

УДК 537.86

Н.В. Асеева, Е.М. Громов, В.В. Тютин

ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В СРЕДАХ С ВЫНУЖДЕННЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАССЕЯНИЕМ РАМАНА И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ДИСПЕРСИИ И ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Цель работы: Исследована динамика солитонов огибающей в рамках расширенного уравнения Шредингера $2i \frac{\partial U}{\partial t} + q(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha U|U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} + F(\xi)U = 0$ при учете кубичной нелинейности α , нелокальной нелинейности (вынужденное пространственное рассеяние Рамана) μ , плавной неоднородности дисперсии второго порядка $q(\xi)$ и неоднородности добавочного внешнего потенциала $F(\xi)$.

Научный подход: Исследование проведено как численно, так и аналитически. В аналитической теории шесть интегралов исходного модельного уравнения удалось свести к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой анализировалась структура фазового пространства.

Результат: Показано, что сдвиг вниз волнового числа из-за рассеяния Рамана компенсируется сдвигом волнового числа вверх из-за неоднородности дисперсии второго порядка при увеличении линейной дисперсии второго порядка, или при увеличении внешнего потенциала. Как аналитически, так и численно, найдены квазисолитонные решения с малоизменяющимся спектром волнового числа, амплитудой и протяженностью. Такие солитоны существуют в результате равновесия эффектов вынужденного рассеяния Рамана и возрастания дисперсии второго порядка, или возрастания внешнего потенциала. Дано подробное описание режима динамического равновесия рассеяния Рамана и неоднородности среды, приводящее к периодическому изменению параметров солитона. В этом режиме аналитические и численные результаты взаимно согласованы.

Новизна: Результаты исследования новы и могут иметь практическое приложение для оптических волоконных линий связи с индуцированным рассеянием Рамана, переменной дисперсией второго порядка и (или) переменным внешним потенциалом.

Ключевые слова: расширенное уравнение Шредингера, солитон, нелокальная нелинейность, пространственное вынужденное рассеяние Рамана, неоднородность, линейная дисперсия второго порядка, внешний потенциал.

Введение

В настоящее время велик интерес к солитонам благодаря их способности распространяться на значительные расстояния, сохраняя свою форму, и переносить энергию без потерь. Солитонные решения предполагают интенсивные волновые поля при распространении в диспергирующих средах, присутствуют во многих нелинейных моделях и разных областях физики: оптические импульсы в волоконных линиях связи, электромагнитные волны в плазме, поверхностные волны на глубокой воде [1–4].

Распространение высокочастотных волновых пакетов достаточно малой интенсивности описываются во втором приближении теории дисперсии нелинейных волн. Базовым уравнением в этом порядке теории является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [5–6], включающее как дисперсию второго порядка, так и кубичную нелинейность (фазовую самомодуляцию). Солитонное решение в этом случае существует в результате равновесия дисперсионного расплывания и нелинейного сжатия волнового пакета.

Динамика высокочастотных волновых пакетов высокой интенсивности описывается в третьем порядке теории дисперсии нелинейных волн, учитывающем члены третьего порядка [1]: нелинейную дисперсию (само – укручение) [7], вынужденное рассеяние Рамана [8–10] и дисперсию третьего порядка. Базовым уравнением в этом порядке теории является нелинейное уравнение Шредингера третьего порядка (НУШ-3) [10–14]. В частности, в нелинейных сре-

дах без вынужденного рассеяния Рамана, базовым является НУШ-3 без вынужденного рассеяния Рамана [19]. В [15–22] найдено солитонное решение НУШ-3 без вынужденного рассеяния Рамана. Такие солитоны существуют в результате равновесия дисперсии второго порядка и нелинейной дисперсии. В [23–24] найдены стационарные волны перепада в рамках НУШ-3 при наличии вынужденного рассеяния Рамана. Такие волны существуют в результате равновесия нелинейной дисперсии и вынужденного рассеяния Рамана. Для локализованных волновых пакетов (в т.ч. солитонов) учет вынужденного рассеяния Рамана приводит к переводу вниз спектра солитона [8–10], постоянному разрушению солитона во время его распространения.

Вынужденное рассеяние Рамана во временном представлении описывает запаздывание нелинейного отклика и соответствует возбуждению внутренних временных квантовых колебаний частотой Ω парой внешних высокочастотных полей частот ω_1 и ω_2 : $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$. Вынужденное рассеяние Рамана приводит к понижению частоты волнового пакета [8, 9]. Компенсация вынужденного рассеяния Рамана линейным излучением волнового поля из области солитона рассмотрено в [25]. Компенсация вынужденного рассеяния Рамана в неоднородной среде рассмотрена в следующих случаях: в средах с периодической дисперсией второго порядка [26–27], в средах со смещением точки перегиба дисперсионной характеристики [28] и в оптических волокнах с уменьшающейся дисперсией [29].

Вынужденное рассеяние Рамана в пространственном представлении (пространственное вынужденное рассеяние Рамана) описывает нелокальность нелинейного отклика среды и соответствует возбуждению внутренних пространственных квантовых колебаний с волновым числом χ парой внешних волновых полей с волновыми числами k_1 и k_2 : $k_1 - k_2 = \chi$ (например, кристаллическая среда с характерным внутренним пространственным масштабом). Вынужденное пространственное рассеяние Рамана приводит к уменьшению волнового числа волнового пакета. В то же время, неоднородность дисперсии второго порядка приводит к изменению волнового числа волнового пакета. В частности, в плавно неоднородных средах скорость изменения волнового числа описывается хорошо известным уравнением геометрической оптики $\dot{k} = -\partial\omega/\partial\xi$, где $\omega = \omega(k, \xi)$ - закон линейной дисперсии. При неоднородной дисперсии второго порядка $q(\xi) = -\partial^2\omega/\partial k^2$ скорость изменения волнового числа пропорциональна градиенту дисперсии $\dot{k} = (\partial q/\partial\xi)(k - k_0)^2/2$ и при $\partial q/\partial\xi > 0$ волновое число возрастает. Равновесие пространственного вынужденного рассеяния Рамана и возрастающей дисперсии второго порядка приводит к стабилизации спектра волнового числа волнового пакета (в т.ч. - солитона) (рис. 1).

