МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 521.1

В.В. Аниковский[1], С.Г. Журавлёв[2]

ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ И КОСМОДИНАМИКЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева[1],
Московский государственный автомобильно-дорожный институт[2]

Приведен последовательный анализ многочисленных обобщений классической задачи двух неподвижных центров, начиная с момента ее формулировки и решения Эйлером в 1760 г. и до наших дней. Отмечается роль многочисленных исследователей этой задачи. Приведенные публикации со всей очевидностью показывают, что основные результаты по обобщениям задачи и их аналитическим и качественным исследованиям получены в XIX в. и в самом начале XX в. Современным исследователям принадлежат лишь достаточно многочисленные, иногда эффектные и одновременно эффективные приложения отдельных обобщений (задача Гредеакса одна из них).

Ключевые слова: проблема Эйлера, действительные неподвижные центры, комплексно-сопряженные неподвижные центры, разделение переменных, функция Гамильтона, эллиптические координаты, центральные конфигурации.

В конце 50-х – начале 60-х гг. прошлого столетия были опубликованы циклы работ [1, 2] , в которых показано, что так называемая обобщенная задача двух неподвижных центров имеет важные приложения, прежде всего, в теории движения искусственных спутников Земли. После этого появились многочисленные публикации, авторы которых пытались найти столь же эффективные другие обобщения задачи n ($n \geq 2$) неподвижных центров. В результате во многих появившихся позже работах декларировалось отыскание «новых» интегрируемых в квадратурах модельных задач небесной механики (трех, четырех и т.д. неподвижных центров) и решаемых на их основе задач космодинамики, которые, как будет показано далее, в своей основе являются лишь частными случаями давно известных (более 100 лет) обобщений задачи Эйлера [3, 4].

В этой связи далее последовательно рассмотрены обобщения задачи Эйлера, включающие в себя практически все известные обобщения Лагранжа, Лежандра, Якоби, Лиувилля, Вельде и Дарбу, сформулированные и проанализированные в самом общем виде Хильтебейтелем [5, 6] и Тальквистом [7, 8], и выяснена роль современных исследователей в решении этой проблемы.

В относительно недавно опубликованном обзоре по обобщенной задаче двух неподвижных центров [9] содержится анализ работ, касающихся в основном комплекснозначного обобщения классической задачи двух неподвижных центров и ее применения в небесной механике и космодинамике. Были упомянуты некоторые работы, содержащие обобщения и на случай $n > 2$ неподвижных центров. Однако 1) список последних работ далеко не полон, 2) не только не подвергалось, но даже сомнений не было высказано в отношении авторства «новых» модельных задач, которые на самом деле являются известными со времен Лагранжа, Лиувилля, Дарбу и др. обобщениями задачи двух неподвижных центров, 3) подробно рассмотренные в обзоре задачи Дарбу и Гредеакса сами являются частным случаем давно известной задачи Эйлера-Якоби, 4) остались без внимания опять-таки известные обобщения задачи на случай двух подвижных центров, а также случая с вращающейся плоскостью [10]. Появившиеся в последние десятилетия результаты по интегрируемости и неинтегрируемости задач классической механики [12] позволяют по новому посмотреть на проблему.

Изложение начнем с постановки задачи двух неподвижных центров Эйлера, рассмотрим последовательно во временном пространстве ее обобщения и завершим обзор самым широким обобщением, которое назовем *задачей Эйлера-Лагранжа-Лиувилля-Вельде-Дарбу-Хильтебейтеля (ЭЛЛВДХ)* и которое, как будет показано далее, включает в себя многие известные обобщения и приложения. Вторую цепочку обобщений составляет *задача Эйлера-Лагранжа-Якоби-Мультона(ЭЛЯМ)* для n неподвижных центров на прямой линии.

