УДК 519.3

В.А. Игошин

ПОСТРОЕНИЕ КЛЕТКИ И КЛЕТОЧНОГО ПСЕВДОРИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Работа является продолжением предыдущей статьи автора. Осуществлено построение клетки и клеточного пространства. Глобальное строение изучаемых пространств напоминает, в частности, двойную спираль ДНК; при других условиях возможно глобальное устройство пространства в виде «параллельных» Вселенных.

Ключевые слова: псевдориманово пространство, особые точки, клетка, шифр клетки, тороидные и цилиндроидные пространства, формулы стыковки, геликоиды.

1. *S*-геликоиды. *S*-клетка

Далее сохранены обозначения, принятые в [1].

Пусть p_0 - особая точка Г-поля A на *S*-многообразии M. Фиксируем в p_0 ортонормированный репер e_i^0. Реперу e_i^0 соответствуют нормальные координаты a^i в зоне $Z(p_0)$.

Имеем четыре «элементарных звена»:

$Z^1(p_0) \overset{def}{=\!=} \{a \in Z(p_0) : a^1 \geq 0, a^2 \geq 0\}$ («правое верхнее»),

$Z^2(p_0) \overset{def}{=\!=} \{a \in Z(p_0) : a^1 \leq 0, a^2 \geq 0\}$ («левое верхнее»),

$Z^3(p_0) \overset{def}{=\!=} \{a \in Z(p_0) : a^1 \leq 0, a^2 \leq 0\}$ («левое нижнее»),

$Z^4(p_0) \overset{def}{=\!=} \{a \in Z(p_0) : a^1 \geq 0, a^2 \leq 0\}$ («правое нижнее»).

Каждое звено $Z^\alpha(p_0)$ (α = 1, 2, 3, 4) имеет две грани: грань $Z_1^\alpha(p_0) \overset{def}{=\!=} \{a \in Z^\alpha(p_0) : a^1 = 0\}$, ортогональную e_1, и $Z_2^\alpha(p_0) \overset{def}{=\!=} \{a \in Z^\alpha(p_0) : a^2 = 0\}$, ортогональную e_2.

Назовем *S*-многообразие M цилиндроидным, если все особенности относятся только к типу II (или только к типу II′), и тороидным, если все особые точки принадлежат типу III.

В тороидном случае паре векторов e_1^0 и e_2^0 репера e_i^0 в особой точке p_0 сопоставим ломаную геодезическую (контур) $\Gamma_+(p_0, e_1, e_2) \equiv (p_{4k}, p_{4k+1}, p_{4k+2}, p_{4k+3}, \ldots)_{(e_1, e_2)}$ (k = 0, 1, 2, …) следующим образом. Соседние вершины p_r и p_{r+1} ломаной являются соседними особыми точками Г-поля. Пусть первые r звеньев уже построены. Будем обозначать далее через $(p_0, \ldots, p_r)_{(e_1, e_2)}$ геодезическую ломаную из этих r звеньев и через e_i^r векторы ортонормированного репера в точке p_r, полученного параллельным переносом векторов e_i^0 вдоль ломаной $(p_0, \ldots, p_r)_{(e_1, e_2)}$. Положим $r = 4k$. Отрезок плюс-геодезической $\gamma_{e_2^{4k}} : [0, c_+^{4k}] \to M$ с начальным значением (p_{4k}, e_1^{4k}), соединяющий точку p_{4k} с ее «правым плюс-

---

соседом» p_{4k+1}, будет (4k+1)-ым звеном контура $\Gamma_+(p_0,e_1,e_2)$. Минус-геодезическая $\gamma_{e_2^{4k+1}}$: $[0,c_-^{4k+1}]\to M-(4k+2)$-ое звено с вершинами в особых точках p_{4k+1} и p_{4k+2}. Плюс-геодезическая $\gamma_{e_1^{4k+2}}:[0,c_+^{4k+2}]\to M$ $(4k+3)$-ое звено с началом p_{4k+2} и концом p_{4k+3}. Минус-геодезическая $\gamma_{e_2^{4k+3}}:[0,c_+^{4k+3}]\to M$ $(4k+4)$-ое звено с вершинами p_{4k+3} и p_{4k+4}. Определение контура $\Gamma_+(p_0,e_1,e_2)$ этим завершено.

Рассмотрим объединение элементарных звеньев $W_{+1}\overset{def}{=\!=}Z^1(p_0)\cup Z^2(p_{+1})\cup Z^3(p_{+2})\cup Z^4(p_{+3})$. Так, мы получаем первый «виток» W_{+1}, затем $W_{+2}\overset{def}{=\!=}Z^1(p_4)\cup Z^2(p_5)\cup Z^3(p_6)\cup Z^4(p_7)$ – второй, W_{+3} – третий и т.д. Объединение $H_+^1(p_0)\overset{def}{=\!=}\bigcup_{r\in Z_+}W_r$ назовем плюс-правым верхним S-геликоидом. Аналогично контуру $\Gamma_+(p_0,e_1,e_2)$ определен контур $\Gamma_-(p_0,e_2,e_1)\equiv(p_{\ 4k},p_{\ 4k\ 1},p_{\ 4k\ 2},p_{-4k-3},\ldots)\,(k=0,+1,+2,\ldots)$. Особенность p_{-4k-1} – «верхний минус-сосед» особой точки p_{-4k}, особенность p_{-4k-2} – «правый плюс-сосед» p_{-4k-1}, особенность p_{-4k-3} – «нижний минус-сосед» p_{-4k-2}, особенность p_{-4k-4} – «левый плюс-сосед» p_{-4k-3}. Строим витки $W_{\ k}\overset{def}{=\!=}Z^1(p_{\ 4k})\cup Z^4(p_{\ 4k\ 1})\cup Z^3(p_{\ 4k\ 2})\cup Z^2(p_{\ 4k\ 3})$ (k = 1, 2, ...) и составляем из них минус-правый верхний S-геликоид: $H^1(p_0)\overset{def}{=\!=}\bigcup_{r\in Z+}W_{\ r}$. Объединение $H^1(p_0)\overset{def}{=\!=}H_+^1(p_0)\cap H_-^1(p_0)$ назовем правым верхним S-геликоидом, а особенности $p_{\pm r}$ – его вершинами (или узлами); p_0 – «центр» $H^1(p_0)$. Далее определяем: $H^2(p_0)\overset{def}{=\!=}\mathrm{sym}(p_0,e_1^0)H^1(p_0)$ – левый верхний S-геликоид, $H^3(p_0)\overset{def}{=\!=}\mathrm{sym}(p_0,e_2^0)H^2(p_0)$ – левый нижний S-геликоид, $H^4(p_0)\overset{def}{=\!=}\mathrm{sym}(p_0,e_1^0)H^3(p_0)\equiv\mathrm{sym}(p_0,e_2^0)H^1(p_0)$ – правый нижний S-геликоид. Объединение $C(p_0)\overset{def}{=\!=}\bigcup_{\alpha=1}^{4}H^\alpha(p_0)$ назовем S-клеткой.