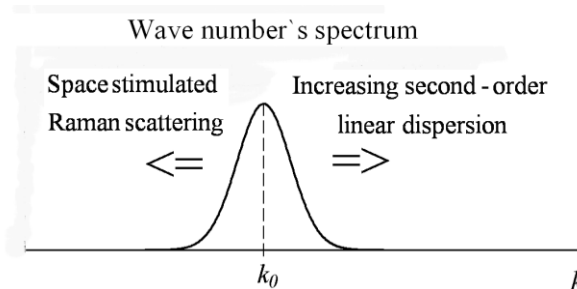


Рис. 1. Баланс уменьшения волнового числа вынужденным рассеянием Рамана и увеличения волнового числа возрастающей дисперсией второго порядка приводит к стабилизации спектра волнового числа солитона

При дисперсионном соотношении $\omega(k, \xi) = \omega(k) - F(\xi)$ с добавочным внешним неоднородным потенциалом $F(\xi)$ скорость изменения волнового числа пропорциональна гради-

енту внешнего потенциала $\dot{k} = \partial F / \partial \xi$ и при $\partial F / \partial \xi > 0$ волновое число возрастает. Равновесие вынужденного пространственного рассеяния Рамана и возрастающего внешнего потенциала также приводит к стабилизации спектра волнового числа волнового пакета (в т.ч. – солитона).

В данной работе рассмотрена динамика солитонов в средах с вынужденным пространственным рассеянием Рамана и с неоднородностью как дисперсии второго порядка, так и внешнего потенциала. Найдено квазисолитонное решение с малыми периодическими изменениями добавочного волнового числа, амплитуды и протяженности. Такой солитон существует в результате равновесия вынужденного пространственного рассеяния Рамана и возрастающей дисперсии второго порядка, или возрастающего внешнего потенциала. Получены условия динамического равновесия вынужденного пространственного рассеяния Рамана и неоднородности среды, соответствующие периодическому изменению параметров солитона.

Базовое уравнение и его интегралы

Рассмотрим динамику высокочастотного волнового поля $U(\xi, t)\exp(i\omega t - ik\xi)$ в рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера с нелокальной нелинейностью (вынужденного пространственного рассеяния Рамана), неоднородностью дисперсии второго порядка и неоднородностью внешнего потенциала:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + q(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha U |U|^2 + \mu U \frac{\partial (|U|^2)}{\partial \xi} + F(\xi)U = 0, \quad (1)$$

где использованы следующие обозначения при учете нелинейного дисперсионного закона $\omega = \omega(k, |U|^2)$: $q = -\partial^2 \omega / \partial k^2$ - параметр дисперсии второго порядка; $\alpha = -\partial \omega / \partial (|U|^2)$ - параметр самомодуляции (кубичной нелинейности); μ - параметр нелокальной нелинейности (вынужденного пространственного рассеяния Рамана).

Уравнение (1) при нулевом условии на бесконечности $U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ имеет следующие интегралы:

- скорость изменения “массы” (так называемые числа квантов) волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} K |U|^2 d\xi, \quad (2)$$

- скорость изменения импульса волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} K |U|^2 d\xi = -\frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial \xi} |U|^2 d\xi, \quad (3)$$

- скорость изменения квадрата модуля градиента волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 d\xi = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial \xi} K |U|^2 d\xi + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} K \frac{\partial |U|^4}{\partial \xi} d\xi, \quad (4)$$

- скорость изменения квадрата градиента интенсивности волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial^2 |U|^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial (K |U|^2)}{\partial \xi} d\xi, \quad (5)$$

- скорость изменения квадрата интенсивности волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^4 d\xi = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} q |U|^2 \frac{\partial (K |U|^2)}{\partial \xi} d\xi, \quad (6)$$

- скорость перемещения ядра волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} qK |U|^2 d\xi, \quad (7)$$

где $U = |U| \exp(i\varphi)$, $K = \partial\varphi / \partial\xi$ - добавочное локальное волновое число волнового пакета.

Аналитические результаты

При аналитическом исследовании динамики солитонов примем, что масштаб пространственной неоднородности дисперсии второго порядка много больше масштаба огибающей солитона $L_q \gg L_{|U|}$ и будем приближенно считать пространственные изменения

волнового числа в области центра «масс» солитона $\bar{\xi} = N^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi$, где $N = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 d\xi$ - линейная функция $K(\xi, t) = k(t) + k_1(t)(\xi - \bar{\xi})$. При условии $(\partial|U(\xi, t)| / \partial\xi)_{\bar{\xi}} = 0$ выразим мнимую часть уравнения (1):

$$\left(\frac{\partial K(\xi, t)}{\partial \xi} \right)_{\bar{\xi}} = - \frac{2}{q(\bar{\xi}) |U(\bar{\xi}, t)|} \frac{\partial |U(\bar{\xi}, t)|}{\partial t}. \quad (8)$$

Пространственные изменения волнового числа солитона возникают из-за изменений амплитуды солитона во времени. Для солитоноподобного волнового пакета $N(t) \sim |U(\bar{\xi}, t)| \sqrt{q(\bar{\xi}) / \alpha(\bar{\xi})}$, учитывая (2), (7), имеем

$$K(\xi, t) = k(t) \left(1 - \frac{q'(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} (\xi - \bar{\xi}) \right), \quad (9)$$

где $q'(\bar{\xi}) = (\partial q / \partial \xi)_{\bar{\xi}}$ - градиент дисперсии второго порядка в области центра «масс» волнового пакета. Приняв, что масштаб пространственной неоднородности внешнего потенциала много больше масштаба неоднородности огибающей волнового пакета $L_F \gg L_{|U|}$, и при учете (9) система (2)–(7) принимает вид

$$\frac{dN}{dt} = q'(\bar{\xi}) k(t) N, \quad (10)$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = -\frac{\mu}{2} \frac{I}{N} + \frac{1}{2} q'(\bar{\xi}) \frac{Z}{N} + \frac{1}{2} F' - q'(\bar{\xi}) k^2(t), \quad (11)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\mu k(t) I + F'(\bar{\xi}) k(t) N + \alpha k \frac{q'(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} M, \quad (12)$$

$$\frac{dI}{dt} = 2k(t) q'(\bar{\xi}) I, \quad (13)$$

$$\frac{dM}{dt} = 2k(t) q'(\bar{\xi}) M, \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = k(t) q(\bar{\xi}), \quad (15)$$

где $F'(\bar{\xi}) = (\partial F / \partial \xi)_{\bar{\xi}}$ - градиент внешнего потенциала в центре «масс» волнового пакета;