1. Задача Эйлера. Она состоит в исследовании движения материальной точки M, под воздействием двух неподвижных центров K_1 и K_2 (обозначения взяты из работы Хильтейбейтеля [6]), которые создают силы, пропорциональные массам m_1 и m_2 соответственно и обратно пропорциональные квадратам расстояний (1760-1767). При этом *движение материальной точки происходит лишь в плоскости, содержащей неподвижные центры.* Последнее достигается выбором начальной скорости движения материальной точки, а именно, вектор упомянутой скорости должен пересекать прямую линию, проходящую через неподвижные центры. Тогда действующие на материальную точку M силы запишутся в виде

$$R_1 = -m_1 / r_1^2 , \quad R_2 = -m_2 / r_2^2 . \tag{1}$$

2. Задача Эйлера-Лагранжа. Лагранж (1766–1769) [10] обобщил постановку задачи Эйлера на пространственный случай, введя в рассмотрение вращающуюся плоскость (относительно соединяющей неподвижные центры прямой), в которой по-прежнему происходит движение материальной точки. Кроме того, он доказал, что интегрируемость задачи сохраняется при добавлении еще одной силы, действующей на материальную точку прямо пропорционально расстоянию и направленную в середину отрезка, соединяющего неподвижные центры. К действующим силам (1) добавляется сила

$$R_3 = -m_3 r_3 \ . \tag{2}$$

В результате в силовую функцию задачи двух неподвижных центров добавляется слагаемое, обусловленное вращением плоскости (эффект Кориолиса), структура которого такова, что разделение переменных (интегрирование) по-прежнему имеет место. Угол поворота плоскости от некоторого начального положения является циклической переменной, и уравнения для него отщепляются от соответствующих уравнений движения материальной точки в плоскости.

Добавление в силовую функцию третьего слагаемого, пропорционального первой степени расстояния, не нарушает свойства интегрируемости уравнений движения, и, таким образом, получается задача *трех неподвижных центров на прямой.*

Лагранж также отметил, что такой подход (с вращающейся плоскостью) возможен и в предельном случае (см. ниже).

Здесь уместно отметить роль Лежандра, посвятившего большое число работ технике интегрирования соответствующих уравнений движения и вопросам сведения квадратур задачи к эллиптическим и другим функциям (1811–1844) [2, 10, 12].

3. Задача Эйлера-Лагранжа-Лиувилля-Вельде. Лиувилль (1846), которому принадлежат фундаментальные результаты по интегрируемости общих уравнений динамики и, в частности, уравнений задачи n тел небесной механики, отметил, что интегрирование уравнений задачи двух неподвижных центров возможно в общем случае, когда силовая функция задачи имеет вид

$$V = \frac{f(\alpha) - \Phi(\beta)}{\alpha^2 - \beta^2} , \tag{3}$$

где α, β - параметры софокусных эллипсов или гипербол; $f(\alpha), \Phi(\beta)$ - некоторые непрерывные функции своих аргументов.

Приведенный вид функции - частный случай функции следующего вида

$$V = \frac{A}{x^2} + \frac{A'}{y^2} + \frac{B}{r} + \frac{B'}{r'} + C\rho^2, \tag{4}$$

где A, A', B, B', C - постоянные; r, r' и ρ - расстояния до двух фокусов и до общего центра софокусных эллипсов (в предыдущих формулах r_1, r_2 и r_3 соответственно).

Это соответствует случаю, когда материальная точка подвержена действию:

1) двух сил, нормальных к осям и обратно пропорциональным кубам расстояний до осей (производная второго слагаемого, равная $-2A'/y^3$, отражает как раз эффект от вращения плоскости);

2) двух неподвижных центров, расположенных в двух фокусах и притягивающих по закону Ньютона;

3) одного неподвижного центра, расположенного в общем центре софокусных конических сечений и притягивающего пропорционально расстоянию.

Во втором мемуаре Лиувилль (1847) изложил другой подход к интегрированию уравнений движения в рамках упомянутого обобщения задачи Эйлера-Лагранжа и отметил еще один интегрируемый «курьезный» случай задачи трех центров – одного неподвижного в центре, действующего на материальную точку с силой, пропорциональной расстоянию, и двух подвижных центров, движущихся по окружности относительно первого неподвижного центра таким образом, что долгота при обращении двух подвижных центров и долгота материальной точки совпадают (в этой связи уместно отметить работы Бессеры [13]), который выдавал используемый им этот вариант за новую модельную задачу небесной механики).