Замечание. *S-геликоиды $H_\pm^\alpha(p_0)$ - (плюс- и минус-) части S-геликоидов $H^\alpha(p_0)$ (при* α = 2, 3, 4) *определяются очевидным образом.*

Итак, мы определили S-клетку в тороидном случае.

Займемся теперь цилиндроидным. Для определенности будем считать, что все особенности относятся к типу (II). Контур $\mathit{\Gamma}_+(p_0,e_1,e_2)$ состоит из двух звеньев: плюс-геодезической $\gamma_{e_1^0}:[0,c_{(0,+1)}]\to M$, соединяющей точку p_0 с ее правым плюс-соседом особенностью p_{+1}, и минус-геодезической – луча $\gamma_{e_2^{+1}}:[0,\infty]\to M$ с началом в точке p_{+1}. Контур $\Gamma\ (p_0,e_1,e_2)$ вырождается в минус-геодезическую – луч $\gamma_{e_2^0}:[0,+\infty]\to M$ с началом в p_0.

Имеем S-геликоиды: $H_+^1(p_0)\overset{def}{=\!=}Z^1(p_0)\cup Z^2(p_{+1}),H_-^1(p_0)\overset{def}{=\!=}Z^1(p_0),H^1(p_0)\overset{def}{=\!=}H_+^1(p_0)\cup H_-^2(p_0)=Z^1(p_0)\cup Z^2(p_{+1})$; $H^2(p_0)\overset{def}{=\!=}\mathrm{sym}(p_0,e_1)H^1(p_0)$, $H^3(p_0)\overset{def}{=\!=}\mathrm{sym}(p_0,e_1)$

$H^2(p_0), H^4(p_0) \overset{def}{=\!=} \mathrm{sym}(p_0, e_1) H^3(p_0) \equiv \mathrm{sym}(p_0, e_2), H^1(p_0)$. Полагая $p_{+1}^2 \overset{def}{=\!=} \mathrm{sym}(p_0, e_1) p_{+1}$, определяем, наконец, S-клетку $C(p_0) \overset{def}{=\!=} \bigcup_{\alpha=1}^{4} H^\alpha(p_0) = Z(p_0) \cup Z^2(p_{+1}) \cup Z^1(p_{+1}^2) \cup Z^4(p_{+1}^2)$.

Далее наряду с термином S-многообразие используется термин S-клеточное многообразие.

2. Типы тороидных клеток. Классификационная теорема

Объединение $\bigcup_{r=1}^{k} W_r (k > 0)$, состоящее из k витков W_r S-геликоида $H^1(p_0)$, назовем: циклом, если $p_{4k} = p_0$; полным циклом, если, кроме того, $e_i^{4k} = e_i^0$ (i = 1, …, n = dim$M$). Символами $\Sigma^{1(4k)}$ и $\overline{\Sigma}^{1(4k)}$ будем обозначать цикл и полный цикл, соответственно.

Замечание. *Мыслимый случай* $p_{4k+s} = p_0$ *легко устраняется для* s = 1, 3. *Случай же* s = 2 *требует дополнительного анализа и в этой работе исключен из рассмотрения.*

Предложение. *Если S-геликоид* $H^1(p_0)$ *допускает цикл* $\Sigma^{1(4k)}$, *то либо* $e_i^{4k} = e_i^0$, *либо* $e_i^{4k} = -e_i^0$ *(i= 1, ..., n).*

Докажем сначала, что $\mathrm{Sym}(p_0, e_j^0)$ (j = 1, ..., n) задается одной и той же матрицей как в базисе e_i^0, так и в базисе e_i^{4k}. При j = 3, ..., n это видно из формул стыковки $A_{1(2)}^{+(-)}$ при j = 1, 2 – следует из S_3. Действительно, возьмем, к примеру, $\mathrm{Sym}(p_0, e_1^0)$. Согласно S_3, имеем: $S^+_{p_{4r} p_{4r+1}} = S^+_{p_{4r+3} p_{4r+2}}$ любого целого $r \geq 0$; т.е. $\mathrm{Sym}(p_{4r+1}, e_1^{4r+1})$ $\mathrm{Sym}(p_{4r}, e_1^{4r}) = \mathrm{Sym}(p_{4r+2}, e_1^{4r+2})$ $\mathrm{Sym}(p_{4r+3}, e_1^{4r+3})$. Опять-таки из формул стыковки вытекает, что $\mathrm{Sym}(p_{4r+1}, e_1^{4r+1}) = \mathrm{Sym}(p_{4r+2}, e_1^{4r+2})$ и $\mathrm{Sym}(p_{4r+3}, e_1^{4r+3}) = \mathrm{Sym}(p_{4r+4}, e_1^{4r+4})$. Следовательно, $\mathrm{Sym}(p_{4r}, e_1^{4r}) = \mathrm{Sym}(p_{4r+4}, e_1^{4r+4})$. Отсюда получаем: $\mathrm{Sym}(p_0, e_1^0) = \mathrm{Sym}(p_{4k}, e_1^{4k})$. Аналогично $\mathrm{Sym}(p_0, e_1^0) = \mathrm{Sym}(p_{4k}, e_2^{4k})$.

Итак, упомянутые в начале доказательства матрицы совпадают, что равносильно соотношениям: $e_i^{4k} = \varepsilon_i e_i^0$ ($\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, ..., n$).

Можно проверить, что $A_0 = A_{4k}$, причем как A_0, так и A_{4k} – матрицы одного и того же собственного вращения φ_0 пространства M_{p_0}. Поэтому $A_0 T = T A_{4k}$, где T – матрица перехода от базиса e_i^0 к базису e_i^{4k}. Отсюда следует:

$$\begin{pmatrix} ch\alpha_0 & sh\alpha_0 \\ sh\alpha_0 & ch\alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\alpha_0 & sh\alpha_0 \\ sh\alpha_0 & ch\alpha_0 \end{pmatrix},$$

и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Совершенно аналогично показывается, что $\varepsilon_i = \varepsilon_1$ и при i = 3,…, n.

Резюмируя изложенное, приходим (в тороидном случае) к следующей классификационной теореме, в которой случай цикла, состоящего из полуцелого числа витков, исключен из рассмотрения.