$Z = \int_{-\infty}^{\infty} |\partial U / \partial \xi|^2 d\xi$, $I = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial |U|^2 / \partial \xi)^2 d\xi$, $M = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi$. Состояние равновесия системы (10)–(15) существует при выполнении следующих условий:

$$\mu I_0 = q'(\bar{\xi}) Z_0 + F'(\bar{\xi}) N_0, k = 0, \quad (16)$$

где $N_0 = N(0)$, $Z_0 = Z(0)$, $I_0 = I(0)$ – начальные интегральные параметры волнового пакета. Соотношение (16) выполняется при условии $q'(\bar{\xi}) Z_0 + F'(\bar{\xi}) N_0 > 0$. Для анализа динамики волнового пакета с неравновесными параметрами мы примем, что и дисперсия и потенциал являются линейными по пространству функциями $q'(\bar{\xi}) = q' = \text{const}$, $F'(\bar{\xi}) = F' = \text{const}$. При учете $d(q^{-1}(\bar{\xi})) / dt = -kq'(\bar{\xi}) / q(\bar{\xi})$ и используя замену переменных $\tau = tq' / 2$, $p = \mu I_0 / (q' N_0)$, $\delta(\bar{\xi}) = \alpha M_0 / (q(\bar{\xi}) N_0)$, $M_0 = M(0)$, $\sigma = F' / q'$, $n = N / N_0$, $z = Z / N_0$, $m = M / M_0$, $i = I / I_0$, система (10)–(15) приводится к виду

$$\frac{dn}{d\tau} = kn, \quad (17)$$

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{p}{2} \frac{i}{n} + \frac{1}{2} \frac{z}{n} + \frac{\sigma}{2} - k^2, \quad (18)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -kpi + k\sigma n + k\delta m, \quad (19)$$

$$\frac{di}{d\tau} = 2ki, \quad (20)$$

$$\frac{dm}{d\tau} = 2km, \quad (21)$$

$$\frac{d\delta}{d\tau} = -k\delta. \quad (22)$$

Величины n , z , m , i и δ в (17)–(22) связаны соотношениями

$$\frac{z}{n} = -\frac{p}{2} n + \frac{w}{2n} + (\sigma + \delta_0), \quad i = n^2, \quad m = n^2, \quad \delta = \frac{\delta_0}{n}, \quad (23)$$

где $w = 2z_0 + p - 2\sigma - 2\delta_0$, $\delta_0 = \alpha M_0 / (q_0 N_0)$. При учете (23) система (17)–(22) приводится к системе двух уравнений:

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{3p}{4} n + \frac{w}{4n} - k^2 + \frac{\lambda}{2}, \quad (24)$$

$$\frac{dn}{d\tau} = kn, \quad (25)$$

где $\lambda = 2\sigma + \delta_0$. Первый интеграл системы (24)–(25) имеет вид

$$pn^3 + n^2(2k^2 - \lambda) - wn = 2k_0^2 - 2z_0 + \delta_0. \quad (26)$$

Структура фазовой плоскости системы (24)–(25) определяется параметрами p , λ и w .

Траектории волнового пакета

На рис. 2 показаны на плоскости параметров (λ, w) возможные виды фазовой плоскости системы (24)–(25) при $p > 0$ (возрастающая дисперсия второго порядка). При $w > 0$ система (24)–(25) имеет состояние равновесия типа центр

$$k_* = 0, n_{*1} = \frac{\lambda}{3p} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{3p}\right)^2 + \frac{w}{3p}}. \quad (27)$$

Частота колебаний параметров волнового пакета в окрестности состояния равновесия (27) равна $\omega^2 = (w + n_{*1}(2\sigma + \delta_0))/(2n_{*1})$. При $\begin{cases} w = 0, \\ \lambda > 0 \end{cases}$ система (24)–(25) – состояние равновесия типа центр ($k_* = 0, n_* = 2\lambda/(3p)$) и два седла ($k_* = \pm\sqrt{\lambda/2}, n_* = 0$), при $\lambda > \sqrt{-3pw}$ – центр ($k_* = 0, n_{*1}$) и седло

$$k_* = 0, n_{*2} = \frac{\lambda}{3p} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{3p}\right)^2 + \frac{w}{3p}}, \quad (28)$$

при $\lambda = \sqrt{-3pw}$ – одно состояние типа седло-центр ($k_* = 0, n_* = \lambda/(3p)$). При $\lambda < \sqrt{-3pw}$ система не имеет состояний равновесия.

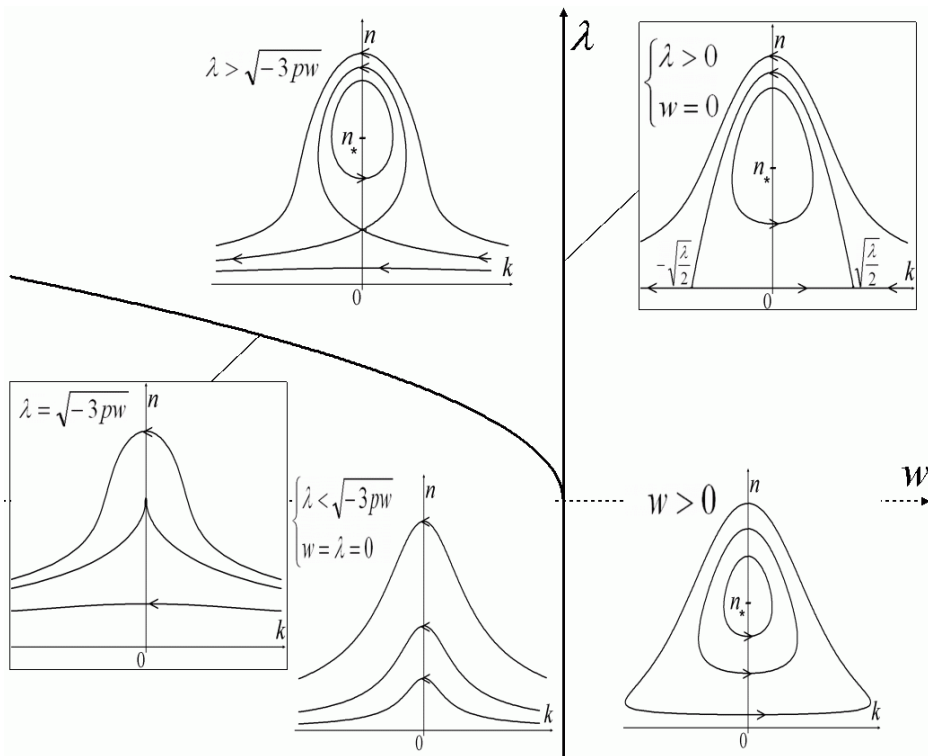


Рис. 2. Виды фазовой плоскости системы (24)–(25) на плоскости параметров (λ, w) при $p > 0$

На рис. 3 показаны на плоскости параметров (λ, w) различные виды фазовой плоскости системы (24)–(25) при $p < 0$ (уменьшающая дисперсия второго порядка). При $\lambda < -\sqrt{-3pw}$ система (24)–(25) имеет состояние равновесия типа седло ($k_* = 0, n_{*2}$) и центр ($k_* = 0, n_{*1}$), при $w < 0$ – седло ($k_* = 0, n_{*2}$), при $\begin{cases} w = 0, \\ \lambda < 0 \end{cases}$ – седло ($k_* = 0, n_{*2}$), при $\begin{cases} w = 0, \\ \lambda > 0 \end{cases}$ – два седла ($k_* = \pm\sqrt{\lambda/2}, n_* = 0$). При $\lambda > -\sqrt{-3pw}$ система не имеет состояний равновесия.