Таким образом, Лиувилль подтвердил, что имеется частный вариант задачи - *три неподвижных центра на прямой* (задачей трех тел этот вариант не назывался).

Немного позже Вельде (1889) указал (без ссылок на работы Лиувилля), что вариант задачи, предложенный Лагранжем, допускает следующую интерпретацию: еще две силы, прямо пропорцииональные расстоянию и направленные в неподвижные центры K_1 и K_2, могут быть добавлены без нарушения свойства интегрируемости задачи. Тогда действующие силы будут такими:

$$R_1 = -mr_1 - \frac{m_1}{r_1^2}, \quad R_2 = -mr_2 - \frac{m_2}{r_2^2}, \quad R_3 = -m_3 r_3 \ . \tag{5}$$

Это кажется очевидным, поскольку по правилу параллелограмма сложения векторов имеем

$$-mr_1 - mr_2 = -m(r_1 + r_2) = -2mr_3 \ ,$$

так что использование трех компонент, направленных к трем центрам, или их равнодействующей, направленной в середину отрезка $[K_1, K_2]$, ничего не изменяет в смысле интегрируемости.

Действительно, заменив в равенстве (5) $-m_3 r_3$ на $-(m_3 + 2m)r^3 = -\overline{m}_3 r^3$, имеем вариант Лагранжа (1), (2).

4. Задача Эйлера-Лагранжа-Лиувилля-Вельде-Дарбу

Дарбу (1901) [14], рассматривая вариант силовой функции Лиувилля (4), заявил « … я не знаю, отмечалось ли, что ко всем этим действиям можно добавить два других, которые происходят от двух мнимых фокусов эллипсов и притягивают также по закону Ньютона».

Координаты упомянутых мнимых фокусов имеют вид:

$$x = 0, \quad y = \pm ci \ .$$

Таким образом, выражение (4) силовой функции дополняется слагаемыми

$$\frac{B_1}{r_1} + \frac{B_1'}{r_1'} \tag{6}$$

дополнительные величины B_1, B_1' - постоянные, r_1, r_1' - расстояния до двух мнимых фокусов.

Дополненное выражение силовой функции будет действительной величиной, если постоянные B_1, B_1' - комплексно-сопряженные мнимые величины.

Если в выражении (4), дополненным слагаемыми (6), положить $B = B' = 0$, т.е. исключить два действительных центра K_4 , K_5, то получится известное комплекснозначное обобщение задачи двух неподвижных центров $K_1(m_1 - im_2)$, $K_2(m_1 + i\, m_2)$ плюс третий центр $K_3(m_3)$ в начале координат.

5. Задача Эйлера-Лагранжа-Лиувилля-Вельде-Дарбу-Хильтебейтеля и ее частные случаи. Наконец, Хильтебейтель (1905) [5], (1911) [6] сформулировал, на наш взгляд, наиболее общую постановку задачи.

*Формулировка задачи***.** Исследовать движение материальной точки M под воздействием пяти силовых центров K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, из которых два (K_1, K_2) - действительные фокусы, K_3 - центр (середина отрезка $[K_1, K_2]$, два (K_4, K_5) - мнимые фокусы системы софокусных конических сечений, с силами

$$R_1 = -mr_1 - \frac{m_1}{r_1^2},\ R_2 = -mr_2 - \frac{m_2}{r_2^2},\ R_3 = -m_3 r_3,\ R_4 = -m' r_4 - \frac{m_4 + im_5}{r_4^2},\ R_5 = -m' r_5 - \frac{m_4 - im_5}{r_5^2} \ . \tag{7}$$

Следует заметить, что в этой интегрируемой задаче допускается еще действие сил, параллельных оси $K_3 X$ (см. далее предельный случай).

