УДК 53.072

Г.В. Кондратьев

О КАНОНИЧЕСКОМ ОБОГАЩЕНИИ КАТЕГОРИИ В КАТЕГОРИИ ПРЕДПУЧКОВ МНОЖЕСТВ

Университет Сан-Паулу, Бразилия

Обсуждается конструкция канонического обогащения категории с бинарными произведениями в категории предпучков множеств. Это – естественный шаг, когда категория декартова, но не является декартово-замкнутой, и ее Hom-множества не являются объектами в этой категории. Идея является старой – обращаться с множествами отображений между объектами как с самими объектами.

Ключевые слова: категория, предпучок, копределы, почти-объекты.

Во многих разделах математики часто бывает желательно рассматривать множество морфизмов между объектами некоторой категории как объект этой же категории. Это можно сделать простым каноническим образом, если категория имеет бинарные произведения (которым практически всегда снабжены обычные алгебраические, топологические и дифференциальные категории). Идея хорошо известна. Автор следует подходу Б.П. Комракова [1], поскольку именно через него видна каноничность конструкции: Hom-множества являются так же, как и объекты копределами всех параметризаций и репараметризаций.

Рассматриваемые как предпучки, Hom-множества допускают продолжение функторов на них. Например, касательный функтор T в категории гладких многообразий **Diff** продолжается на почти гладкие многообразия отображений. С этой позиции группа автоморфизмов **Aut**(X) гладкого многообразия X становится почти группой Ли. Гомологии пространств отображений или пространств решений дифференциальных уравнений могут изучаться с этой позиции, как и разные другие вопросы. Технически это выглядит как вычисление копределов, связанных с интересующими нас функторами. Вопрос их вычисления в статье не обсуждается.

1. Каноническое обогащение категории

Напомним сначала определение обогащенной категории по М. Келли [2]. Используемые обозначения стандартны и не требуют особых пояснений (например, Ob, Ar, μ обозначают объекты, стрелки и умножение в категории).

Определение 1. Категория **C** называется обогащенной в тензорной категории ($\mathbf{V}$,I, ⊗), [2, 3] если

- $\forall\ x,y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}\ \ C(x,y) \in \mathrm{Ob}\mathbf{V}$,
- $\forall\ x,y,z \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}\ \ \mu_{x,y,z}\colon \mathbf{C}(y,z) \otimes \mathbf{C}(x,y) \to \mathbf{C}(x,z) \in \mathrm{Ar}\mathbf{V}$,
- $\forall\ x,y,z,w \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$,

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}(z,w)\otimes\mathbf{C}(y,z))\otimes\mathbf{C}(x,y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mu\otimes 1"'] & \mathbf{C}(z,w)\otimes(\mathbf{C}(y,z)\otimes\mathbf{C}(x,y)) \arrow[d, "1\otimes\mu"] \\
\mathbf{C}(w,y)\otimes\mathbf{C}(x,y) \arrow[d, "\mu"'] & \mathbf{C}(z,w)\otimes\mathbf{C}(x,z) \arrow[d, "\mu"] \\
\mathbf{C}(x,w) \arrow[r, "="'] & \mathbf{C}(x,w)
\end{tikzcd}$$

- $\forall$ x $\in$ Ob**C** $\exists$ u_X : I $\to$ **C**(x,x) $\in$ Ar**V** такая, что

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(x,y) & I \otimes \mathbf{C}(x,y) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "u_x \otimes 1"] \\ & \mathbf{C}(x,x) \otimes \mathbf{C}(x,y) \arrow[ul, "\mu"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{C}(z,x) & \mathbf{C}(z,x) \otimes I \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "1 \otimes u_x"] \\ & \mathbf{C}(z,x) \otimes \mathbf{C}(x,x) \arrow[ul, "\mu"] \end{tikzcd}$$

Хорошо известно, что обобщенные элементы объекта (все стрелки в этот объект) полностью восстанавливают его (через вложение Йонеды). Обобщенные элементы Hom-множества это тоже стрелки в данное Hom-множество, но только из множеств, несущих структуру объектов категории (из проекций объектов в **Set**), которые можно поднять в данную категорию. Обобщенные элементы в Hom-множествах абсолютно аналогичны непрерывно или гладко параметризованным семействам стрелок как в случае категорий **Top** или **Diff**. Они образуют почти объекты или почти структуры на Hom-множествах категории, так как являются определенными копределами объектов.

Определение 2. Допустим, что категория **C** имеет бинарные произведения и |-| : **C** $\to$ **Set** забывающий (инъективный) функтор в категорию множеств. Тогда **Set**-отображение f : |Z| $\to$ **C**(X,Y), Z $\in$ Ob**C** называется обобщенным (или допустимым) элементом Hom-множества **C**(X,Y) с областью определения |Z|, если стрелка $\bar{f} \circ \gamma_Z$ может быть поднята в категорию **C:**

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(X,Y) \times |X| \arrow[r, "ev"] & |Y| \\ |Z| \times |X| \arrow[u, "f\times 1"] \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \\ |Z \times X| \arrow[u, "\gamma_Z"] & \end{tikzcd}$$

где γ_Z – опосредующая стрелка в произведение, ev(g,x) := |g|(x).