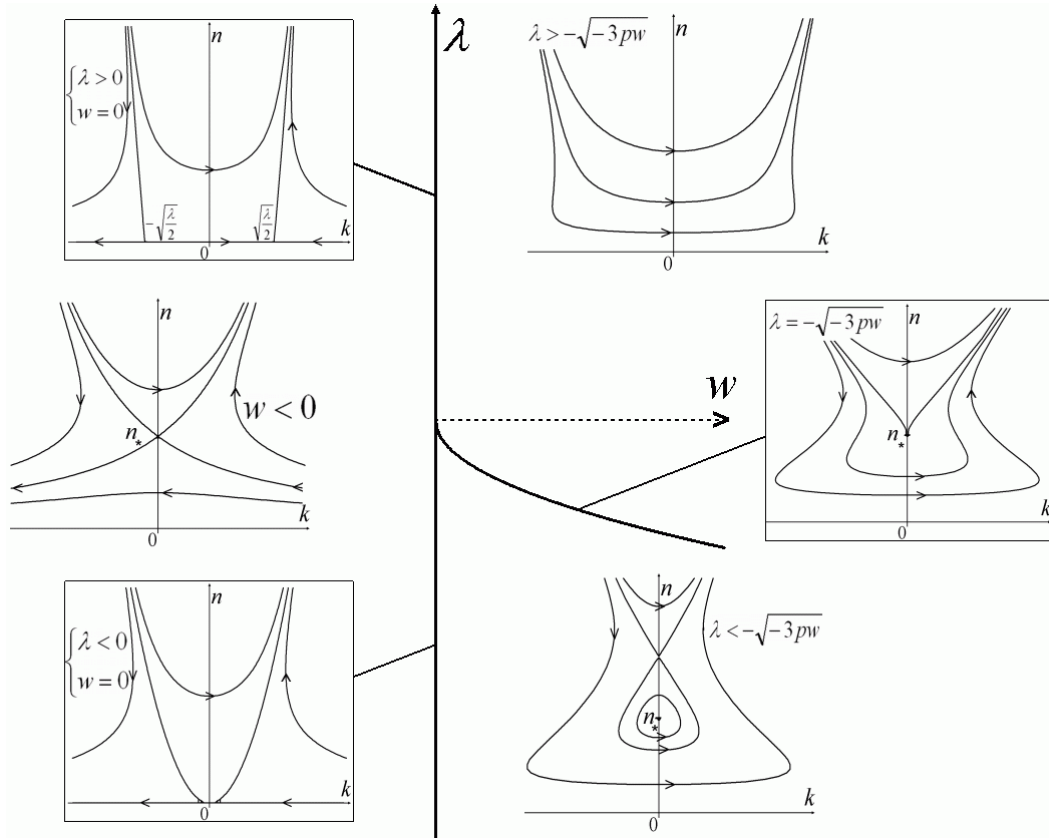


Рис. 3. Виды фазовой плоскости системы (24)–(25) на плоскости параметров (λ, w) при $p < 0$

Траектории солитона

Рассмотрим траектории (26) для волнового пакета с нулевым начальным волновым числом $k_0 = 0$ и с огибающей, соответствующей солитонному решению:

$$U(\xi, t = 0) = \frac{A_0}{\cosh(\xi A_0 \sqrt{\alpha/q_0})}, \quad (29)$$

где $q_0 = q(0)$. В этом случае, учитывая $z_0 = \delta_0/2 = \alpha A_0^2/(3q_0)$ и $n_0 = 1$, уравнение (26) приводится к виду

$$p_s n^2 + n(2k^2 - \lambda_s) + \lambda_s - p_s = 0, \quad (30)$$

где $\lambda_s = 2(\sigma + \alpha A_0^2/(3q_0))$, $p_s = 8\mu\alpha A_0^4/(15q'q_0)$.

На рис. 4 на плоскости (k, n) показаны соответствующие солитону траектории (30) при различных значениях p_s и λ_s . При $p_s = \lambda_s/2 > 0$ параметры начального волнового пакета (солитона) (29) совпадают с параметрами состояния равновесия и траектория солитона на плоскости (k, n) соответствуют начальной точке $(k_0 = 0, n_0 = 1)$. Равновесная величина параметра SSRS μ_* и амплитуда солитона A_* связаны следующим соотношением:

$$\mu_* A_*^4 = \frac{5}{8} \frac{q_0}{\alpha} \left(q' \frac{\alpha}{q_0} A_*^2 + 3F' \right). \quad (31)$$

Период осцилляций в окрестности состояния равновесия (31) в исходных величинах равен

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{2q'(F' + \alpha A_*^2 q'/(3q_0))}}.$$

При $0 < p_s < \lambda_s$ найдены локализованные траектории солитона. Они соответствуют динамическому равновесию вынужденного пространственного рассеяния Рамана и возрастающей дисперсии второго порядка. Движение по этим траекториям происходит против часовой стрелки. Условие динамического равновесия (периодическое изменение параметров солитона) в исходных переменных имеет вид

$$0 < \frac{4}{5} \frac{\alpha}{q_0} \mu A_0^4 < q' \frac{\alpha}{q_0} A_0^2 + 3F'. \tag{32}$$

Наибольшее значение волнового числа солитона на локализованной траектории из уравнения (30) равно $k_{\max} = \sqrt{\lambda_s/2 - \sqrt{p_s(\lambda_s - p_s)}}$. При $p_s = \lambda_s$ существует сепаратрисное решение: волновое число стремится к $-\sqrt{\lambda_s/2}$. При $p_s \leq 0$ волновое число солитона неограниченно возрастает из-за доминирования дисперсии второго порядка. При $p_s > \lambda_s$ волновое число солитона неограниченно убывает из-за доминирования вынужденного пространственного рассеяния Рамана.

При $\lambda_s < 0$ траектории солитона не локализованы (рис. 4, б): при $p_s < \lambda_s$ доминирует вынужденное пространственное рассеяние Рамана, и волновое число солитона неограниченно убывает; при $p_s > \lambda_s$ доминирует дисперсия второго порядка, и волновое число солитона неограниченно возрастает.