Положив в приведенных ранее формулах $m = m' = m_3 = m_4 = 0$, получаем задачу четырех неподвижных центров K_1, K_2, K_4, K_5, из которых два (K_1, K_2) - действительные фокусы а другие два (K_4, K_5) -мнимые фокусы системы софокусных конических сечений, с силами

$$R_1 = -\frac{m_1}{r_1^2}, \quad R_2 = -\frac{m_2}{r_2^2}, \quad R_4 = -\frac{im_5}{r_4^2}, \quad R_5 = \frac{im_5}{r_5^2} \ .$$

Необходимо отметить, что Лиувилль (1846) и позже Дарбу (1901) [14], доказавшие интегрируемость задачи с потенциалом (4), дополненным слагаемыми (6), где теперь $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ - действительные расстояния от исследуемой точки до действительных центров, а $r_1 = \sqrt{x^2 + (y - id)^2}$, $r_1' = \sqrt{x^2 + (y + id)^2}$ - «комплексные расстояния» от исследуемой точки до «комплексных центров», не называли эту задачу «*задачей четырех или пяти неподвижных центров*».

6. Неинтегрируемость ньютоновской задачи $n\,(n > 2)$ **произвольно расположенных неподвижных центров.** Неинтегрируемость этой задачи относительно недавно было подтверждено результатами С.В.Болотина [11]: никакая (!) ньютоновская задача $n\,(n > 2)$ центров не интегрируется в квадратурах.

Приведем соответствующую теорему. Пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ - различные точки комплексной плоскости C. Функция Гамильтона задачи n центров имеет вид

$$H = \frac{1}{2}|p_z|^2 + V(z), \quad (z, p_z) \in U \times C \ ; \ V(z) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i |z - z_i|^{-1}, \ \mu_i > 0 \ ,$$

где $U = C \setminus \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ - конфигурационное пространство, а $V(z)$ - потенциал гравитационного притяжения точки z, $z \in U$ точками $z_1, z_2, ..., z_n$.

Так как $V < 0$, при $h \geq 0$ уровень $\{H = h\}$ интеграла энергии H - аналитическая гиперповерхность в фазовом пространстве $U \times C$.

Теорема. Пусть $n > 2$. Тогда при $h \geq 0$ задача n центров не имеет аналитических первых интегралов на уровне интеграла энергии $\{H = h\}$.

Доказательство проводится методом топологических препятствий.

Итак, задача n центров интегрируема в области $\{H \geq 0\}$ только в случаях Кеплера и Эйлера.

Рассматривая дальше обратные обобщениям действия, т.е. упрощения задачи ЭЛ-ЛВДХ, придем сначала к варианту с двумя действительными притягивающими центрами K_1, K_2 и третьим отталкивающим (или притягивающим) центром K_3 в начале координат (обобщение Лагранжа). Действующие силы: (1) и (2)

$$R_1 = -\frac{m_1}{r_1^2}\ , \quad R_2 = -\frac{m_2}{r_2^2}\ , \ R_3 = \pm\, mr_3$$

Также получаем вариант с двумя комплексными притягивающими центрами K_4, K_5 и третьим отталкивающим (или притягивающим) центром K_3 в начале координат (обобщение Лагранжа-Хильтебейтеля).Действующие силы:

$$R_3 = \pm\, mr_3 \quad , \ R_4 = -\frac{im_4}{r_4^2}\ , \quad R_5 = \frac{im_4}{r_5^2} \quad .$$

Отметим, что все эти последние варианты с тремя вещественными неподвижными центрами, с двумя комплексными и одним вещественным центрами (и многие другие), как на плоскости, так и в пространстве (с подвижной плоскостью), равно, как и так называемый предельный случай задачи, когда один из центров удаляется в бесконечность *подробнейшим образом* рассмотрены в работах Талькквиста (1927-1929) (7 выпусков Финской академии наук, содержат около 700 с.).

7. Интегрируемость задачи двух и четырех неподвижных центров, расположенных на сфере. Итак, интегрируется в квадратурах только задача двух неподвижных центров. А как же другие случаи?