Теорема 1. *Для каждой особенности* p_0 *Г-поля A в A-полном псевдоримановом клеточном многообразии* (M, dS^2) *клетка C*(p_0) *либо ациклична (бесконечна), либо S-геликоид* $H^1(p_0)$ *допускает цикл* $\Sigma^{1(4k)} \subset H^1(p_0)$ *с наименьшим числом k* (> **0**) *витков, причем возникают две возможности:*

1) клетка состоит из четырех S-геликоидов $H^{\alpha}(p_0) = \overline{\Sigma}^{\alpha(4k)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ *(при этом* $e_i^{4k} = e_i^0$ *для всех* $i=1,\dots,n$*);*

2) клетка представляет собой пару S-геликоидов:

$$H^1(p_0) = H^3(p_0) = \overline{\Sigma}^{1(8k)} = \overline{\Sigma}^{3(8k)} = \Sigma^{1(4k)} \cup \Sigma^{3(4k)};$$

$$H^2(p_0) = H^4(p_0) = \overline{\Sigma}^{2(8k)} = \overline{\Sigma}^{4(8k)} = \Sigma^{2(4k)} \cup = \Sigma^{4(4k)},$$

(*при этом* $e_i^{4k} = -e_i^0$ *для всех* $i = 1,\dots, n$).

3. Шифры *S*-геликоидов и *S*-клетки (тороидный случай)

Договоримся далее всюду называть зоной (особой точки Г-поля A (M, dS^2)), подзоной, элементарным звеном, *S*-геликоидом и *S*-клеткой соответствующие объекты, наделенные индуцированной метрикой (– сужением метрики dS^2) и Г-полем (– сужением A).

Под шифром какого-либо объекта (*S*-геликоида или *S*-клетки) будем понимать его краткое (символическое) описание, эквивалентное (изоморфное) самому объекту. При этом эквивалентность означает возможность синтеза (см. далее п. 3) объекта по его шифру. Так, например: шифр *S*-геликоида состоит их перечня элементарных звеньев с указанием порядка их соединения и описания связей между звеньями; шифр *S*-клетки – из шифров *S*-геликоидов, ее составляющих, и связей между ними.

Переходя непосредственно к шифрам, начнем с перечней звеньев, составляющих *S*-геликоиды $H^{\alpha}(p_0)$ (α = 1, 2, 3, 4). При этом ограничимся наиболее сложным случаем клетки, состоящей из двух циклических геликоидов $H^1(p_0) \equiv H^3(p_0)$ и $H^2(p_0) = H^4(p_0)$ (см. теорему 1). Введем обозначения: $p_r^1 \overset{def}{=\!=} p_r$, $p_r^2 \overset{def}{=\!=} \mathrm{sym}(p_0, e_1)p_r^1$, $p_r^3 \overset{def}{=\!=} \mathrm{sym}(p_0, e_2)p_r^2$ и $p_r^4 \overset{def}{=\!=} \mathrm{sym}(p_0, e_1)p_r^3 (r \in Z)$.

Звенья $H_+^1(p_0) : (Z^1(p_0),\dots,Z^1(p_{4r}), Z^2(p_{4r+1}), Z^3(p_{4r+2}), Z^4(p_{4r+3}),\dots,Z^1(p_{8k}))$; звенья $H_+^2(p_0) : (Z^2(p_0^2),\dots,Z^2(p_{4r}^2), Z^1(p_{4r+1}^2), Z^4(p_{4r+2}^2), Z^3(p_{4r+3}^2),\dots,Z^2(p_{8k}^2))$; звенья $H_+^3(p_0) : (Z^3(p_0^3),\dots,Z^3(p_{4r}^3), Z^4(p_{4r+1}^3), Z^1(p_{4r+2}^3), Z^2(p_{4r+3}^3),\dots,Z^3(p_{8k}^3))$; звенья $H_+^4(p_0)$: $(Z^4(p_0^4),\dots,Z^4(p_{4r}^4), Z^3(p_{4r+1}^3), Z^2(p_{4r+2}^4), Z^1(p_{4r+3}^4),\dots,Z^4(p_{8k}^4))$ $(r = 0, 1, 2, 2k-1)$.

Перечни звеньев *S*-геликоидов $H_-^{\alpha}(p_0)$ получаются из перечней $H_+^{\alpha}(p_0)$ обращением порядка записи в них элементарных звеньев.

Прежде чем заняться выявлением «связей», напомним, что в каждой из точек p_r^{α} (α = 1, 2, 3, 4; $r \in Z$) фиксирован ортонормированный репер $e_i^{(\alpha, r)}$, а в соответствующих зонах

$Z(p_r^{\alpha})$ – нормальные координаты $\alpha^{i}_{(\alpha,r)}$; на подзонах $Z_{\varepsilon}(p_r^{\alpha})$ – полярные координаты $t_{\varepsilon}^{(\alpha,r)}$ и $\alpha^{*i}_{(\alpha,r)}$, определены пары нечетных периодических с полупериодом $c_{\varepsilon}^{(\alpha,r)}$ функций $f_{\varepsilon}^{(\alpha,r)}(t_{\varepsilon}^{(\alpha,r)}) = d\rho_{\varepsilon}^{(\alpha,r)}/dt_{\varepsilon}^{(\alpha,r)}$, где $\rho_{\varepsilon}^{(\alpha,r)}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ – функции теоремы 1.

Имеем «связи»:

$$\left.\begin{aligned} &f_{\pm}^{(\alpha,\pm 2r)}\left(c_{\mp}^{(\alpha,\pm 2r)} - t_{\pm}\right) = -f_{\pm}^{(\alpha,\pm(2r+1))}(t_{\pm}),\\ &f_{\pm}^{(\alpha,\pm(2r+1))}\left(c_{\mp}^{(\alpha,\pm(2r+1)}-t_{\mp}\right) = -f_{\mp}^{(\alpha,\pm(2r+2))}(t_{\mp})\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

для $t_{+} \in R$, $t \in R$ и целых $r \geq 0$. При этом $c_{\pm}^{(\alpha,\pm 2r)} = c_{\pm}^{(\alpha,\pm(2r+1))}, c_{\mp}^{(\alpha,\pm(2r+1))} = c_{\mp}^{(\alpha,\pm(2r+2))}$.

Переходим далее к шифру клетки.

Имеем «связи»: $p_0^1 = p_0^{\alpha}$ $(\alpha = 2, 3, 4)$, $p_1^1 = p_1^4$, $p_1^2 = p_1^3$, $p_{-1}^1 = p_{-1}^2$, $p_{-1}^3 = p_{-1}^4$.