Обозначим через G(|Z|,**C**(X,Y)) $\hookrightarrow$ **Set**(|Z|,**C**(X,Y)) подмножество обобщенных элементов Hom-множества **C**(X,Y) с областью определения |Z|.

***Утверждение* 1**. Функция Z $\mapsto$ G(|Z|,**C**(X,Y)) расширяется до функтора

G(|-|,**C**(X,Y)) : $\mathbf{C}^{op}$ $\to$ **Set**.

Доказательство

Допустим, α: Z′$\to$ Z -- некоторая стрелка, f $\in$ G(|Z|,**C**(X,Y)) – обобщенный элемент. Нужно показать, что $f \circ \alpha \in$ G(|Z′|,**C**(X,Y)) также обобщенный элемент, то есть, что существует стрелка h : Z′× X $\to$ Y , такая, что $|h| = ev \circ (f \times 1) \circ (\alpha \times 1) \circ \gamma_{Z'} = \bar{f} \circ (\alpha \times 1) \circ \gamma_{Z'}$.

Поскольку γ_Z : |Z×X|$\to$|Z|×|X| – естественное преобразование по аргументу *Z*, имеем

$$\begin{tikzcd} |Z' \times X| \arrow[r, "\gamma_{Z'}"] \arrow[d, "|\alpha \times 1|"'] & |Z'| \times |X| \arrow[d, "|\alpha| \times |1|"] & \\ |Z \times X| \arrow[r, "\gamma_Z"'] & |Z| \times |X| \arrow[r, "\bar{f}"'] & |Y| \end{tikzcd}$$

Требованием теперь будет существование такой стрелки *h*: *Z*′× *X* $\to$ *Y*, что

$|h| = \tilde{f} \circ \gamma_Z \circ |\alpha \times 1|$. Поскольку f – обобщенный элемент, существует стрелка

g: $Z \times X \to Y$, такая что $|g| = \tilde{f} \circ \gamma_Z$. Поэтому, берем $h := g \circ (\alpha \times 1)$.

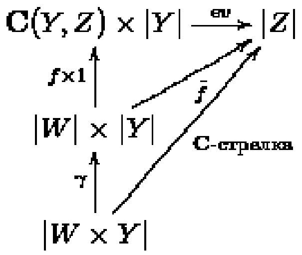
Утверждение 2. Если |-|: **C** → **Set** – инъективный функтор, сохраняюющий бинарные произведения, тогда категория **C** является обогащенной обобщенными элементами в категории предпучков $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$.

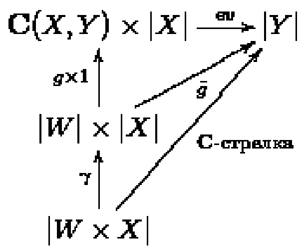
Доказательство

- $\forall$ X,Y $\in$ Ob**C** $(G(|\text{-}|,\mathbf{C}(X,Y)) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$,
- $\forall$ X,Y,Z $\in$ Ob**C** возьмем $\mu_{X,Y,Z} : G(|\text{-}|,\mathbf{C}(Y,Z)) \otimes G(|\text{-}|,\mathbf{C}(X,Y)) \to G(|\text{-}|, \mathbf{C}(X,Z))$ так, что $\forall$ W $\in$ Ob**C** $\mu_{X,Y,Z;W}(f,g) := \mu_{X,Y,Z}^{\mathbf{C}} \circ < f,g >$,

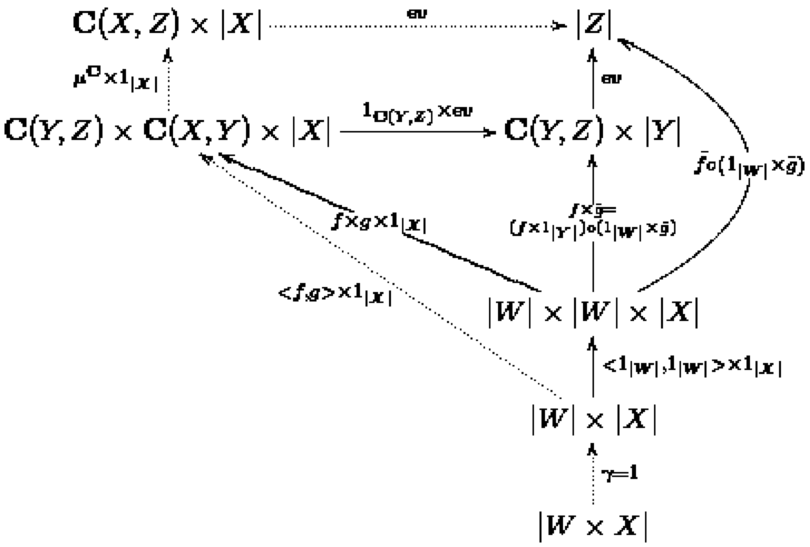
где $\mu_{X,Y,Z}^{\mathbf{C}} : \mathbf{C}(Y,Z)\times\mathbf{C}(X,Y) \to \mathbf{C}(X,Z)$ это композиция в **C**, $< f,g >: |W| \to \mathbf{C}(Y,Z)\times\mathbf{C}(X,Y)$ – опосредующая стрелка в произведение. $\mu_{X,Y,Z;W}$ натуральна в W, так как $(\mu_{X,Y,Z}^{\mathbf{C}} \circ < f,g >) \circ |h| = \mu_{X,Y,Z}^{\mathbf{C}} \circ < f \circ |h|, g \circ |h| >$ для $h : W' \to W$.