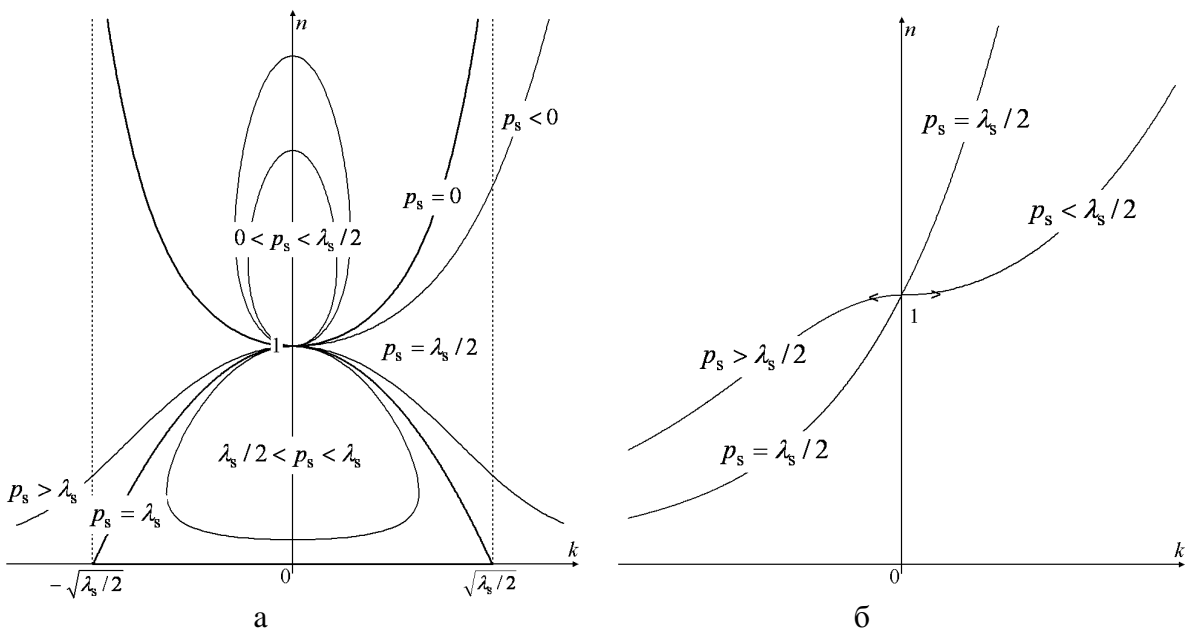


Рис. 4. Траектории (30), соответствующие солитону при различных λ_s и p_s :
 а – $\lambda_s > 0$; б – $\lambda_s < 0$

Неоднородный потенциал

При $q' = 0$ система (10)–(15) приводится к уравнению

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\mu}{2} \frac{I_0}{N_0} + \frac{1}{2} F'. \tag{33}$$

При $\mu = (\mu_*)_F = F'N_0/I_0$ волновое число волнового пакета не меняется во времени. Это соответствует равновесию между вынужденным рассеянием Рамана и возрастанием потенциала. При $\mu > (\mu_*)_F$ волновое число волнового пакета возрастает из-за доминирования вынуж-

денного рассеяния Рамана; при $\mu < (\mu_*)_F$ волновое число волнового пакета убывает из-за доминирования неоднородного потенциала $h\epsilon$.

Численное моделирование

Рассмотрим численно начальную задачу динамики волнового пакета

$$U(\xi, t = 0) = \frac{1}{\cosh \xi} \tag{34}$$

в рамках уравнения (1) при следующих значениях параметров: $\alpha = 1$, $q(\xi) = 1 + \xi/L_q$, $F(\xi) = \xi/L_F$, при различных значениях μ , L_q и L_F .

Неоднородность дисперсии

При $F(\xi) = 0$ и $(\mu_*)_q = 5/(8L_q)$ параметры исходного солитона (34) совпадают с параметрами равновесия между вынужденным рассеянием Рамана и дисперсии второго порядка. В частности, при $L_q = 20$: $(\mu_*)_q = 1/32$. На рис. 5 показано распределение огибающей солитона $|U|$ в зависимости от ξ в различные моменты времени при $\mu = 1/32$, $L_q = 20$ и $F(\xi) = 0$ в численном счете.

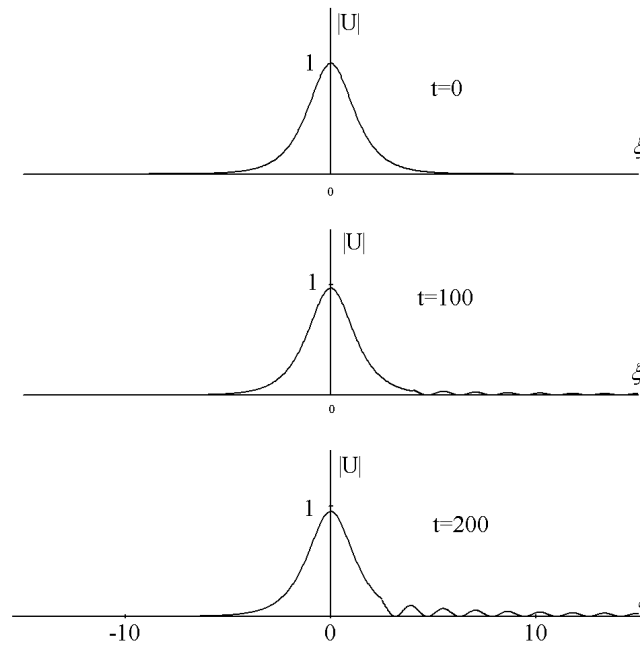


Рис. 5. Результаты численного эксперимента. Распределение огибающей солитона $|U|$ в различные моменты времени при $\mu = 1/32$, $L_q = 20$ и $F(\xi) = 0$

Динамика солитона характеризуется амплитудой линейного поля излучения при сохранении солитоноподобной формы импульса. При $\mu = 1/32$ локальное волновое число солитона остается неизменным. Это соответствует равновесию между вынужденным пространственным рассеянием Рамана и возрастающей дисперсией второго порядка. Равновесная величина параметра вынужденного пространственного рассеяния Рамана находится в идеальном соответствии с аналитическим результатом $(\mu_*)_q = 1/32$. Изменение параметра μ приводит к изменению волнового. На рис. 6 показано пространственные распределения $|U|$ и ло-

кального волнового числа в различные моменты времени при $\mu = 1/24$, $L_q = 20$ и $F(\xi) = 0$. Волновое число в области ядра солитона изменяется медленно как линейная функция, что соответствует выражению (9).