Далее, с одной стороны, - $p_{\mathrm{r}}^2 = \mathrm{sym}(p_0, e_1)p_{\mathrm{r}}^1$, с другой - $p_1^1 = S^{+}_{p_1^2 p_0}\, p_1^2$. Пользуясь соображениями, аналогичными методу «наложения» элементарной геометрии, получаем: $p_2^1 = S^{+}_{p_1^2 p_0}\, p_1^2$. Согласно S_3, $S^{+}_{p_2^2 p_3^2} = S^{+}_{p_1^2 p_0}$. Следовательно, $p_3^2 = p_3^1$и, поскольку векторы $e_i^{(2,3)}$ и $e_i^{(1,3)}$ – по построению получаются параллельными переносами из точек p_2^2 и p_2^1 соответствующих векторов $e_i^{(2,2)}$ и $e_i^{(1,2)}$, а последние соответствуют друг другу по S^{+}, то в результате параллельного переноса их в точку $p_3^1 = p_3^2$ получим одни и те же значения e_i в этой точке: $e_i^{(2,3)} = e_i^{(1,3)}$. Далее, $p_4^2 = p_4, e_i^{(2,4)} = e_i^{(1,4)}$. Итерация (на первом ее шаге роль p_0 играет $p_4^1 = p_4^2$) дает связи:

$$\left.\begin{aligned} &p_{4r+3}^2 = p_{4r+3}^1,\ e_i^{(2,4r+3)} = e_i^{(1,4r+3)},\\ &p_{4r}^2 = p_{4r}^1,\ e_i^{(1,4r)} = e_i^{(1,4r)}.\end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что совпадение точек $p_r^{\alpha} = p_{r'}^{\beta}$ означает также совпадение зон $Z(p_r^{\alpha}) = Z(p_{r'}^{\beta})$ (вместе с заданными на них метриками и Г-полями). Отсюда следует совпадение функций $f_{\varepsilon}^{(\alpha,r)} = f_{\varepsilon}^{(\beta,r')}$. Договоримся далее связи, записанные двумя равенствами $p_r^{\alpha} = p_r^{\beta}$ и $e_i^{(\alpha,r)} = e_i^{(\beta,r)}$, обозначать тождеством: $Z(p_r^{\alpha}) \equiv Z(p_r^{\beta})$. Таким образом, полученные ранее в результате итерации связи принимают вид:

$$Z(p_{4r+3}^2) \equiv Z(p_{4r+3}^1), Z(p_{4r}^2) \equiv Z(p_{4r}^1). \qquad (2)$$

Аналогично получаются связи:

$$Z(p_{4r}^3) \equiv Z(p_{4r}^2), Z(p_{4r+1}^3) \equiv Z(p_{4r+1}^2), \qquad (3)$$

$$Z(p_{4r}^3) \equiv Z(p_{4r}^4), Z(p_{4r+3}^3) \equiv Z(p_{4r+3}^4), \qquad (4)$$

$$Z(p_{4r}^1) \equiv Z(p_{4r}^4), Z(p_{4r+1}^1) \equiv Z(p_{4r+1}^4), \qquad (5)$$

причем $0 < r \leq 2k - 1$. Для $r < 0$ получаются совершенно аналогичные формулы (2)–(5), которые выписывать не будем. Если $(d, n-d)$ – сигнатура нашего клеточного пространства, то $S^{+} = id$ при $d > 1$, $S^{-} = id$ при $n-d > 1$.

В случае произвольных тороидных S-клеток имеют место также связи:

$$\left.\begin{aligned} &S^{+}\left(Z\left(p^{2}_{4r+1}\right)\right) \equiv Z(p^{1}_{4r+1}),\\ &S^{+}\left(Z\left(p^{2}_{4r+2}\right)\right) \equiv Z(p^{1}_{4r+2}),\\ &S^{+}\left(Z\left(p^{3}_{4r+2}\right)\right) \equiv Z\left(p^{4}_{4r+2}\right)(r \in Z), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &S^{-}\left(Z\left(p^{1}_{4r+2}\right)\right) \equiv Z(p^{4}_{4r+2}),\\ &S^{-}\left(Z\left(p^{2}_{4r+2}\right)\right) \equiv Z(p^{3}_{4r+2}),\\ &S^{-}\left(Z\left(p^{1}_{4r+3}\right)\right) \equiv Z(p^{4}_{4r+3})\ (r \in Z), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Выпишем, наконец, связи, обусловленные цикличностью (размерность любая):

$$\begin{cases} Z(p^{1}_{8k}) \equiv Z(p_0),\ Z(p^{\alpha}_{-r}) \equiv Z(p^{\alpha}_{8k-r})\ (\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ r=0,\dots,8k),\\ Z(p^{1}_{4k}) \equiv Z(p_0),\ e^{4k}_{i} = -e^{0}_{i},\\ Z(p^{1}_{4k+r}) \equiv Z(p^{3}_{r}),\ e^{(1,4k+r)}_{i} = -e^{(3,r)}_{i},\\ Z(p^{3}_{4k+r}) \equiv Z(p^{1}_{r}),\ e^{(3,4k+r)}_{i} = -e^{(1,r)}_{i},\\ Z(p^{2}_{4k+r}) \equiv Z(p^{4}_{r}),\ e^{(2,4k+r)}_{i} = -e^{(4,r)}_{i},\\ Z(p^{4}_{4k+r}) \equiv Z(p^{4}_{r}),\ e^{(4,4k+r)}_{i} = -e^{(2,r)}_{i}, \end{cases} \tag{8}$$

где $i = 1,\dots,n;\ r = 0,\dots,4k$.

Из связей (1)–(7) следует, что в двумерном случае узлы клетки $C(p_0)$ естественно делятся на внутренние p^{α}_{4r} (при любом целом r) и граничные (остальные); из последних выделяются угловые $p^{\alpha}_{\pm(4r+2)}$ $(r > 0)$. Грани также делятся на внутренние (сходящиеся к p^{α}_{4r}) и внешние (сходящиеся к $p^{\alpha}_{\pm(4r+2)}$).

Границу клетки $C(p_0)$ можно представить в виде объединения $FrC(p_0) = FrD \bigcup FrG \bigcup FrB \bigcup FrF$,

где «правая граница» $FrD \overset{def}{=\!=} \bigcup\limits_{r\in Z}\{Z^{3}_{1}(p^{1}_{4r+2}) \bigcup Z^{(2,3)}_{1}(p^{1}_{4r+1}) \bigcup Z^{2}_{1}(p^{4}_{4r+2})\}$;

«левая граница» $FrG \overset{def}{=\!=} \bigcup\limits_{r\in Z}\{Z^{4}_{1}(p^{2}_{4r+2}) \bigcup Z^{(1,4)}_{1} p(^{2}_{4r+1}) \bigcup Z^{1}_{1}(p^{3}_{4r+2})\}$,

«верхняя граница» $FrF \overset{def}{=\!=} \bigcup\limits_{r\in Z}\{Z^{4}_{2}(p^{2}_{4r+2}) \bigcup Z^{(3,4)}_{2}(p^{1}_{4r+3}) \bigcup Z^{3}_{2}(p^{1}_{4r+2})\}$;

и «нижняя граница» $FrB \overset{def}{=\!=} \bigcup\limits_{r\in Z}\{Z^{1}_{2}(p^{3}_{4r+2}) \bigcup Z^{(1,2)}_{2}(p^{3}_{4r+3}) \bigcup Z^{2}_{2}(p^{4}_{4r+2})\}$.