Почему стрелка $ev \circ ((\mu^{\mathbf{C}} \circ < f,g >) \times 1) \circ \gamma$ может быть поднята в **C**? По условию





Достаточно взять γ = 1.



Требуемая пунктирная стрелка $ev \circ ((\mu^{\mathbf{C}} \circ < f,g >) \times 1_{|X|}) \circ \gamma$ поднимается в **C,** поскольку самый правый путь $\tilde{f} \circ (1_{|W|}\times\tilde{g}) \circ (< 1_{|W|}, 1_{|W|} > \times 1_{|X|}) \circ 1_{|W\times X|}$ поднимается (для этого берем поднятия для $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ и единичные стрелки для единичных стрелок):

- (ассоциативность) $\forall$ f, g, h таких, что $f : |W| \to \mathbf{C}(Z,Z')$, $g : |W| \to \mathbf{C}(Y,Z)$, $h:|W|\to\mathbf{C}(X,Y)$ $\mu_{X,Z,Z'}^{\mathbf{C}} \circ < f, \mu_{X,Y,Z}^{\mathbf{C}} \circ < g,h >> = \mu_{X,Y,Z'}^{\mathbf{C}} \circ < \mu_{Y,Z,Z'}^{\mathbf{C}} \circ < f,g >, h >$, потому что это равенство выполняется для каждого элемента $w \in |W|$;

- (единицы) $\forall\ X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ берем $u_{X;W} : \mathbf{1} \to \mathbf{Set}(|W|,\mathbf{C}(X,X)) : * \mapsto (w \mapsto 1_X)$. Эта стрелка естественна в W и $\forall$ f, g таких, что $f : |W| \to \mathbf{C}(X,Y)$, $g : |W| \to \mathbf{C}(Z,X)$ требуемые уравнения выполняются $\mu^{\mathbf{C}} \circ \langle f,u_{X;W} \rangle (w) = \mu^{\mathbf{C}}(f(w), 1_X) = f(w)$, $\mu^{\mathbf{C}} \circ \langle u_{X;W}, g \rangle (w) = \mu^{\mathbf{C}}(1_X, g(w)) = g(w)$, $w \in |W|$.

Утверждение 3. Имеет место изоморфизм предпучков $G(|\text{-}|,\mathbf{C}(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(X \times \text{-}, Y)$.

Доказательство

Рассмотрим диаграмму, определяющую обобщенный элемент *f*:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(Y,Z) \times |Y| \arrow[r, "ev"] & {|Z|} \\
{|W| \times |Y|} \arrow[u, "f\times 1"] \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \\
{|W \times Y|} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[uur, "\text{С-стрелка } |F|"'] &
\end{tikzcd}$$

Каждой стрелке $F: W{\times}Y \to Z$ биективно соответствует стрелка $|F|$ (поскольку забывающий функтор инъективен, а $|F|$ поднимаемая в C по определению обобщенного элемента). Стрелке $|F|$ биективно соответствует $\bar{f}$ и потом f (поскольку γ – изоморфизм для забывающего функтора, сохраняющего произведения и **Set** – декартово-замкнутая категория). Все соответствия естественны, так как γ естественна в W, и соответствие между сопряженными стрелками естественное.

Из последнего предложения сразу следует, что наличие забывающего функтора, сохраняющего бинарные произведения, является излишним требованием, и (ослабленным) решением задачи обогащения Hom-множеств почти объектами категории с бинарными произведениями оказывается (ожидаемое) соответствие $\mathbf{C}(X,Y) \mapsto \mathbf{C}(X \times \text{-}, Y)$, а, например, не $\mathbf{C}(X,Y) \mapsto \mathbf{C}(X \coprod \text{-}, Y)$ в случае существования копроизведения (хотя, конечно, $\mathbf{C}(X \coprod \text{-}, Y)$ тоже предпучок).

1.1. Почти структуры

Чтобы лучше прослеживалась связь с почти структурами Б.П. Комракова [1], которые представляют и самостоятельный интерес, приведем определение структуры на объектах категории (правильно отражающее алгебраические и топологические структуры на множестве, гладкие структуры на топологическом пространстве и т.д.).

Определение 3. Структура типа **E** на объектах категории **B** это инъективеный функтор $\begin{array}{c}\mathbf{E}\\ \downarrow{\scriptstyle p}\\ \mathbf{B}\end{array}$, который

- допускает подъем изоморфизмов типа $f : B' \xrightarrow{\sim} p(E)$ (или, то же самое, $f : p(E) \xrightarrow{\sim} B'$);
- каждый слой $\mathbf{E}_B$ скелетален (то есть каждый класс изоморфных объектов состоит из одного объекта).