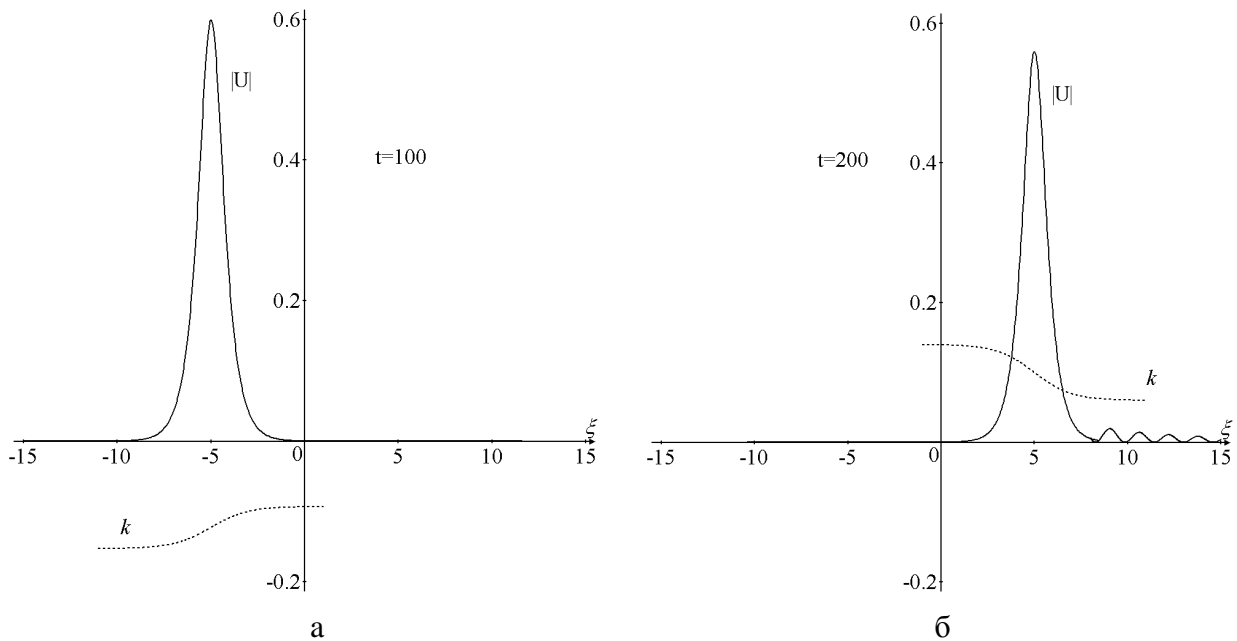


Рис. 6. Распределения модуля огибающей солитона $|U|$ в пространстве (непрерывная линия) и локального волнового числа солитона (прерывистая линия) при $\mu = 1/24$, $L_q = 20$, $F(\xi) = 0$ в различные моменты времени t : $a - t = 100$; $b - t = 200$

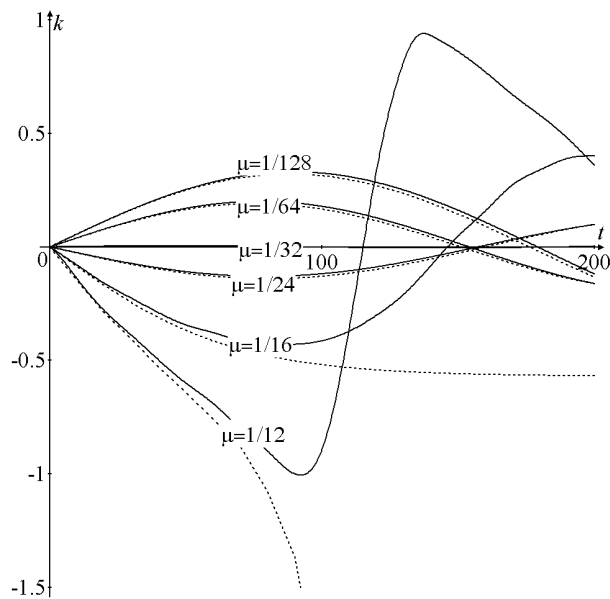


Рис. 7. Локальное волновое число солитона в точке максимума модуля огибающей солитона как функция t при $L_q = 20$, $F(\xi) = 0$ и при различных величинах μ :

- — результаты численного счета;
- — результаты аналитического исследования

На рис. 7 показаны величины локального волнового числа в координате максимума

модуля огибающей солитона $k(|U| = \max)$ в зависимости от t и при различных значениях μ . Непрерывной линией изображены результаты, полученные в численном эксперименте. Прерывистой линией изображены аналитические результаты динамики волнового числа солитона в рамках системы (24)–(25) при начальных условиях (34). При $\mu = 1/32$ локальное волновое число солитона не меняется во времени. Это соответствует равновесию между вынужденным пространственным равновесием Рамана и возрастающей дисперсией второго порядка. При $\mu > 1/16$ аналитические и численные результаты практически совпадают. При $\mu = 1/16$ аналитическая теория для системы (23)–(24) предполагает сепаратрисное решение (рис. 4, а). Наличие малых полей излучения в численном эксперименте приводит к постоянному слабому уменьшению параметра p_s и вместо нелокализованной сепаратрисной траектории, приводит к локализованной траектории. При $\mu > 1/16$ аналитическая теория приводит к нелокализованной траектории (рис. 4, а), что принципиально отлично от соответствующего численного результата. Это обусловлено увеличением поля излучения из области ядра солитона при больших изменениях волнового числа солитона.

Неоднородность одновременно дисперсии и потенциала

При одновременной неоднородности и дисперсии потенциала параметры исходного волнового пакета (34) совпадают с параметрами состояния равновесия системы (24)–(25) при условии $p_* = \sigma + 1/3$, что соответствует

$$(\mu_*)_{q,F} = \frac{5}{8} \left(\frac{1}{L_q} + \frac{3}{L_F} \right). \quad (35)$$

Динамика волнового числа солитона (24)–(25) при учете (33) описывается уравнением

$$\frac{d^2 k}{d\tau^2} = -\frac{k}{4} \left(\frac{1}{3} + \sigma \right). \quad (36)$$