Замечание. $Z^{(2,3)} \overset{def}{=\!=} Z^{2} \bigcup Z^{3}$ и т.д. Напомним также, что Z^{α}_{i} (α = 1, 2, 3, 4; i = 1,2) грань звена Z^{α}, ортогональная вектору e_i.

4. Построение клетки и клеточного псевдориманова многообразия. Теорема существования

4.1. Построение клетки

Так же, как при выписывании шифров, и здесь ограничимся случаем тороидной клетки с двумя циклическими геликоидами $H^1(p_0) \equiv H^3(p_0)$ и $H^2(p_0) \equiv H^4(p_0)$ (случаем наиболее сложным и интересным).

Пусть E – псевдоевклидово пространство сигнатуры $(d,\ n-d)$ $(0 < d < n = \dim E)$, $\breve{e}_i$ - ортонормированный репер в E, причем $\breve{e}_1^2 = 1, \breve{e}_2^2 = -1$ и $\breve{p}$ – фиксированная точка из E. Рассмотрим счетный набор троек $(E_r^\alpha, \breve{e}_r^{(\alpha,r)} \breve{p}_r^\alpha), \alpha = 1,2,3,4;\ r \in Z$. Для каждой тройки определены нормальные $\alpha_{(\alpha,r)}^i$ и полярные $t_\varepsilon^{(\alpha,r)},\ a_{(\alpha,r)}^{*i}$ координаты. С помощью двух четных периодических (с полупериодом $c_\varepsilon^{(\alpha,r)}$) функций $\rho_\varepsilon^{(\alpha,r)}$ определены абстрактные зоны – многообразия $\breve{Z}(\breve{p}_r^\alpha) = \breve{Z}_{+1}(\breve{p}_r^\alpha) \bigcup Con\ \breve{p}_r^\alpha \bigcup \breve{Z}\ _1(\breve{p}_r^\alpha)(Con\ \breve{p}_r^\alpha = \{a \in E_r^\alpha :\ < a,a >= 0\},\quad \breve{Z}_\varepsilon(\breve{p}_r^\alpha = \{a \in E_r^\alpha :$ $0 < (t_\varepsilon^{(\alpha,r)})^2 = \varepsilon < a,\ a > < (c_\varepsilon^{(\alpha,r)})^2\})$ вместе с псевдоримановой метрикой dS^2 и Г-полем A на $\breve{Z}(\breve{p}_r^\alpha): A_{,j}^i = \Phi\delta_j^i$.

Известным нам образом мы представляем зону $\breve{Z}(\breve{p}_r^\alpha)$ как объединение четырех элементарных звеньев $\breve{Z}^\beta(\breve{p}_r^\varepsilon)$ $(\beta = 1, 2, 3, 4)$.

Начинаем построение абстрактного (пока) S-геликоида $\breve{H}^1(\breve{p}_0)$ по его шифру, который записывается так же, как и шифр «натуральный». Не выписывая здесь шифра $\breve{H}^1(\breve{p}_0)$, будем отличать его от шифра «натурального» $\breve{H}^1(\breve{p}_0)$ лишь употреблением значка «$\cup$», который подчеркивает специфику принятой сейчас точки зрении.

Обозначим через $\breve{Z}_{e_i}(\breve{p}_r^\alpha)$ содержащую вектор $\breve{e}_i^{(\alpha,r)}$ компоненту связности открытого множества $\breve{Z}(\breve{p}_r^\alpha) \backslash \mathrm{Con}\ \breve{p}_r^\alpha$. В порядке, предусмотренном шифром, составим $\breve{Z}^1(\breve{p}_{4r}^1)$ $\cup \breve{Z}^2(\breve{p}_{4r+1}^1)$. Формулы стыковки $A_{1(2)}^{(\pm)}$, в которых a и a' относятся к $\breve{Z}^1(\breve{p}_{4r}^1)$ и $\breve{Z}^2(\breve{p}_{4r+1}^1)$, представляют собою изометрию $\Phi_{4r \to 4r+1}^{+(1)} : \breve{Z}_{e_1}(\breve{p}_{4r}^1) \to \bigcap \breve{Z}^1(\breve{p}_{4r}^1)\ \breve{Z}_{-e_1}(\breve{p}_{4r+1}^1) \bigcap \breve{Z}^2(\breve{p}_{4r+1}^1)$.

Предполагается, что функции $f_\varepsilon^{(\alpha,r)} = d\rho_\varepsilon^{(\alpha,r)} / dt_\varepsilon^{(\alpha,r)}$ соответствуют шифру $\breve{H}^1$.

Аналогично имеем изометрии:

$$\Phi_{4r+1 \to 4r+2}^{+(1)} : \breve{Z}_{e_2}(\breve{p}_{4r+1}^1) \bigcap \breve{Z}^2(\breve{p}_{4r+1}^1) \to Z\ \ _{e_2}(\breve{p}_{4r+2}^1) \bigcap \breve{Z}^3(\breve{p}_{4r+2}^1),$$

$$\Phi_{4r+2 \to 4r+3}^{+(1)} : \breve{Z}_{-e_1}(\breve{p}_{4r+2}^1) \bigcap \breve{Z}^3(\breve{p}_{4r+2}^1) \to Z_{e_1}(\breve{p}_{4r+3}^1) \bigcap \breve{Z}^4(\breve{p}_{4r+3}^1),$$

$$\Phi_{4r+3 \to 4r+4}^{+(1)} : \breve{Z}_{-e_2}(\breve{p}_{4r+3}^1) \bigcap \breve{Z}^4(\breve{p}_{4r+3}^1) \to Z_{e_2}(\breve{p}_{4r+4}^1) \bigcap \breve{Z}^1(\breve{p}_{4r+4}^1).$$

Наконец, строим геликоид $\breve{H}_+^1$ как результат трех последовательных факторизаций.

Во-первых, несвязное псевдориманово многообразие (с краем) $\breve{H}^1_+ \overset{def}{=} \bigcup_{r=0}^{2k-1} \{\breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r}) \cup \breve{Z}^2(\breve{p}^1_{4r+1}) \cup \breve{Z}^3(\breve{p}^1_{4r+2}) \cup \breve{Z}^4(\breve{p}^1_{4r+3}) \cup \breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r+4})\}$ факторизуем по изометриям $\Phi^{+(1)}$.

Во-вторых, получая неполный цикл $\Sigma^{1(4k)}$, осуществляем факторизацию (см. связи (С)): $\breve{Z}(\breve{p}^1_{4k}) \equiv \breve{Z}(\breve{p}^1_0), \breve{e}^{4k}_i = \breve{e}^0_i$.

