трехслойной симметричной жидкости существование таких волн было продемонстрировано в работах [1, 3], где проводилось численное моделирование динамики внутренних волн в рамках полнонелинейных моделей DJL и теории сопряженных потоков, а также в [22]. Использование слабонелинейной теории для обоснования возможности существования солитонов предельной амплитуды в симметричной трехслойной среде описано в [5, 18].

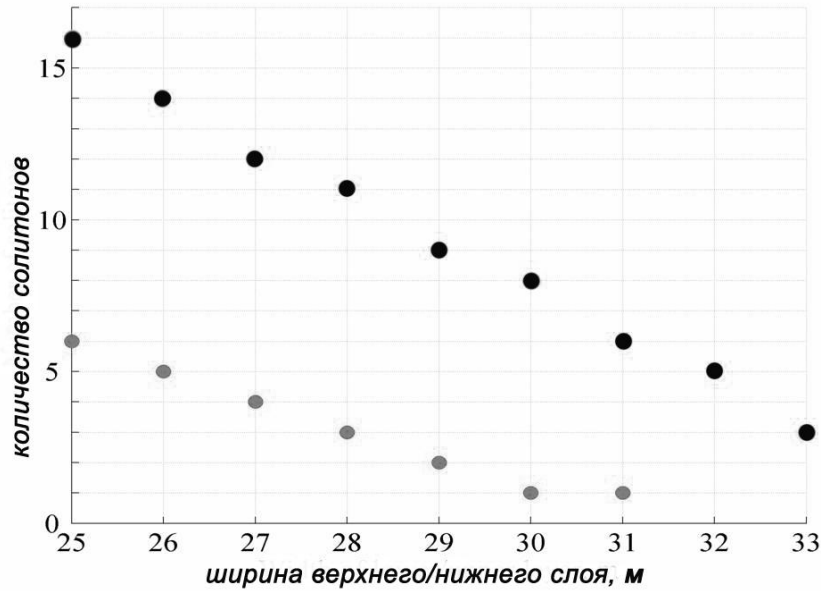


Рис. 3. Количество генерируемых из прямоугольного импульса ($a = 15$ м, $l = 2500$ м) солитонов в зависимости от соотношения толщин слоев в рамках полнонелинейной (серые точки) и слабонелинейной (черные точки) модели