Утверждение 4. Для каждой структуры $\begin{array}{c}\mathbf{E}\\ \downarrow{\scriptstyle p}\\ \mathbf{B}\end{array}$ типа **E** на объектах категории **B**

- существует вложение i_p :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[d, "p"'] \\ \mathbf{B} \arrow[r, hook] & \mathbf{Set}^{\mathbf{E}^{op}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E \\ p(E) \end{pmatrix} \mapsto p(\mathbf{E}(-,E)) & \textit{на объектах} \\ \begin{pmatrix} v \\ p(v) \end{pmatrix} \mapsto p(\mathbf{E}(-,v)) & \textit{на стрелках} \end{cases}$$

- $p(E(-,E)) \hookrightarrow \mathbf{B}(p(-),p(E)) : \mathbf{E}^{op} \to \mathbf{Set}$ (Hom-подфунктор)

Доказательство

Функториальность и инъективность очевидны (см. также [1, 4]). Это означает, что каждая структура **E** на объектах категории **B** точно представима специфической подкатегорией **B**-Hom-подфункторов (в которой достаточно взять стрелки только типа $f \circ -$).

Вопрос, может ли объект $E \in \mathrm{Ob}\mathbf{E}$ быть восстановлен из функтора $F \hookrightarrow \mathbf{B}(p(-),p(E))$, имеет в общем отрицательный ответ. В том случае, когда это возможно, он восстанавливается единственным образом. Но даже если это невозможно, подфунктор $F \hookrightarrow \mathbf{B}(p(-),p(E))$ ведет себя как объект в **E**.

Определение 4

- Произвольный подфунктор $F \hookrightarrow \mathbf{B}(p(-),B) : \mathbf{E}^{op} \to \mathbf{Set}$ называется почти-**E** структурой над объектом $B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B}$.
- Категория $\begin{matrix} A\mathbf{E} \\ \downarrow \\ \mathbf{B} \end{matrix}$ с объектами $\begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix}$, $B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B}$, $F \hookrightarrow \mathbf{B}(p(-),B)$ и морфизмами $\begin{pmatrix} f \circ - \\ f \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{B}(p(-), f) \\ f \end{pmatrix}$, где $f : B \to B'$, называется категорией почти-**E** структур над **B**.
- Почти-**E** коструктура над $B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B}$ это подфунктор $F' \hookrightarrow \mathbf{B}(B,p(-)) : \mathbf{E} \to \mathbf{Set}$ [почти коструктуры не являются двойственными к почти структурам, все вместе они ведут себя ковариантно].
- Категория $\begin{matrix} A'\mathbf{E} \\ \downarrow \\ \mathbf{B} \end{matrix}$ с объектами $\begin{pmatrix} F' \\ B \end{pmatrix}$, $B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B}$, $F' \hookrightarrow \mathbf{B}(B,p(-))$ и морфизмами $f\colon \begin{pmatrix} F' \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F'_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$, такими, что $f\colon B \to B_1 \in \mathrm{Ar}\mathbf{B}$ и $\forall\, E_1 \in \mathrm{Ob}\mathbf{E}\ \forall\, g \in \mathbf{B}(B_1,p(E_1))\ \ g \circ f \in \mathbf{B}(B,p(E_1))$, называется категорией почти-**E** коструктур над **B**.

Пример

Возьмем $\mathbf{Poly}(E_1,E_2,\ldots,E_n; -) \hookrightarrow \mathbf{Set}(p(E_1\times\ldots\times E_n),p(-)) : \mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$, подфунктор полилинейных отображений. Тогда $\mathbf{Poly}(+,+,\ldots, +;-) : \mathbf{Vect}^n \to \mathbf{Set}^{\mathbf{Vect}}$ определяет подкатегорию почти-**Vect** коструктур над $(p \circ (\times^n))(\mathbf{Vect}^n) \hookrightarrow \mathbf{Set}$ (где $p : \mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор).

Утверждение 5. Для структуры типа E на B $\begin{matrix} \mathbf{E} \\ {\scriptstyle p}\downarrow \\ \mathbf{B} \end{matrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{AE} \arrow[d] \\ \mathbf{B} \end{tikzcd}$$ – расслоение и $$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[d, "p"'] & \mathbf{AE} \arrow[d] \\ \mathbf{B} \arrow[r, hook] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$ – подкатегория.