В-третьих, замыкая полный цикл $\bar{\Sigma}^{1(8k)}$, факторизуем результат (предыдущих двух факторизаций) изометрией (см. связи (С)): $\breve{Z}(\breve{p}^1_{8k}) \equiv \breve{Z}(\breve{p}^1_0)$. В итоге получаем связное псевдориманово многообразие с краем $\breve{H}^1_+ = \bigcup_{r=0}^{2k-1} \{\breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r}) \cup \breve{Z}^2(\breve{p}^1_{4r+1}) \cup \breve{Z}^3(\breve{p}^1_{4r+2}) \cup \breve{Z}^4(\breve{p}^1_{4r+3}) \cup \breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r+4})\}$, где через $\breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r}), \ldots, \breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r+4})$ обозначены полученные в результате указанных факторизаций классы эквивалентности с представителями $\breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r}), \ldots, \breve{Z}^1(\breve{p}^1_{4r+4})$, соответственно. Аналогично строим $\breve{H}^2_+, \breve{H}^3_+, \breve{H}^4_+$. После этого переходим к построению абстрактной (пока) клетки $\breve{C}(p_0)$, , предполагая, что функции $f^{(\alpha,r)}_\varepsilon = d\rho^{(\alpha,r)}_\varepsilon / dt^{(\alpha,r)}_\varepsilon$ подобраны в соответствии с шифром $\breve{C}(p_0)$, который (если пренебречь значком «$\cup$») совпадает с шифром «натуральной» клетки $C(p_0)$. Факторизуем объединение $\bigcup_{\alpha=1}^{4} H^\alpha_+$ по связям $(B_1)-(B_4)$ (а в надлежащих случаях еще по связям (B_5), (B_6) и по связям (C) (тем, которые еще не использованы). Обозначим через $H^\alpha_\pm(p_0)$ результат факторизации $\breve{H}^\alpha_\pm$ по связям (B) и (C); заметим, что в силу связей $Z(\breve{p}^\alpha{}_r) \equiv Z(\breve{p}^\alpha_{8k}\ {}_r) : H^\alpha(p_0) = H^\alpha_+(p_0) = H^\alpha(p_0)$. В результате получаем связное псевдориманово многообразие (вообще говоря, с краем): $\breve{C}(p_0) \overset{def}{=} \bigcup_{\alpha=1}^{4} H^\alpha(p_0)$, которое имеет тот же шифр, что и клетка $\breve{C}(p_0)$ в рассматриваемом нами случае: $H^1(p_0) = H^3(p_0) = \bar{\Sigma}^{1(8k)} \equiv \bar{\Sigma}^{3(8k)}$; $H^2(p_0) = H^4 = \bar{\Sigma}^{2(8k)} \equiv \bar{\Sigma}^{4(8k)}$.

Следует отметить, что в силу связей (A), (B) и (C) каждая из симметрий: $\mathrm{sym}(\breve{p}^\alpha_{4r}, e_1) : Z(\breve{p}^1_{4r}) \to Z(\breve{p}^\alpha_{4r})$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, $\mathrm{sym}(\breve{p}^1_{4r+3}, e_1) = \mathrm{sym}(\breve{p}^2_{4r+3}, e_1) : Z^{(3,4)}(\breve{p}^1_{4r+3}) \to Z^{(3,4)}(\breve{p}^1_{4r+3})$ и $\mathrm{sym}(\breve{p}^3_{4r+3}, e_1) = \mathrm{sym}(\breve{p}^4_{4r+3}, e_1) : Z^{(1,2)}(\breve{p}^3_{4r+3}) \to Z^{(1,2)}(\breve{p}^3_{4r+3})$ допускает единственное продолжение на всю клетку $\breve{C}(p_0)$, которое будем обозначать так же, как и соответствующую исходную симметрию; при этом:

$$\mathrm{sym}(\breve{p}_0, e_1) = \mathrm{sym}(\breve{p}^\alpha_{4r}, e_1) = \mathrm{sym}(\breve{p}^\alpha_{4r+3}, e_1) \tag{9}$$

для $\alpha = 1, 2, 3, 4$ и $r \in Z$.

Замечание. $p^\alpha_{4r} = p^1_{4r}, p^1_{4r+3} = p^2_{4r+3}, p^3_{4r+3} = p^4_{4r+3}$. $Z^{(3,4)} \overset{def}{=} Z^3 \cup Z^4$ *и т.д.*

4.2. Построение клеточного многообразия

Представим себе множество идентичных экземпляров клетки с центрами $p_0^{(l,m)}$ $(l,m \in Z)$. Каждая клетка дважды ориентирована – имеет правую, левую, верхнюю и нижнюю границы. В двумерном случае правую границу клетки $\breve{C}^{(l,m)} = \breve{C}(p_0^{(l+1,m)})$ склеим с левой границей клетки $C^{(l+1,m)}$, верхнюю границу клетки $\breve{C}^{(l,m)}$ – с нижней границей $\breve{C}^{(l,m+1)}(l,m \in Z)$; при этом склеиваем точки границ, имеющие одинаковые нормальные координаты (которые определены вместе с базисом $e_i^{(\alpha,r)}$ в вершине каждого звена). В результате получаем псевдориманово многообразие $(M = \bigcup_{l,m \in Z} \breve{C}^{(l,m)}, dS^2)$, состоящее из склеенных клеток, за которыми мы сохраняем их исходные обозначения. (Числа l и m играют роль целочисленных «декартовых» координат клетки $\breve{C}^{(l,m)}$ в M).

На M определено (векторное) Г-поле $A: A|_{Z(p_r^\alpha)} = \text{grad}\ \rho^{(\alpha,r)}$. Само (M,dS^2) – A-полно.

Естественное (каноническое) отображение произвольной клетки $\breve{C}^{(l_1,m_1)}$ на (идентичную!) клетку $\breve{C}^{(l_2,m_2)}$) обозначим через $\breve{S}^{+(l_1,l_2)}\breve{S}^{-(m_1,m_2)}$ (при этом точки переходят в гомологичные им точки). При фиксированных разностях $l = l_2 - l_1$ и $m = m_2 - m_1$ всевозможные $\breve{S}^{+(l_1,l_2)}\breve{S}^{-(m_1,m_2)}$ определяют некоторое отображение $\breve{S}^{+l}\breve{S}^{\ m}: M \to M$, являющееся движением, следующим образом: $p \to \breve{S}^{+l}\breve{S}^{-m}(p) \overset{def}{=\!=} \breve{S}^{+(l_1,l_1+l)}\breve{S}^{-(m_1,m_1+m)}(p)$, если $\breve{C}^{(l_1,m_1)}$ клетка, содержащая (наперед заданную) точку $p \in M$. Отображение $\breve{S}^{+l}\breve{S}^{-m}$ будем обозначать через $\breve{S}^{+l}$ при $m = 0$ и через $\breve{S}^{-m}$ при $l = 0$. Положим также $\breve{S}^{+} \overset{def}{=\!=} \breve{S}^{+1}$ и $\breve{S} \overset{def}{=\!=} \breve{S}\ ^{1}$. Очевидно: $\breve{S}^{+l}\breve{S}\ ^{m} = (\breve{S}^{+})^{l} \times (\breve{S}\ )^{m} = (\breve{S}\ )^{m} \times (\breve{S}^{+})^{l}$. Итак, множество $G \overset{def}{=\!=} \{(\breve{S}^{+})^{l} \times (\breve{S}\ )^{m} :$ $l,m \in Z\}$ является абелевой группой движений псевдориманова пространства (M,dS^2).