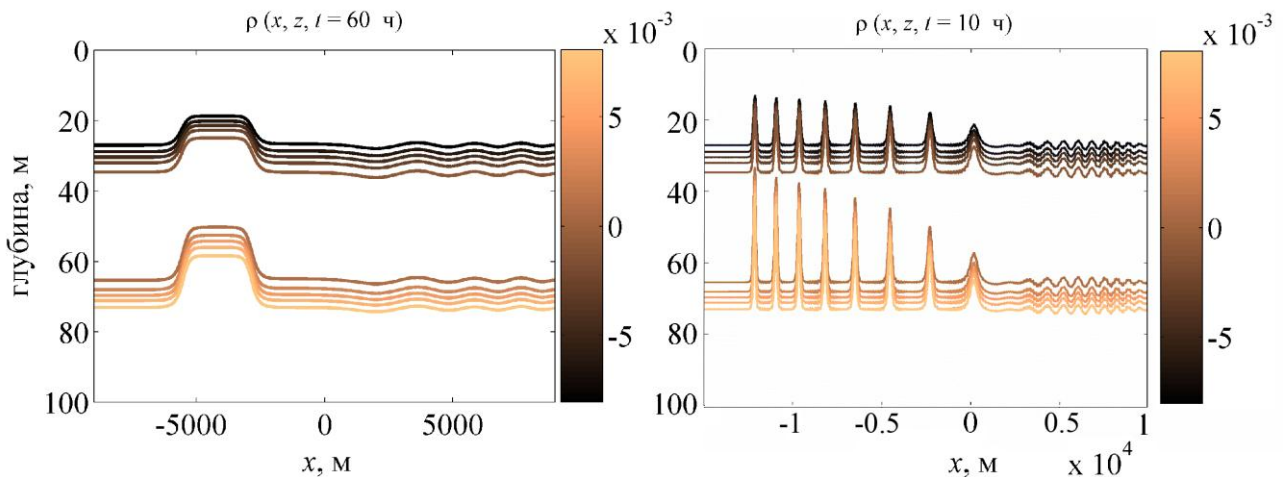


Рис. 4. Эволюция прямоугольного импульса ($a = 15$ м, $l = 2500$ м) в жидкости с параметрами стратификации № 6 (табл. 1): генерация солитона предельной амплитуды в рамках полнонелинейной (слева) и многосолитонного решения в рамках слабонелинейной (справа) модели

В соответствии с рис. 4, время формирования солитонов для одинаковых начальных задач в рамках рассматриваемых моделей существенно отличается: если слабонелинейное решение формируется за время порядка 10 ч, то для завершения формирования уединенной волны в рассматриваемой численной модели требуется существенно больший временной промежуток.

На рис. 5 представлена зависимость величины предельных амплитуд уединенных волн, генерируемых в полнонелинейной численной модели, от соотношения толщин слоев в симметричной трехслойной жидкости. Хорошей аппроксимацией для описания этой зависимости служит дуга параболы, обозначенная пунктирной линией на рис. 5 (R^2 – точность аппроксимации).

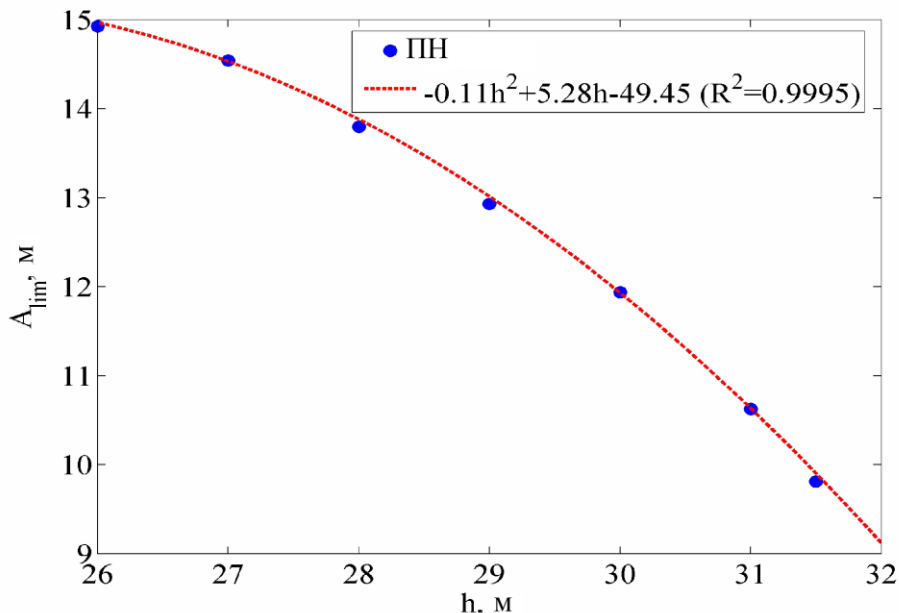


Рис. 5. Зависимость величины предельной амплитуды полнонелинейных уединенных волн от соотношения толщин слоев в симметричной трехслойной жидкости

Свойства уединенных внутренних волн при фиксированном соотношении толщин слоев в симметричной трехслойной жидкости

Величины основных характеристик генерируемых уединенных внутренних волн, таких как скорость, масса, энергия, предельная амплитуда, зависят не только от сочетания условий в жидкости, но и от формы, массы, энергии импульса начального возмущения. В предыдущем параграфе варьировалось соотношение толщин слоев в симметричной трехслойной среде, в настоящем параграфе будут исследованы уединенные внутренние волны, обладающие разными амплитудами (от малых до предельной) и распространяющиеся в жидкости с единой стратификацией плотности (соответствующей № 6 из табл. 1). Солитоны разных амплитуд были получены варьированием массы начального возмущения, определяемого формулой (7).