Доказательство

- Если $\begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix} \in \mathrm{Ob} \begin{tikzcd} \mathbf{AE} \arrow[d] \\ \mathbf{B} \end{tikzcd}$ и f : B′ → B, возьмем f * F := {g : p(X) → B′ | X ∈ Ob**E**, f ∘ g ∈ F(X) ⊂ **B**(p(X),B)}. Тогда

  f * F ↪ **B**(p(−),B′) – подфунктор, и $\begin{pmatrix} f^*F \\ B' \end{pmatrix} \xrightarrow[f]{f\circ -} \begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix}$ – декартов морфизм над f

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[dr, dashed, "k\circ -"'] \arrow[drr, "f\circ k\circ -"] & & \\ & f^*F \arrow[r, "f\circ -"'] & F \\ B'' \arrow[dr, "k"'] \arrow[drr, "f\circ k"] & & \\ & B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Назначение дает требуемое вложение:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E \\ p(E) \end{pmatrix} \mapsto p(\mathbf{E}(-,E)) \hookrightarrow \mathbf{B}(p(-),p(E)) & \text{на объектах} \\ \begin{pmatrix} v \\ p(v) \end{pmatrix} \mapsto p(\mathbf{E}(-,v)) = \mathbf{B}(p(-),p(v)) & \text{на стрелках} \end{cases}$$

С позиции почти структур (в уточненном ранее смысле) в утверждении 2 устанавливается специфическое обогащение категории почти структурами над категорией множеств **Set**, потому что G(|-|,**C**(X,Y)) ↪ **Set**(|-|,**C**(X,Y)).

Иногда полезно рассматривать обогащение категории **D** предпучками обобщенных элементов с областями определения в другой категории **C**. В этом случае назовем **D** А**C**-категорией. Так, например, в категорной конструкции локально-тривиальных векторных расслоений оказывается естественным обогащать категорию линейных топологических пространств **VectTop** в категории топологических пространств **Top** (см. [4]).

Все обычные конкретные категории, такие как **Top**, **Grp**, **Rng** и т.д., несут соответствующие почти структуры, которые в некоторых случаях могут быть структурами.

Пример (*компактно-открытая топология* [1])

Утверждение 6. Если *X* локально компактное топологическое пространство (так что семейство Т топологий на **Top**(*X*,*Y*), для которых отображение взятия значения ev : **Top**(*X*,*Y*) × |X| → |Y| непрерывно, непусто и содержит минимальный элемент, компактно-открытую топологию на **Top**(X,Y)), тогда τ ∈ Т – компактно-открыта, если и только если ∀ Z ∈ Ob**Top** каждый обобщенный элемент f : |Z| → **Top**(X,Y) непрерывен.

Доказательство

” ⇒ ” Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Top}(X,Y) \times |X| \arrow[r, "ev"] & |Y| \\ |Z| \times |X| \arrow[u, "f\times 1"] \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Мы хотим показать, что отображение *f* : |Z|→ **Top**(*X*,*Y*) непрерывно (с компактно-открытой топологией в $\mathbf{Top}(X,Y)$), если отображение $\bar{f}: |Z|\times|X|\to|Y|$ непрерывно, то есть что $\forall\ z \in |Z|\ \forall$ (предбазового) компактно-открытого множества $U^K \ni f(z)\ \exists$ окрестность $V \ni z$, такая, что $f(V) \subset U^K$. Это эквивалентно тому, что $\forall\ z \in |Z|\ \forall\ U^K \ni f(z)\ \exists\ V \ni z$, такая, что $\bar{f}(V \times K) \subset U$. Поскольку $\bar{f}$ непрерывно $\forall\ (z,x) \in \{z\}\times K$ и $\forall$ открытого множества $U \ni \bar{f}(z,x)$ $\exists$, открытая окрестность $V_z \times W_x \ni (z,x)$, такая, что $\bar{f}(V_z \times W_x) \subset U$. $\cup_{x\in K}W_x \supset K$ (открытое покрытие). Поэтому, в силу компактности K, $\exists\ W_{x1},...,W_{xn}$, такие, что $\cup_{i=1}^{n} W_{xi} \supset K$. Возьмем $V := \cap_{i=1}^{n} (V_i)_z$, где $(V_i)_z$ соответствует W_{xi} (то есть $(V_i)_z$ открыто, $(V_i)_z \ni z$, $\bar{f}((V_i)_z \times W_{xi}) \subset U$). Тогда $\bar{f}(V \times K) \subset U$.

" $\Leftarrow$ " Возьмем пространство $Z = \mathbf{Top}(X,Y)$ с компактно-открытой топологией. Выберем в Hom-множестве $\mathbf{Top}(X,Y)$ (вверху диаграммы) не минимальную топологию $\tau \in T$, положим $f := 1 \in \mathrm{Ar}\mathbf{Set}$. Тогда $1 : \mathbf{Top}(X,Y) \to \mathbf{Top}(X,Y)$ является допустимым обобщенным элементом, поскольку ev непрерывно, но 1 не является непрерывным отображением.

Следовательно, для локально-компактного пространства X, почти-**Top** структура $G(|Z|,\mathbf{Top}(X,Y))$ совпадает с компактно-открытой топологией, то есть в действительности является **Top** структурой.

2. Продолжение функторов

Практическим следствием обогащения Hom-множеств предпучками обобщенных элементов является возможность продолжения на них функторов, чтобы определить на них структуры, привычные для объектов категории (как, например, аналог решетки, являющейся топологией для топологических пространств), развить определенную технику (например, касательный функтор и инфинитезимальное исчисление для гладких многообразий) и вычислить другие интересующие нас характеристики (например, группы (ко)гомологий и гомотопий). Однако следует иметь в виду, что если такие характеристики определяются не конепрерывным функтором (или хотя бы не коммутирующим с фильтрованными копределами), то они будут отличаться от классических, когда почти структура *совпадает* со структурой.