В работе [15] утверждается, что классическая задача двух (вещественных) неподвижных центров, обобщенная задача двух (комплексно-сопряженных) неподвижных центров и задача четырех (двух вещественных и двух комплексно-сопряженных) неподвижных центров являются, фактически, *одной задачей* с потенциалом, задаваемым четырьмя фиксированными центрами на сфере (определенным образом расположенными !).

Отмечается, что интегрирование соответствующей системы уравнений возможно при симметричном расположении вещественных центров на оси, например, абсцисс, на расстояниях $\pm c$ от начала координат, и при симметричном же расположении на оси ординат двух комплексно-сопряженных центров на комплексных расстояниях $\pm di$ от начала координат, причем должно выполняться равенство $c = d$. Интегрирование имеет место в эллиптических координатах u, v, связанных с прямоугольными координатами $x,\ y$ соотношениями:

$$x = c\,\mathrm{ch}\,v \cos u\,,\ y = c\,\mathrm{sh}\,v \sin u\,.$$

Вид соответствующих слагаемых потенциала упомянутой задачи записывается в форме

$$V_{\mathrm{Re}} = (W^{+}_{\mathrm{Re}1} + W^{-}_{\mathrm{Re}2})\Delta\,;\ W^{\pm}_{\mathrm{Re}\,j} = (\mu_1 \pm \mu_2)\sqrt{(\alpha^2 \mp u_j)(\beta^2 \pm u_j)}\,,$$

$$V_{\mathrm{Im}} = (W^{+}_{\mathrm{Im}2} + iW^{-}_{\mathrm{Im}1})\Delta\,;\ W^{\pm}_{\mathrm{Im}\,j} = (\xi_1 \pm \xi_2)\sqrt{u_j(\beta^2 \mp u_j)}\,;\ \ ,\quad j = 1, 2\,,\quad \Delta = (u_1 + u_2)^{-1}.$$

К этим двум слагаемым еще могут быть добавлены (без нарушения условия интегрируемости системы) слагаемые, соответствующие потенциалам Гука (V_G) и Неймана (V_N):

$$V_G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} c_i V_{gi}\ ,$$

$$V_{g1} = \beta^2\ [(\beta^2\text{-u}_2)^{-1}\text{-}(\beta^2\text{+u}_1)^{-1}]\Delta\,,\quad \text{V}_{g2} = \alpha^2\ [(\alpha^2\text{-u}_1)^{-1}\text{-}(\alpha^2\text{+u}_2)^{-1}]\Delta\ ,$$
$$V_{g3} = \alpha\beta(u_1^{-1} + u_2^{-1})\Delta\,,$$

Здесь μ_1, μ_2 - массы действительных центров, α, β определяют координаты этих центров, причем расстояние между действительными центрами 2α фиксировано, а расстояние между двумя комплексными центрами связано с первым соотношениями $\mu = \beta(1-\alpha^2)$, $\nu = \alpha\beta(1-\alpha^2)$, ξ_1, ξ_2, c_i, C - постоянные, u_1, u_2 - сфероконические координаты, в которых и осуществляется интегрирование (см.детали [15]).

Дело в том, что, как было показано в [15], при стремлении радиуса сферы, на которой расположены четыре центра, в бесконечность сфера трансформируется в плоскость (эвклидова плоскость), потенциал

$$V = V_{\mathrm{Re}} + V_{\mathrm{Im}} + V_G + V_N$$

становится потенциалом Лиувилля-Дарбу и задача интегрируется в квадратурах на окружности и не интегрируется на сфере, даже если сохранить в потенциале V только слагаемые V_{Re} , V_{Im}, поскольку не существует необходимого для этого циклического интеграла.

В то же время задача с потенциалами V_{Re}, V_{Im}, взятыми по отдельности, интегрируется на сфере .

8. Предельный вариант задачи двух неподвижных центров. Рассмотрим так называемый предельный случай задачи двух неподвижных центров, который интенсивно исследовался в 60-х-70-х гг. прошлого века в циклах работ В.В.Белецкого , В.Г.Дёмина и А.Л.Куницына и применялся ими в небесной механике и космодинамике. О том, что этот вариант задачи двух неподвижных центров интегрируется в квадратурах, известно очень давно и достаточно давно известно о проведенных качественных исследованиях.