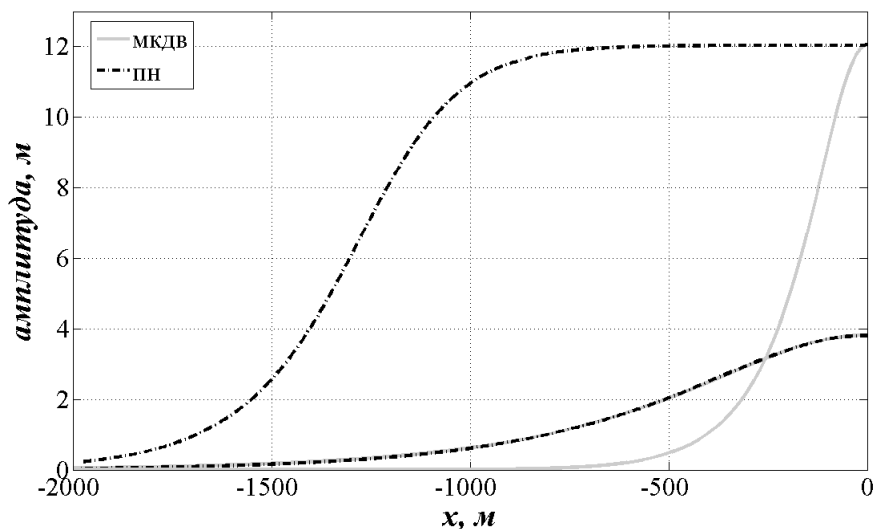


Рис. 6. Сравнение формы полнонелинейных (ПН) уединенных внутренних волн и солитонов уравнения мКдВ одинаковых амплитуд (для солитонов умеренной амплитуды кривые практически совпадают)

Закономерным результатом проведенной серии численных экспериментов стал вывод о том, что при малых амплитудах форма полнонелинейных уединенные внутренних волн хорошо описывается солитонами уравнения мКдВ, тогда как при приближении к предельной амплитуде их вид существенно отличается (рис. 6).

Перейдем от качественной демонстрации формы решения к количественным оценкам параметров уединенных волн и их сравнению с солитонами уравнения мКдВ. На рис. 7 видно, что хорошая согласованность результатов при малых амплитудах в рамках рассматриваемых моделей проявляется также и в близости зависимостей скорости и ширины от амплитуды для уединенных волн. Ширина уединенной волны определялась на уровне полуамплитуды.