Из леммы Йонеды $\mathrm{Nat.Trans.}(\mathrm{Hom}(-,A),P) = \{a : \mathrm{Hom}(-,A) \to P \mid a \in P(A)\} \xrightarrow{\sim} P(A)$ сразу следует, что любой предпучок $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ является коконусом над диаграммой $\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$, где $\int_{\mathbf{C}} P$ – категория элементов предпучка P, состоящая из пар (A,a), $a \in P(A)$, со стрелками из **C**, сохраняющими отмеченные элементы, π – функтор, забывающий отмеченные элементы. На самом деле этот коконус является универсальным (то есть копределом представимых функторов).

Утверждение 7

- Для каждого предпучка $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ выполняется $P = \mathrm{Colim}(\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi} \mathbf{C} \xrightarrow{y_{\mathbf{C}}} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}})$, где $y_{\mathbf{C}}$ – вложение Йонеды категории **C**;
- Вложение Йонеды $y_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ является универсальным копополнением **C**, то есть $\forall$ $F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$, где **E** – кополная категория (все копределы существуют), $\exists!$ (с точностью до изоморфизма) конепрерывный функтор $\bar{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathbf{E}$ такой, что

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[r, dashed, "\bar{F}"] & \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \arrow[u, "y_{\mathbf{C}}"] \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

- $\bar{F}(P) =$ Colim($\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi} \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{E}$), где $P \in \mathrm{Ob}\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$, $\int_{\mathbf{C}} P$ – категория элементов P, π – естественная проекция;
- $$\begin{tikzcd} \mathbf{Cat} \arrow[r, bend left, "\mathbf{Set}^{(-)^{op}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Cocomp} \arrow[l, bend left, "\text{забывающий}"] \end{tikzcd}$$ – сопряжение между **Cat** и ее полной подкатегорией кополных категорий **Cocomp** с вложением Йонеды $y_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ в качестве единицы;
- Каждый функтор F : **C** → **D** допускает единственное (с точностью до изоморфизма) конепрерывное расширение $\bar{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{D}^{op}}$ такое, что $$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[r, dashed, "\bar{F}"] & \mathbf{Set}^{\mathbf{D}^{op}} \\ \mathbf{C} \arrow[u, "y_{\mathbf{C}}"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{D} \arrow[u, "y_{\mathbf{D}}"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство см. в [6, 7].

Примеры

1. *Квазитопология на пространстве отображений*. Рассмотрим конепрерывный контравариантный представимый функтор **Top**(−,S) : **Top** → **Lat** : $X \mapsto \tau_X$, где S – пространство Серпинского (состоящее из двух точек, одна из которых открыта, другая нет), принимающий значения в категории решеток **Lat** и назначающий топологическому пространству X его топологию τ_X. Тогда Hom-множеству **Top**(X,Y), как несущему почти топологическую структуру G(|−|,**Top**(X,Y)), сопоставляется (однозначно с точночтью до изоморфизма) решетка $\tau_{\mathbf{Top}(X,Y)}$ в **Lat**, которая может быть названа *квазитопологией* на множестве **Top**(X,Y). $\tau_{\mathbf{Top}(X,Y)} = \mathrm{Lim}(\int_{\mathbf{Top}} G(|-|,\mathbf{Top}(X,Y)) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Top} \xrightarrow{\mathbf{Top}(-,S)} \mathbf{Lat})$.

Лемма 1. Для локально компактного топологического пространства X предпучок обобщенных элементов G(|−|,**Top**(X,Y)) представим пространством **Top**(X,Y) с компактно-открытой топологией. При этом $\mathbf{Top}(X,Y) = \mathrm{Colim}(\int_{\mathbf{Top}} G(|-|,\mathbf{Top}(X,Y)) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Top})$.

Доказательство первой части леммы сразу следует из утверждения 6. Формула следует из утверждения 7 и того факта, что универсальный коконус для G(|−|,**Top**(X,Y)) состоит по существу из обобщенных элементов, которые в этом случае являются стрелками в **Top**.

Утверждение 8. Квазитопология $\tau_{\mathbf{Top}(X,Y)}$, сопоставляемая предпучку G(|−|,**Top**(X,Y)) с локально-компактным X, является компактно-открытой топологией, равной $\tau_{\mathbf{Top}(X,Y)} = \mathrm{Lim}(\int_{\mathbf{Top}} G(|-|,\mathbf{Top}(X,Y)) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Top} \xrightarrow{\mathbf{Top}(-,S)} \mathbf{Lat})$.

Доказательство следует из леммы 1 и утверждения 7.