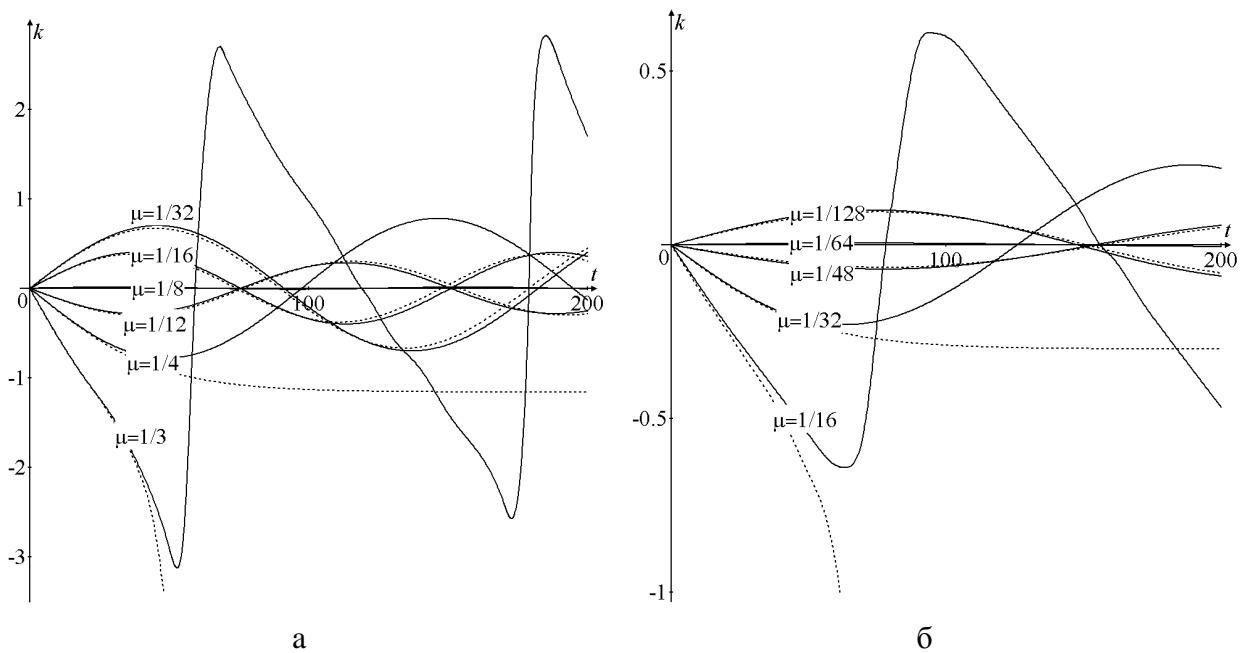


Рис. 8. Волновое число солитона в точке максимума модуля огибающей солитона в зависимости от t при различных значениях величины μ : при $L_F = 20, L_q = 20$ (а) и при $L_F = -40, L_q = 10$ (б); ——— численные результаты; - - - - - аналитические результаты

При $\sigma > -1/3$ состояние равновесия (35) – центр, реализуется при возрастающей дисперсии второго порядка ($p > 0$). В частности, имеем при $L_q = 20$ и $L_F = 20$ ($\sigma = 1$): $(\mu_*)_{q,F} = 1/8$; при $L_q = 10$ и $L_F = -40$ ($\sigma = -1/4$): $(\mu_*)_{q,F} = 1/64$. На рис. 8 показаны значения волнового числа солитона в точке максимума модуля огибающей солитона $k(|U| = \max)$ в зависимости от t при $L_F = 20$, $L_q = 20$ (а); при $L_F = -40$, $L_q = 10$ (б); при различных значениях величины μ .

При $\mu = (\mu_*)_{q,F}$ волновое число солитона изменяется медленно. Это соответствует равновесию между вынужденным пространственным рассеянием Рамана и возрастающими дисперсией и внешним потенциалом. При $\mu < 2(\mu_*)_{q,F}$ ($p_s < \lambda_s$) имеет место динамическое равновесие между вынужденным пространственным рассеянием Рамана и возрастающей дисперсией второго порядка и убывающим внешним потенциалом (рис. 4, а). В режиме динамического равновесия результаты численного эксперимента и аналитической теории близки между собой. При $\mu = 2(\mu_*)_{q,F}$ ($p_s = \lambda_s$) аналитическая теория для системы (24)–(25) приводит к существованию сепаратрисного решения (рис. 4, а). Поля излучения в численном эксперименте приводят к постоянному уменьшению параметра p_s и перемещают решение с нелокализованной сепаратрисы на локализованную траекторию. При $\mu > 2(\mu_*)_{q,F}$ ($p_s > \lambda_s$) аналитическая теория приводит к наличию нелокализованных траекторий (рис. 4, а) и не имеет соответствия с численным экспериментом.

При $\sigma < -1/3$ состояние равновесия (33) является седлом, которое реализуется при уменьшающейся дисперсии второго порядка ($p < 0$). При $L_q = -20$ и $L_F = 20$ ($\sigma = -1$): $(\mu_*)_{q,F} = 1/16$. На рис. 9 показаны значения локального волнового числа в точке максимума модуля огибающей солитона $k(|U| = \max)$ в зависимости от t при $L_q = -20$ и $L_F = 20$ для различных значений μ .

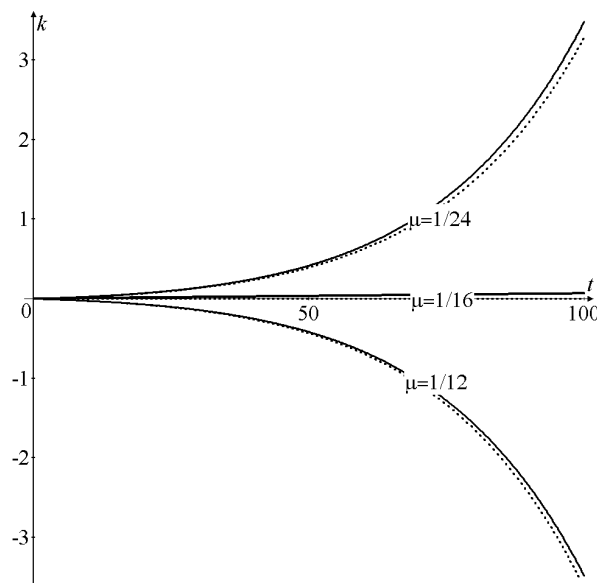


Рис. 9. Локальное волновое число в точке максимума модуля огибающей солитона в зависимости от t при $L_q = -20$ и $L_F = 20$ для различных значений μ :

————— - результаты численного эксперимента;
 - - - - - - - соответствующие аналитические результаты

го уравнения (1) удалось свести к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (24)–(25), для которых проведен анализ траекторий в фазовом пространстве. Показана возможность компенсации убывания волнового числа солитона из-за вынужденного пространственного рассеяния Рамана, возрастание волнового числа из-за возрастания дисперсии второго порядка ($q' > 0$) и возрастания внешнего потенциала ($F' > 0$). Найдены как устойчивое квазисолитонное решение с малоизменяющимися параметрами солитона (волновое число, амплитуда и протяженность) ($p_s = \lambda_s / 2 > 0$), так и режим динамического равновесия между вынужденным пространственным рассеянием Рамана и неоднородностью среды, в котором параметры солитона изменяются периодически ($0 < p_s < \lambda_s$). Показано приемлемое совпадение результатов аналитической теории и численного эксперимента в режиме динамического равновесия между вынужденным пространственным рассеянием Рамана и неоднородностью среды.

В данной работе динамика солитонов рассматривалась в пренебрежении полями излучения, линейной групповой скоростью, нелинейной дисперсией, дисперсией третьего порядка и неоднородностью фазовой самомодуляции. Возможность компенсации эффектов вынужденного пространственного рассеяния Рамана, разрушающих солитон в неоднородных средах при учете всех указанных членов будет описаны в следующих работах.