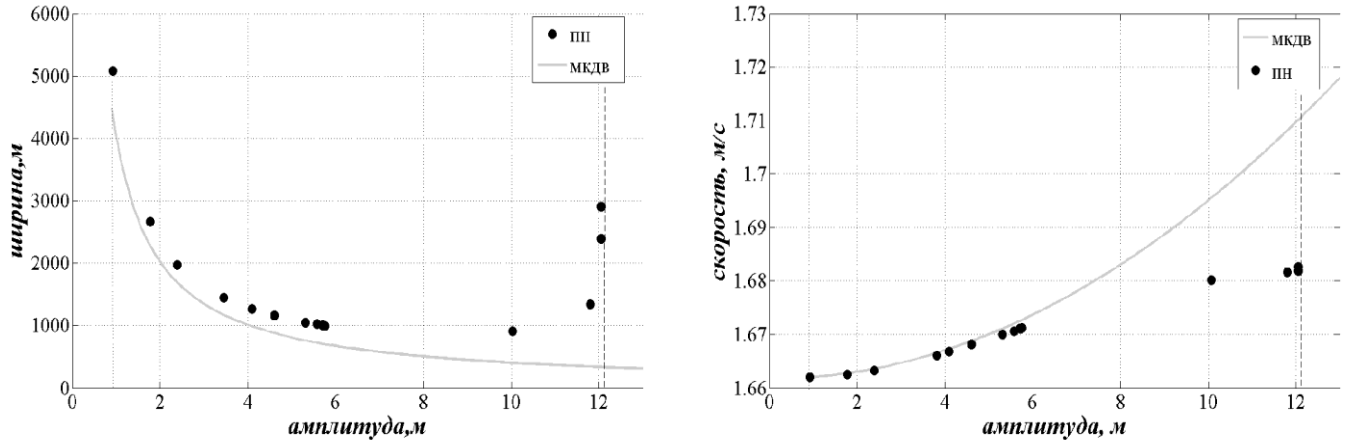


Рис. 7. Сравнение ширины (слева) и скорости (справа) полнонелинейных (ПН) уединенных внутренних волн и солитонов уравнения мКдВ одинаковых амплитуд

Масса солитона понимается как

$$M_{sol} = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(X, T) dx, \tag{12}$$

а энергия выражается формулой

$$E_{sol} = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2(X, T) dx. \tag{13}$$

Для односолитонных решений уравнения мКдВ выражения (12)-(13) примут вид

$$M_{sol} = \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha_1}} \pi, E_{sol} = 2a \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha_1}}. \tag{14}$$

Поскольку по определению солитон существует в бесконечной области, а в случае численного интегрирования расчетная область ограничена, оценим относительную погрешность интегральных величин (12) и (13), связанную с заменой бесконечной области интегрирования конечным отрезком. Было экспериментально установлено, что профиль полнонелинейной уединенной волны убывает быстрее, чем у солитона уравнения мКдВ. Поскольку для солитона уравнения мКдВ погрешность, связанная с ограничением расчетной области, вычисляется точно, то можно говорить о верхней оценке такой погрешности для уединенных волн, полученных в ходе численных экспериментов.

Верхняя оценка относительной погрешности вычисления массы уединенной волны, ограниченной областью $[-l_1; l_1]$ (центр масс солитона считается находящимся в точке $x = 0$), определяется выражением

$$\delta_{xM} = 2 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(e^{\left(\sqrt{\frac{\alpha_1 a^2}{6\beta}} l_1 \right)} \right). \quad (15)$$

Верхняя оценка относительной погрешности вычисления энергии уединенной волны имеет вид

$$\delta_{xE} = 1 - \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 a^2}{6\beta}} l_1 \right). \quad (16)$$

Вычисление величин (15) и (16) показало, что для генерируемых в ходе численных экспериментов уединенных волн относительные погрешности вычисления массы и энергии (рис. 8) составляют менее 1%.