Замечание. Хотя формула из утверждения 7 (пункт 3) позволяет продолжать любые функторы со значением в кополной категории на предпучки из $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$, в случае когда предпучок представимый (то есть по существу объект категории C) значения функтора на предпучке и соответствующем объекте, вообще говоря, не изоморфны $\bar{F}(\mathbf{C}(-,C)) \not\simeq F(C)$ (это просто отражает факт, что не все функторы коммутируют с копределами). Для того чтобы они были изоморфны достаточно, чтобы функтор F коммутировал с фильтрованными копределами в **C**, потому что категория элементов представимого предпучка $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(-,C)$, над которой берется копредел, содержит конечный элемент $1 = C \xrightarrow{1_C} C$, и, следовательно, фильтрованная, а каждый объект C ∈ Ob**C** в любой категории **C** является фильтрованным копределом своих обобщенных элементов. При обогащении Hom-множеств категории **C** обобщенными элементами с целью вычислить какие-то характеристики этих Hom-множеств, в случае, когда предпучок обобщенных элементов представим $G(|-|,\mathbf{C}(X,Y)) \simeq \mathbf{C}(-,C)$ (то есть, когда почти структура является структурой), а функтор F не коммутирует с фильтрованными копределами (как, например, функтор сингулярных гомологий и когомологий в **Top**), мы получим две разные характеристики объекта. Поэтому, для категорий **C**, в которых обогащение приводит иногда к объектам этой категории (как в **Top**), важно, чтобы ‘функторы характеристик’ коммутировали с фильтрованными копределами. В остальных случаях, когда это не так или неизвестно, формулу $F(P) = \mathrm{Colim}(\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi} \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{E})$ использовать можно (по крайней мере, даже в случае совпадения почти структуры со структурой, она всегда дает некоторый объект F(**C**(−,C)) с опосредующей стрелкой из ‘правильной характеристики’ в него F(C) → F(**C**(−,C))).

2. *Дифференциальное исчисление на пространстве (гладких) отображений*. Пусть ℝ-**Alg**, ℝ-Λ-**Alg** – категории соответственно (гладких) алгебр и внешних дифференциальных алгебр над ℝ, Λ : ℝ-**Alg** → ℝ-Λ-**Alg** – функтор взятия свободной внешней дифференциальной алгебры (левый сопряженный к забывающему функтору p_0 : ℝ-Λ-**Alg** → ℝ-**Alg**, выделяющему алгебру элементов степени 0) [5]. Как левый сопряженный, Λ конепрерывен.

Сопоставим канонически:

ℝ-спектру алгебры $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ внешнюю дифференциальную алгебру $\bar{\Lambda}(\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}(\mathcal{A},\mathbb{R})) = \mathrm{Colim}\left(\int_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}} G(|-|,\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}(\mathcal{A},\mathbb{R})) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg} \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{R}\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}\right)$,

множеству отображений $\mathbb{R}$ -спектров $\mathbb{R}$ -Alg($\boldsymbol{\mathcal{A}}$,$\mathbb{R}$) в $\mathbb{R}$ -Alg($\boldsymbol{\mathcal{B}}$,$\mathbb{R}$) внешнюю дифференциальную алгебру $\bar{\Lambda}(\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}(\mathcal{B},\mathcal{A})) = \mathrm{Colim}\left(\int_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}} G(|-|,\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}(\mathcal{B},\mathcal{A})) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg} \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{R}\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}\right)$.

Здесь под гладкой алгеброй понимается алгебра, замкнутая относительно гладких операций. Существует левый сопряженный функтор из категории $\mathbb{R}$-**Alg** на подкатегорию гладких алгебр, пополняющий алгебру до гладкой [5]. Однако конструкция имеет смысл и в негладком случае. Также можно заменить поле $\mathbb{R}$ произвольным коммутативным кольцом R.

3. *Когомологии пространств решений дифференциальных уравнений*. Пусть $\mathbb{R}$-Λ-**Alg** обозначает здесь категорию *гладких* внешних дифференциальных алгебр (представляющую категорию гладких дифференциальных уравнений), $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ обозначает алгебру гладких дифференциальных форм на $\mathbb{R}^n$ (представляющую пространство параметров). Множеством решений диффференциального уравнения $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ∈ Obℝ-Λ-**Alg** является ℝ-Λ-**Alg**($\boldsymbol{\mathcal{D}}$, Λ($\mathbb{R}^n$)) [5].

Имеются очевидные функторы CoCh : ℝ-Λ-**Alg** → CoCh(ℝ-**Vect**) и H^m : CoCh(ℝ-**Vect**) → ℝ-**Vect** (первый забывает структуру алгебры и оставляет структуру коцепного комплекса векторных пространств над ℝ, второй сопоставляет комплексу его пространство когомологий в размерности m). Тогда когомологии пространства решений ℝ-Λ-**Alg**($\boldsymbol{\mathcal{D}}$, Λ($\mathbb{R}^n$)) могут быть вычислены по (той же) формуле H^m(ℝ-Λ-**Alg**($\boldsymbol{\mathcal{D}}$, Λ($\mathbb{R}^n$))) = $\mathrm{Colim}\int_{\mathbb{R}\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}}$ G(|−|,ℝ-Λ-**Alg**($\boldsymbol{\mathcal{D}}$, Λ($\mathbb{R}^n$)) $\xrightarrow{\pi}$ ℝ-Λ-**Alg** $\xrightarrow{H^m}$ ℝ-**Vect**).