Так, уже в работах Лагранжа (1760) [10] упоминается об этом интегрируемом случае (“…найден случай, в котором один из центров перемещается в бесконечность и сила, направленная к этому центру, становится однородной и действует вдоль параллельных линий. Удивительно, но в этом случае решение задачи не сильно упрощается. Лишь радикалы, встречающиеся в знаменателях отдельных уравнений, содержат переменные только в третьей степени, а не в четвертой … ”).

И лишь через 150 лет этот вариант задачи стали использовать физики для исследования эффектов Зеемана и Штарка в рамках общей модели атома, представляющей покоящееся ядро с движущимися вокруг него электронами. В монографии Борна (1923-1924) обсуждаемый предельный вариант задачи описан следующим образом: “ Известно, что параболические координаты, в которых легко описывается движение электрона в водородном атоме, происходящее под влиянием электрического поля методом разделения переменных, представляют частный случай эллиптических координат. А последние допускают разделение переменных, вообще говоря, для движения одной точки, находящейся под влиянием двух неподвижных силовых центров, притягивающих ее по закону Кулона. Удаляя один из силовых центров в бесконечность, увеличивая при этом соответствующим образом его силу, мы получаем случай эффекта Штарка; эллиптические координаты при этом переходят в параболические”.

В результате физиками впервые были выписаны квадратуры в этой задаче и частично проведен качественный анализ возможных типов траекторий для случая отрицательной энергии, как в плоском, так и в пространственном случаях. Качественный анализ движений в предельном случае задачи не рассматривался.

Далее в работе Тальк툴виста (1927) [8] уже фактически появляется и термин *“ein Grenzfall des Zweizentrenproblems”* (*граничный, предельный случай задачи двух центров).*

Наконец, это изложено в современных изданиях классических трудов [10].

Таким образом, интегрирование в предельном случае задачи двух неподвижных центров впервые и в полной мере осуществлено Тальквистом (1927) [8]. Им получены квадратуры (которые, как уже отмечалось Лагранжем [10], от соответствующих квадратур задачи двух неподвижных центров отличаются лишь порядком многочленов, находящихся под знаком радикалов, а именно - они третьего порядка), а также проведен достаточно подробный качественный анализ областей возможности движений в случаях простых и кратных корней (без геометрического представления областей).

9. Задача n неподвижных центров на прямой

Наконец, рассмотрим еще одно обобщение классической задачи двух неподвижных центров в несколько другом направлении.

Задача Лапласа-Лиувилля трех центров на подвижной прямой. Со ссылкой на работы Лапласа Лиувилль (1842) описал возможность существования частного решения задачи трех неподвижных тел на прямой, которая в свою очередь движется в пространстве.

Если выбрать определенное соотношение между массами взаимно притягиваемых тел и их взаимными расстояниями, то все три тела будут находиться на прямой и два тела будут вращаться относительно третьего со скоростями, направленными параллельно одна другой и пропорциональными расстояниям до центра. При этом и скорости, и расстояния между телами могут изменяться во времени, однако отношение скоростей всех трех тел в пространстве и их взаимных расстояний инвариантно.

Эти частные решения применялись для описания взаимного движения Солнца, Земли и Луны на некотором интервале времени.

Задача Якоби n неподвижных центров на прямой линии

Практически в то же время Якоби (1842) рассмотрел общий случай пространственного движения исследуемой точки в поле притяжения любого конечного числа n неподвижных центров, расположенных на прямой линии, причем один из центров может быть удален в бесконечность (сила, действующая параллельно прямой). Последнее представляет собой предельный вариант задачи $n+1$ тел.

Формулировка проблемы . Чтобы рассмотреть задачу в ее наибольшей общности, предположим, что точка M притягивается не двумя, а произвольным числом n неподвижных центров, лежащих на одной прямой.