Пусть далее p_0 – центр произвольной клетки $\breve{C}^{(l_0,m_0)}$ (мы опускаем индексы l_0 и m_0 в обозначении центра) и $\varphi = \text{sym}(p_0, e_1)$. Нетрудно распространить φ на все многообразие M. Для любой клетки $\breve{C}^{(l_0+l,m)} = \breve{C}p_0^{(l_0+l,m)}$) полагаем

$$\varphi|_{\breve{C}^{(l_0+l,m)}} \overset{def}{=\!=} (\text{sym}(p_0^{(l_0+l,m)}, e_1)) \times (\breve{S}^{+})^{\ 2l}\Big|_{\breve{C}^{(l_0+l,m)}} \tag{10}$$

Необходимо отметить, что одновременно распространяются на все M и соотношения (9).

Пусть, далее, p_r^{α} – соответствующая вершина (особенность) клетки $\breve{C}^{(l_0,m_0)}$. Каждая из симметрий $\text{sym}(\breve{p}_{4r+1}^2, e_1) = \text{sym}(\breve{p}_{4r+1}^3, e_1), \text{sym}(p_{4r+2}^2, e_1)$ и $\text{sym}(p_{4r+2}^3, e_1)$ преобразует соседние клетки $\breve{C}^{(l_0-1,m_0)}$ и $\breve{C}^{(l_0,m_0)}$ друг в друга, причем

$$\text{sym}(p_1^2, e_1) = \text{sym}(\breve{p}_{4r+1}^{\alpha}, e_1) = \text{sym}(\breve{p}_{4r+2}^{\alpha}, e_1) \tag{11}$$

для $\alpha = 1, 2$ и $r \in Z$.

Если положить $\varphi' \overset{def}{=\!=} \text{sym}(p_1^2, e_1)$, то очевидно (наложение!):

$$\phi' = \phi \cdot (\breve{S}^{+})\Big|_{\breve{C}}(l_0 - 1, m_0)\,. \tag{12}$$

Равенство (12) распространяет **φ** на все многообразие ***M.***

Аналогично определяется $\varphi'' = \mathrm{sym}(\breve{p}_1^1, e_1)$, причем

$$\mathrm{sym}(\breve{p}_1^1, e_1) = \mathrm{sym}(\breve{p}_{4r+1}^{\alpha}, e_1) = \mathrm{sym}(\breve{p}_{4r+2}^{\alpha}, e_1) \tag{13}$$

для $\alpha = 1, 4$ и $r \in Z$.

Остается описать движение в *M,* определенное известным нам образом парой плюс-соседних особенностей p_1^2, p_0**:**

$$S^{+} = \mathrm{sym}(p_0, e_1)\,\mathrm{sym}(p_1^2, e_1). \tag{14}$$

Из (10) и (11) следует

$$S^{+} = \breve{S}^{+}. \tag{15}$$

Соотношения (9), (11), (13) и (15) показывают, что движение S^{+}, определенное парой плюс-соседних особенностей, не зависит от этой пары в пределах наперед заданной клетки $\breve{C}^{(l_0, m_0)}$. Отсюда следует, что требование S_3 выполнено для построенного нами псевдориманова пространства применительно к S^{+}. Аналогично оно проверяется и для S^{-}.

Выполнение требования S_1 следует из условий, в соответствии с которыми подбирались функции $\rho_{\varepsilon}^{(\alpha, r)}$ [1]. Требование же S_3 выполнено очевидным образом.

Итак, доказана

Теорема 1. Описанным *ранее методом может быть построено клеточное тороидное двумерное псевдориманово многообразие с клетками любого из типов, перечисленных в классификационной теореме п. 2; при этом наименьшее* число *(k) витков, составляющих (в циклическом случае) цикл, можно задавать произвольным образом.*

Замечание 1*. В случае n* > 2 *(по крайней мере) одна из ε-псевдосфер связна, что приводит к значительным упрощениям в построении из клеток клеточного многообразия. Если, например, связна* (–1)*-псевдосфера (т.е. та, которая лежит в минус-области), то в клетке* $C(p_0)$ *верхняя и нижняя границы совпадают:*

$$Fr_F C_{(p_0)} = Fr_\beta C_{(p_0)} \tag{16}$$

и остается (*в случае сигнатуры вида* (1, *n* – 1)) *один бесконечный ряд клеток* $C^x (x \in Z)$, *центры которых* p_0^x *лежат на одной геодезической. При этом группа G S-движений зависит от одной образующей. В наиболее типичном для многомерных пространств случае сигнатуры (d, n – d) при d* > 1 *и n – d* > 1, *кроме (16), имеет место и* $Fr_G C_{(p_0)} = Fr_D C_{(p_0)}$. *В этом случае S-клеточное псевдориманово пространство состоит из одной клетки (одноклеточно!), а группа G тривиальна.*

Теорема 2. *Могут быть построены клеточные тороидные псевдоримановы многообразия произвольной размерности и сигнатуры с клетками любого из типов, перечисленных в классификационной теореме п.2; при этом число (k) витков, составляющих* цикл, *можно считать произвольным.*

Доказательство при *n*(= dim *M*) > 2 нетрудно провести, используя замечание 1.

Замечание 2. *При доказательстве теоремы* 1 *построено клеточное многообразие со свободной группой G S-движений, зависящих от двух образующих* S^{+} *и* S^{-}.

Теорема 3 **(существования).** *Существуют три перечисленных в классификационной теореме п. 2, непустых класса клеточных тороидных псевдоримановых многообразий заданной размерности и сигнатуры; число (k) витков, образующих цикл, может быть произвольным.*

Для доказательства достаточно подобрать функции $\rho_\varepsilon^{(\alpha, r)}$ $(\varepsilon = \pm 1; \alpha = 1, 2, 3, 4; r \in Z)$, обладающие свойствами, описанными в теореме 3 статьи [1], *и удовлетворяющие соответствующим шифрам. Таковыми являются (в тороидном случае), например, функции* $\rho_\varepsilon^{(\alpha, r)}$, для которых $d\rho_\varepsilon^{(\alpha, r)}/dt_\varepsilon \stackrel{def}{=} \varepsilon sdt_\varepsilon$ при любых $\alpha = 1, 2, 3, 4$ и $r \in Z$, где sd – эллиптическая функция Якоби (одна из двенадцати), соответствующая параметру $m = \frac{1}{2}(sdt_\varepsilon = sd(t_\varepsilon \left| \frac{1}{2} \right.))$.