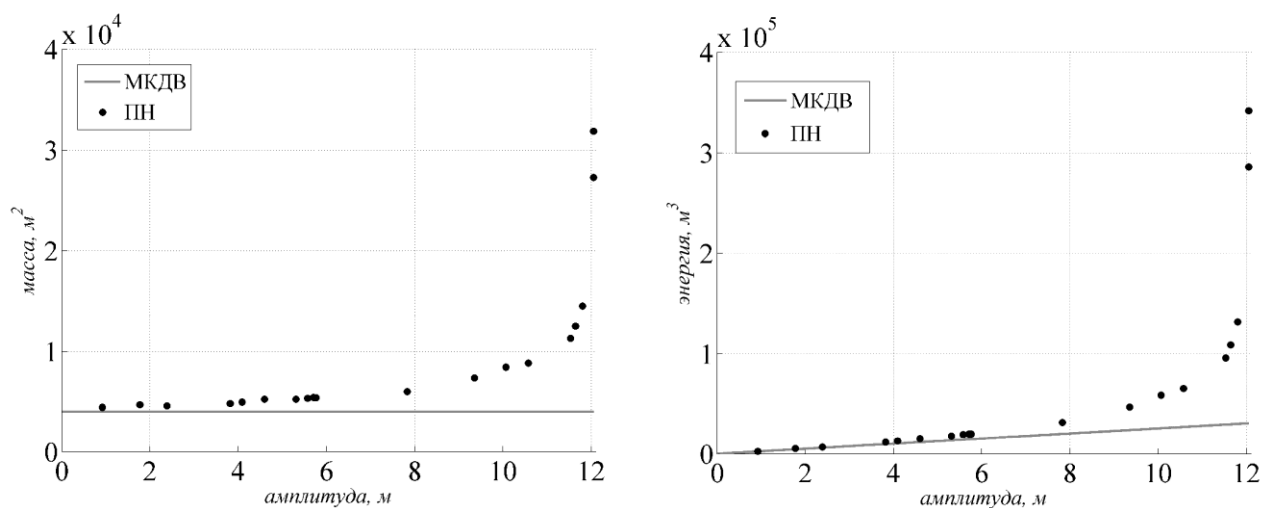


Рис. 8. Сравнение массы (слева) и энергии (справа) ПН уединенных внутренних волн и солитонов уравнения мКдВ одинаковых амплитуд

Заключение

В настоящей работе методом численного интегрирования примитивных уравнений гидродинамики невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости продемонстрировано существование широких солитоноподобных волн в среде с нулевой квадратичной нелинейностью, исследованы свойства уединенных волн в такой среде, определена предельная амплитуда. Сравнение результатов моделирования с решениями уравнения мКдВ показывает, что область применимости последнего для количественных оценок характеристик уединенных волн узка (в симметричной трехслойной жидкости с параметрами стратификации плотности № 6 из табл. 1 хорошая согласованность результатов наблюдается только для волн с амплитудами менее 5 м). Однако предсказания слабнонелинейной теории относительно возможности существования солитонов оказываются достаточно точными. Прогнозирование количества солитонов в составе решения начальной задачи с помощью уравнения мКдВ приводит к переоценке числа уединенных волн. Время генерации солитонов из начального импульса в рамках слабнонелинейной теории оказывается существенно меньшим по сравнению со временем генерации уединенных волн в рамках аналогичной начальной задачи для рассматриваемой полнонелинейной модели.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы» и гранта РФФИ 10-05-00199.