В этом случае, и даже в более общем, когда присоединяется еще постоянная сила, параллельная той же прямой (*предельный вариант задачи*, когда один из центров удаляется в бесконечность вдоль упомянутой прямой!), имеет место принцип площадей по отношению к плоскости, перпендикулярной данной прямой. Если теперь считать, что начальная скорость движущейся точки лежит в одной плоскости с этой прямой, то всё движение происходит в этой плоскости, и нет необходимости применять теорему площадей.

Напротив, если начальная скорость не лежит в одной плоскости с той прямой, то точка описывает кривую двоякой кривизны. При этом очень выгодно разложить движение на два. В самом деле, предположим, что через точку и через прямую, содержащую центры, проведена плоскость; представим себе, что эта плоскость вращается вокруг прямой и, кроме того, точка движется по вращающейся плоскости.

Это разложение, которое возможно при всех обстоятельствах, в общем случае не дает никакого упрощения, но в рассматриваемом случае можно, благодаря принципу площадей, совершенно отделить движение точки в плоскости от вращательного движения, так что мы разыскиваем сначала движение точки по плоскости, а после того, когда оно найдено, получаем простой квадратурой угол вращения φ этой плоскости (отсчитанный от некоторого определенного, например, начального, ее положения)

Задача Мультона n неподвижных центров на прямой линии

Формулировка проблемы. Мультон (1910) (результат был анонсирован в 1900 г.) также привел обобщение задачи Эйлера на случай $n>3$. Он доказал, что для n тел разных по массам существует $N=n!/2$ вариантов их расположения на прямой линии (N=3 при n=3 – случай Лапласа-Лиувилля; N=12 при n=4 и т. д.) .

Кстати, в бурно развивающемся в настоящее время разделе математики и механики, имеющем название «Центральные конфигурации», упомянутое решение Мультона называют «конфигурациями Мультона».

Рассмотрим некоторые современные применения этой задачи.

Так, в серии работ и в докторской диссертации Г.Т. Аразова [16] неаккуратно и часто утверждается, *во-первых*, об интегрируемости задач трех и более неподвижных центров в квадратурах и даже о том, что "…решение задачи n неподвижных центров $n \geq 2$ **…** обнаружено впервые" .А на самом деле речь идет лишь о некотором *специальном частном* случае задачи Якоби n неподвижных центров на прямой линии, когда движение исследуемой точки ограничивается плоскостью**,** строго перпендикулярной упомянутой прямой. Задача, естественно, интегрируется в квадратурах, как и доказано Якоби в более общем случае. Г.Т. Аразов (1975) [16] рассмотрел частные случаи задачи Якоби n неподвижных центров на прямой линии. Так, при $n = 3$ три неподвижных центра на прямой линии (все три вещественные или один вещественный и два комплексно-сопряженных) расположены на оси аппликат OZ и движение материальной точки рассматривается в плоскости *OXY*. Такой выбор расположения трех масс позволил аппроксимировать до четырех зональных гармоник геопотенциала в спутниковых задачах.

Позже Е.Л. Лукашевич (1979) [17] рассмотрел также частный случай задачи Якоби n неподвижных центров на прямой линии при $n = 6$. Шесть неподвижных центров (три попарно комплексно- сопряженных масс) расположены также на оси аппликат OZ на комплексно-сопряженных расстояниях симметрично относительно начала координат. Такой выбор расположения шести масс позволил аппроксимировать до восьми зональных гармоник геопотенциала в спутниковых задачах.

Таким образом, практически каждой «новой» модельной задаче найден соответствующий частный случай *задачи Эйлера-Лагранжа-Лежандра-Лиувилля-Дарбу-Хильтебейтеля* или *Эйлера-Лагранжа-Якоби-Мультона.* Следовательно, собственно современным авторам принадлежат лишь повторный и более детальный качественный анализ областей возможного движения и более или менее удачные приложения этой (давно известной интегрируемой) задачи классической механики и ее опять же известных более 100 лет обобщений в некоторых прикладных задачах небесной механики, космодинамики и звездной динамики, но никак не открытие новых интегрируемых задач классической и небесной механики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований 10-01-00283.