Другим примером такого рода являются функции $\rho_\varepsilon^{(\alpha, r)} = \varepsilon sd^2 t_\varepsilon$. Заметим, что первый пример соответствует (в аналитическом случае) комплексной функции полюса $F(z)$, приведенной в [11].

Замечание. *Случай цикла, состоящего из полуцелого числа витков, исключен из рассмотрения в теореме 3.*

4.3. Клеточные пространства постоянной кривизны

Пусть M – многообразие постоянной кривизны $K \neq 0$ с индефинитной метрикой сигнатуры $(d, n - d)$. В окрестности каждой точки $p \in M$ определено Г-поле A, траектории которых лежат на геодезических, проходящих через p, и которое может быть представлено уравнением Вейнгартена $\rho_\beta^\alpha = -K\rho\delta_\beta^\alpha$. Предположим, что A определено на M и в целом представлено таким уравнением. Тогда M – клеточное многообразие с особенностями второго типа (цилиндроидное). В самом деле, уравнение Вейнгартена вдоль траекторий A приобретает вид $d^2\rho_\varepsilon/dt^2 = -\varepsilon K\rho_\varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Отсюда при $K > 0$ следует: $\rho_{+1} = \cos\sqrt{Kt}_{\,1}, \rho_{\,1} = \mathrm{ch}\sqrt{Kt}_{\,1}$; при $K < 0$: $\rho_{+1} = \mathrm{ch}\sqrt{-Kt}_{+1}, \rho_{-1} = \cos\sqrt{Kt}_{-1}$ (равенства с точностью до скалярного множителя). Мы видим, что при $\varepsilon K < 0$ у p нет «ε-соседей», но имеются «-ε-соседи». В общем случае (при $d > 1$ и $n - d = 1$) M одноклеточно, но в случае $d = 1$ (или $n - d = 1$) многоклеточность возможна, если $K < 0$ (или $K > 0$).

Последнее имеет место, например, для пространства де Ситтера 2-го рода ($K < 0$), которое состоит из бесконечного множества клеток, каждая из которых является пульсацией (или «вспышкой») трехмерного пространства Лобачевского. Пространство же 1-го рода де Ситтера ($K > 0$) одноклеточно; двум особенностям этой клетки соответствуют две трехмерные сферы, монотонно расширяющиеся в «прошлое» и «будущее», разумеется, особенности здесь, в отличие от модели Фридмана, являются лишь особенностями Г-поля.

Библиографический список

1. **Игошин, В.А.** Клеточная структура псевдориманова пространства с геодезическим полем одномерных направлений // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева / НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2011.
2. **Шапиро, Я.Л.** О геодезических полях многомерных направлений // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32. № 4. С. 237–239.
3. **Шапиро, Я.Л.** Геодезические поля направлений и проективные системы путей // Математический сборник, 1955. Т. 36. Вып. 1. С. 125–148.
4. **Кручкович, Г.И.** О движениях в полуприводимых римановых пространствах // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. № 6. С. 149–156.
5. **Каган, В.Ф.** Субпроективные пространства / В.Ф. Каган. – М.: Физматгиз, 1961. – 220 с.
6. **Levi-Civita, T.** Sulle Trasformazioni delle equazioni dinamiche // Ann. Mat. Pura ed appl. – Milano, ser. 2. 1896. V. 24. P. 255–300.
7. **Шапиро, Я.Л.** Геодезическое поле направлений в целом // Известия вузов. Математика. 1970. № 4. С. 103–111.

8. **Картан, Э.** Геометрия римановых пространств / Э. Картан. – М. – Л.: ОНТИ, 1930.
9. **Schur, F.** Uber den Zusammenhang der Raume constanten Krumnungsmasses mit den projectiven Raumen // Math.Ann. 1886. T. 27. P. 537–567.
10. **Солодовников, А.С.** Полюсы псевдоримановых пространств / А.С. Солодовников, Н.Р. Камышанский // Известия АН СССР, Сер. Математика. 1975. Т. 39. № 5. С. 1093–1129.
11. **Камышанский, Н.Р.** Полуприводимые аналитические пространства «в целом» / Н.Р. Камышанский, А.С. Солодовников // Успехи математических наук. 1980. Т. 35. № 5. С. 3–51.
12. **Maebashi, T.** Vector fields and space forms // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1960. № 15. P. 62–92.
13. **Ishihara, S.** On Riemannian manifolds admiting a concircular transformation / S. Ishihara, Y. Tashiro // Math. J. Okayama Univ. 1959. № 9. P. 19–47.
14. **Tashiro, Y.** Complete Riemannian manifolds and some vector fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 117. № 5. P. 251–275.
15. **Yano, K.** Concircular geometry. I, II, III, IV, V – Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1940. V. 16. PP. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511; ibid. 1942. V. 18. P. 446–451.
16. **Bianchi, L.** Lexioni di Geometrie differentiele. V. II, part II. – Pisa, 1903.
17. **Игошин, В.А.** Особые точки геодезического ноля / В.А. Игошин, Я.Л. Шапиро // Известия вузов. Математика. 1984. № 9. С. 79–82.
18. **Игошин, В.А.** Геодезическое поле с особенностями и клеточное многообразие / В.А. Игошин, Я.Л. Шапиро // Известия вузов. Математика. 1984. № 11. С. 74–77.
19. **Бессе, А.** Многообразия с замкнутыми геодезическими / А. Бессе. – М.: Мир, 1981. – 315 с.

Дата поступления
в редакцию 06.07.2012

V.A. Igoshin

CONSTRUCTION OF THE CAGE AND CELLULAR PSEUDORIEMANNIAN SPACE

The Nizhni Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Metodology: Methods as local and global differential geometry are applied.
Purpose: Work is continuation of the research begun in previous article of the author.
Findings and originality/ value: At some assumptions construction both the cage, and cellular pseudoriemannian spaces is carried out. The global structure of studied spaces reminds, in particular, a double spiral of DNA; under other conditions probably global device of space in the form of the "parallel" Universes.
Researsch implications: It is proved, for example, that spaces of constant curvature ***K*** possess cellular structure. The last takes place for de Sitter space the second sorts (***K*** □ 0), which consists of infinite set of cages, each of which is a pulsation (or "flash") Lobachevsky's three-dimensional space. De Sitter space of the first sort (***K*** > 0) consists of one cage; to two features of this cage there correspond two three-dimensional spheres monotonously extending in "past" and "future" (certainly, features here, unlike Freedman model, are only features of the geodesic field).

Key words: a geodesic field directions, singular point, a cage, the cage code number, torus-like and cilinder-like spaces.