В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 11-01-0066, реализованного в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012–2013 гг.

Библиографический список

1. **Agraval, G.P.** Nonlinear Fiber Optic / G.P. Agraval. – San Diego: Academic Press, 2001.
2. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. – New York: Springer, 2001.
3. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar G.P. Agraval. – San Diego: Academic, 2003.
4. **Dickey L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems / L.A. Dickey. – New York: World Scientific, 2005.
5. **Zakharov, V.E.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. JETP. 1972. №34. P. 62–69.
6. **Hasegawa, A.** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion / A. Hasegawa, F. Tappert // Appl. Phys. Lett. 1973. № 23. P. 142–144.
7. **Oliviera, J.R.** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation / J.R. Oliviera, M.A. Moura // Phys. Rev. E 57.1998. P. 4751–4755.
8. **Mitschke, F.M.** Discovery of the soliton self-frequency shift / F.M. Mitschke, L.F. Mollenauer // Optics Letters. 1986. №11. P. 659–661.
9. **Gordon, J.P.** Theory of the Soliton Self-frequency Shift // Opt. Lett. 1986. №. P. 11662–664.
10. **Kodama, Y.J.** Optical solitons in a monomode fiber // Stat. Phys. 1985. №39. P. 597–614.
11. **Kodama, Y.** Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide / Y. Kodama, A. Hasegawa // IEEE J. Quantum Electron. 1987. № 23. P. 510–524.
12. **Zaspel, C.E.** Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation // Phys. Rev. Lett. 1999. № 82. P. 723–726.
13. **Hong, B.** New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodinger equation / B. Hong, D. Lu // Inter. Journal of Nonlinear Science. 2009. №73. P. 60–367.
14. **Karpman, V.I.** The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation // The European Physical Journal. 2004. № 39. P. 341–350.
15. **Gromov, E.M.** Nonlinear Dynamics of Short Wave Trains in Dispersive Media / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1996. №110. P. 137; Sov. Phys. JETP. 1996. №83. P. 73–79.
16. **Gromov, E.M.** Short Optical Solitons in Fibers / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Chaos. 2000. № 10. P. 551–558.
17. **Gromov, E.M.** Dynamics of wave packets in the frame of third-order nonlinear Schrödinger equation / E.M. Gromov, L.V. Piskunova, V.V. Tyutin // Physics Letters. 1999. № 256. P. 153–158.
18. **Obregon, M.A.** Oblique magneto-acoustic solitons in a rotating plasma / M.A. Obregon, Yu.A. Stepanyants // Physics Letters. 1998. № 249. P. 315–323.

19. Generalized Nonlinear Schrödinger Equation for Dispersive Susceptibility and Permeability: Application to Negative Index Materials / M. Scalora [at al.] // Phys. Rev. Lett. 2005. № 95. 013902.
20. Modulation instability in nonlinear negative-index material / S.C. Wen [at al.] // Phys. Rev. E. 2006. № 73. 036617.
21. **Marklund, M.** Ultrashort solitons and kinetic effects in nonlinear metamaterials / M. Marklund, P.K. Shukla, L. Stenflo // Phys. Rev. E. 2006. № 73. 037601.
22. Higher-order effects and ultrashort solitons in left-handed metamaterials / N.L. Tsitsas [at al.] // Phys. Rev. Lett. E. 2009. №79. 037601.
23. **Kivshar, Y.S.** Dark-soliton dynamics and shock waves induced by the stimulated Raman effect in optical fibers // Phys. Rev. 1990. № 42. P. 1757–1761.
24. **Kivshar, Y.S.** Raman-induced optical shocks in nonlinear fibers / Y.S. Kivshar, B.A. Malomed // Opt. Lett. 1993. №18. P. 485–487.
25. **Biancalama, F.** Theory of the soliton self-frequency shift compensation by the resonant radiation in photonic crystal fibers / F. Biancalama, D.V. Skrybin, A.V. Yulin // Phys. Rev. 2004. № 70. 011615.
26. **Essiambre, R.-J.** Timing jitter of ultrashort solitons in high-speed communication systems. I. General formulation and application to dispersion-decreasing fibers / R.-J. Essiambre, G.P. Agrawal // Journal of the Optical Society of America B. 1997. № 14. P. 314–322.
27. **Essiambre, R.-J.** Timing jitter of ultrashort solitons in highspeed communication systems. II. Control of jitter by periodic optical phase conjugation / R.-J. Essiambre, G.P. Agrawal // Journal of the Optical Society of America B. 1997. № 14. P. 323–330.
28. DDF-based all-fiber optical source of femtosecond pulses smoothly tuned in the telecommunication range / A. Andrianov [at al.] // Laser Physics. 2007. № 17. P. 1296–1302.
29. Soliton pulse compression in dispersion-decreasing fiber / S. Chernikov [at al.] // Opt. Lett. 1993. № 18. P. 476–478.

*Дата поступления
в редакцию 30.07.2012*

N.V. Aseeva, E.M. Gromov, V.V. Tyutin

SOLITON DYNAMICS IN MEDIA WITH SPATIAL STIMULATED RAMAN SCATTERING AND INHOMOGENEOUS BOTH DISPERSION AND ADDITIONAL POTENTIAL

National Investigate University Higher School of Economics

Purpose: Dynamics of solitons in the frame of the extended nonlinear Schrödinger equation

$2i \frac{\partial U}{\partial t} + q(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha U |U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} + F(\xi)U = 0$, taking into account cubic nonlinearity α , nonlocal nonlinearity (space stimulated Raman scattering) μ , smoothly inhomogeneous second-order dispersion $q(\xi)$ and inhomogeneous additional potential $F(\xi)$ is considered.

Approach: Soliton's dynamic investigated as numerically as analytically. In analytic theory the six integrals of basic model equation was reduced to two ordinary differential equations system. Phase space structure of the system was analyzed.

Findings: It is shown that down shift (by Raman) is compensated with up shift (by second-order dispersion) in media with increasing second-order linear dispersion or increasing additional potential. A quasi-soliton solution with the small wave number spectrum variation, amplitude and extension are found both analytically and numerically. The soliton exists as the equilibrium of space stimulated Raman scattering and increasing second-order dispersion or increasing potential. Regime of the dynamical equilibrium of space stimulated Raman scattering and inhomogeneous media corresponding to the periodical variation of soliton parameters are found. Analytical and numerical solutions for this regime are in a good agreement.

Originality: The obtained results is original and can be important for optical fibers application.

Key words: Extended Nonlinear Schrödinger Equation, Soliton, Nonlocal Nonlinearity, Space Stimulated Raman-Scattering; Inhomogeneous, Second-Order Linear Dispersion, Additional Potential, Analytical Investigation, Numerical Simulation.