Библиографический список

1. **Vinti, J.P.** A new method of solution for unretarded satellite orbits // Nat. Bur. Standards. J. Res. Math. and Math. Physics. 1959. V. 63B. №3. P. 105–116.
2. **Vinti, J.P.** Theory of accurate intermediate orbit for satellite astronomy // Nat. Bur. Standards. J. Res. Math. and Math. Physics. 1961. V. 65B. №2. P. 169–201.
3. **Euler, L.** Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas ou la curbe decrite par ce corps sera algebraique // Mémoirs de l'Académie de Berlin for 1760. Publ. 1767. P. 228–247.
4. **Euler, L.** De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti // St.- Petersburg Memoirs 1764/1765. Publ. 1766. V. 10. P. 207–242.
5. **Hiltebeitel, A.M.** Note on a problem in mechanics // Amer. J. Math. (read before Amer. Math. Soc. Feb. 25, 1905). 1911. V. 3. P. 433–436.
6. **Hiltebeitel, A.M.** On the problem of two fixed centers and certain of its generalization // Amer. J. Math. 1911. V. 33. P. 337–362.
7. **Tallqvist, Hj.** Über die Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Zentren nach dem Newtonshen Gesetze angezogen wird // Acta Soc. Sci. Fennicae. Nova Ser.A. Helsingfors: 1927. T. 1. № 1. S. 135.
8. **Tallqvist, Hj.** Die Bewegung eines Massepunktes unter dem Einfluss den Schwere und einer Newtonschen Zentralkraft // Acta Soc. Sci. Fennicae. Nova Ser. A. Helsingfors: 1927. T. 1. № 2. S. 77.

9. **Лукьянов, Л.Г.** Обобщенная задача двух неподвижных центров или задача Дарбу-Гредеакса / Л.Г. Лукьянов, Н.В. Емельянов, Г.И. Ширмин // Космические исследования. 2005. Т. 43. № 3. С. 194–200.
10. **Лагранж, Ж.** Аналитическая механика / Ж. Лагранж. Т. 2. – М.– Л.: Гостехиздат, 1950. – 440 с.
11. **Болотин, С.В.** Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 3. С. 65–68.
12. **Козлов, В.В.** Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи математических наук, 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
13. **Васкез Бессера, Х.А.** Потенциал поля сил в модельной задаче небесной механики и космической геодезии// Известия высших учебных заведений. Геодез. и аэрофотосъемка. 2006. № 5. С. 107–112.
14. **Darboux, G.** Sur un problème de méchanique // Arch. Néerlandaises des Sci. Exactes et Naturéeles. La Haye: 1901. Ser. 2. № 6. P. 371–376.
15. **Борисов, А.В.** Обобщенная задача двух и четырех ньютоновских центров / А.В. Борисов, И.С. Мамаев) // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2005.V. 92 . № 4. P. 371–380.
16. **Аразов, Г.Т.** О задаче трех неподвижных центров // Письма в астрон. ж. 1975. Т. 1. № 6. С. 42–45.
17. **Лукашевич, Е.Л.** Об одном интегрируемом случае движения спутника в нецентральном поле тяготения Земли // Космич. исследования. 1979. Т. 17. № 3. С. 457–459.

Дата поступления
в редакцию 06.07.2012

V.V. Anikovsky[1], S.G. Zuravlev [2]

EULER'S PROBLEM AND ITS APPLICATIONS IN CELESTIAL MECHANICS AND COSMODYNAMICS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev[1],

The consecutive analysis of numerous generalizations of the classical problem of two fixed centres is presented beginning from the moment of its formulation and solution by Euler in 1760 and up to the present days. The role of numerous researchers of the problem is noted. The cited publications demonstrate clearly that the principal results on generalizations of the problem and their analytical and qualitative studies were obtained in the 19th century and in the beginning of the 20th century. Only multiple applications of some generalizations, sometime rather striking but effective belong to modern scientists (e.g. the problem of Gredeaks).

Key words: Euler's problem, real fixed centres, conjugate-complex fixed centres, separation of variables, integrable problem, Hamiltonian function, elliptical coordinates, central configurations.