Библиографический список

1. **Lamb, K.G.** Conjugate flows for a three-layer fluid // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. No. 9. P. 2169–2185.
2. **Rusas, P.-O.** Solitary waves and conjugate flows in three-layer fluid / P.-O. Rusas, J. Grue // *Eur.J. Mech.B-Fluids*. 2002. V. 21. P. 185–206.
3. **Lamb, K.G.** Extreme internal solitary waves in the ocean: Theoretical considerations // Preprint University of Waterloo. 2006. P. 109–117.
4. Stability properties and nonlinear mappings of two and three-layer stratified flows / L. Chumakova [at al.] // *Studies in Applied Mathematics*. 2009. V. 122 (2). P. 123-137//
5. Higher-order (2+4) Korteweg-de Vries - like equation for interfacial waves in a symmetric three-layer fluid / O.E. Kurkina [at al.] // *Phys. Fluids*. 2011. 23. 116602.
6. **Mercier, M.J.** Resurrecting dead-water phenomenon / M.J. Mercier, R. Vasseur, T. Dauxois // *Nonlin. Processes Geophys.* 2011. V. 18. P. 193–208.
7. **Leppäranta, M.** *Physical Oceanography of the Baltic Sea/ M. Leppäranta, K. Myrberg / Springer Praxis, Berlin Heidelberg New York, 2009. – 378 p.*
8. Convex and concave types of second baroclinic mode internal solitary waves / Y.J. Yang [at al.] // *Nonlin. Process. Geophys.* 2010. 17. 605.
9. **Lamb, K.** Numerical experiments of internal wave generation by strong tidal flow across a finite amplitude bank edge // *J. Geoph. Res.*, 1994. V. 99 C1. P. 843-864.
10. A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves/ J. Grue [at al.] // *J. Fluid Mech.*, 1997. V. 351. P. 223.
11. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling / J. Marshall [at al.] // *J. Geophysical Res.* 1997. V. 102(C3). No. 37. P. 5753–5766.
12. **Brown, D. J.** Fully Nonlinear Solitary Waves in Continuously Stratified Incompressible Boussinesq Fluids / D. J. Brown, D.R. Christie // *Phys.Fluids*, 1998. V. 10. P. 2569–2586.
13. Nonlinear internal waves forced by tides near the critical latitude/ V. Vlasenko [at al.] // *Deep-Sea Research I*, 2003. V. 50. P. 317–338.
14. **Канарская, Ю. В.** Негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. - Киев. 2004.
15. **Grimshaw, R.** The modified Korteweg – de Vries equation in the theory of large –amplitude internal waves / R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova // *Nonlin. Processes Geophys.* 1997. V. 4. P. 237–250. doi:10.5194/npg-4-237-1997.
16. **Полухина, О.Е.** Обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза в теории нелинейных внутренних волн в стратифицированных потоках: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. - Н.Новгород. 2002.
17. **Рувинская, Е.А.** Уточненное нелинейное эволюционное уравнение для внутренних гравитационных волн в трехслойной симметричной жидкости / Е.А. Рувинская, О.Е. Куркина, А.А. Куркин // *Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева*. 2010. № 4(83). С. 30-39.
18. Динамика солитонов неинтегрируемой версии модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза / О.Е. Куркина [и др.] // *Письма в ЖЭТФ*. 2012. Т. 95. № 2. С. 98-103.
19. **Lamb, K.** Numerical simulations of stratified inviscid flow over a smooth obstacle // *J. Fluid Mech*, 1994. V. 260. P. 1–22.
20. **Lamb, K.** The evolution of internal wave undular bores: comparisons of a fully nonlinear numerical model with weakly nonlinear theory / K.Lamb, L. Yan // *J. Phys. Oceanography*. 1996. V. 26. P. 2712–2734.
21. **Власенко, В. И.** Исследование структуры уединенных внутренних волн большой амплитуды / В. И. Власенко, П. Брандт, А. Рубино // *Морской гидрофиз. журнал*, 2000. Т. 5. С. 15–31.
22. **Рувинская, Е.А.** Исследование структуры уединенных внутренних волн большой амплитуды в трехслойной жидкости / Е.А. Рувинская, О.Е. Куркина, А.А. Куркин // *Вестник МГОУ. Сер. Физика-математика*. 2011. № 2. С. 61–74.

23. On the generation of solitons and breathers in the modified Korteweg – de Vries equation / S. Clarke [at al.] // Chaos. 2000. V. 10. No. 2. P. 383–392.

*Дата поступления
в редакцию 09.08.2012*

E.A. Rouvinskaya

**PROPERTIES OF INTERNAL SOLITARY WAVES IN A THREE-LAYER FLUID:
A COMPARISON OF MODELS**

National Research University Higher School of Economics

Purpose: The goal of this study is to determine the properties of localized stationary internal gravity waveforms in a symmetric three-layer fluid.

Approach: The investigation is carried out in the framework of the numerical simulation of the two-dimensional (vertical plane) fully nonlinear Euler equations for incompressible stratified fluid under the Boussinesq approximation and modified Korteweg–de Vries equation.

Findings: The dependence of the number of internal solitary waves generated from the same initial disturbance on the layer thickness' ratio is analyzed for both models. The values of solitary waves' limiting amplitudes depending on the combination of fluid conditions are found. The amplitude-width, amplitude-velocity, mass-amplitude, and energy-amplitude relations are studied for fixed density stratification parameters.

Conclusions: The weakly-nonlinear theory can predict the wave regime (existence/absence of solitary waves), describes well the shape and properties of small amplitude solitons, yet overestimates the number of generated solitary interfacial waves.

Key words: modified Korteweg–de Vries equation, numerical modeling, fully nonlinear Euler equations.