Если превратить алгебру параметров Λ($\mathbb{R}^n$) в топологическую алгебру, введя на ней, например, jet-топологию, тогда множество решений дифференциального уравнения ℝ-Λ-**Alg**($\boldsymbol{\mathcal{D}}$,Λ($\mathbb{R}^n$)), естественно, наделяется начальной топологией (то есть наименьшей, в которой все элементы алгебры $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ становятся непрерывными функциями на множестве решений). Как реальные когомологии пространства решений относятся к введенным ранее неизвестно.

Иногда нужно немного изменить определение 2 обобщенного элемента, чтобы получить «правильный» предпучок, обогащающий Hom-множество (или некоторое его подмножество). Это осуществляется ограничением предпучка обобщенных элементов на подходящую подкатегорию объектов и стрелок.

4. *Функтор Ли и алгебра инвариантных форм на* **Aut**(*X*). Пусть $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{Diff}$ – гладкое многообразие, $\mathbf{LieGrp} \hookrightarrow \mathbf{Diff}$ – (неполная) подкатегория групп Ли в категории гладких многообразий.

Рассмотрим предпучок $\mathbf{Act}(|-|,\mathbf{Aut}(X)) : \mathbf{LieGrp}^{op} \to \mathbf{Set}$, назначающий каждой группе Ли G множество всех ее гладких действий на многообразии *X* и каждому гомоморфизму групп Ли H → G очевидную замену действий группы *G* на действия группы *H*. Этот предпучок не представим, поскольку **Aut**(*X*) не является группой Ли. Это дает возможность однозначно и корректно определить алгебру Ли и алгебру левоинвариантных форм на **Aut**(*X*).

Пусть $\mathrm{Lie} : \mathbf{LieGrp} \to \mathbf{LieAlg}$ и $\Lambda_{inv} : \mathbf{LieGrp} \to \mathbb{R}\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}$ – функторы, назначающие соответственно алгебру Ли левоинвариантных векторных полей и алгебру левоинвариантных дифференциальных форм на группе Ли. Тогда группе автоморфизмов гладкого многообразия *X* соответствуют алгебра Ли

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{Aut}(X)) := \mathrm{Colim}(\textstyle\int_{\mathbf{LieGrp}} \mathbf{Act}(|-|,\mathbf{Aut}(X)) \xrightarrow{\pi} \mathbf{LieGrp} \xrightarrow{\mathrm{Lie}} \mathbf{LieAlg})$$

и внешняя дифференциальная алгебра

$$\Lambda_{inv}(\mathbf{Aut}(X)) := \mathrm{Lim}(\textstyle\int_{\mathbf{LieGrp}} \mathbf{Act}(|-|,\mathbf{Aut}(X)) \xrightarrow{\pi} \mathbf{LieGrp} \xrightarrow{\Lambda_{inv}} \mathbb{R}\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}).$$

Замечания

1.Поскольку мы используем одну и ту же формулу копредела, чтобы не повторяться, просто укажем, что любые фукторы могут быть распространены на Hom-множества тем же самым способом (например, касательный функтор на гладких многообразиях или функтор гомологий на топологических пространствах). В том случае, когда категория значений **D** функтора не кополная (как для касательного функтора), его нужно продолжить вложением Йонеды $y_{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{D}^{op}}$. Как конкретно вычислять эти копределы, мы здесь не рассматриваем (автор пробовал вычислять в соответствии с определением группы гомологий пространства отображений окружности в себя $\mathbf{Top}(S^1,S^1)$ над малой декартовой категорией, порожденной сферами положительной размерности, и получил $H_0(\mathbf{Top}(S^1,S^1)) = H_1(\mathbf{Top}(S^1,S^1)) = \ldots + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \ldots$(суммирование над $\mathbb{Z}$) и нули в остальных размерностях).

2.(Ко)пределы обычно определяются над малыми диаграммами (области определения которых множества), а во всех приведенных примерах диаграммы большие (над классами). Это может привести к тому, что (ко)предельный объект будет нести структуру класса, а не множества. Чтобы выйти из данного затруднения, следует либо разрешить большие объекты, рассматриваемые в большем универсуме, либо ограничить рассмотрение подходящими малыми подкатегориями (замкнутыми относительно бинарного умножения), по которым берется копредел.

Заключение

Приведенная конструкция обогащения является естественным обобщением обогащения, применяемого в декартово-замкнутых категориях (которых не так много) на декартовы категории (все обычные категории в математике декартовы). Конструкция позволяет продолжать функторы на Hom-множества, перенося на них технику, используемую на объектах. Важной особенностью конструкции, не представленной как отдельное свойство в этой статье, является возможность ослабления структуры объектов (это особенно важно для ослабления структуры категории). Автор надеется в этом контексте получить структуру слабой бесконечномерной категории.

Библиографический список

1. **Комраков, Б.П.** Структуры на многообразиях и однородные пространства / Б.П. Комраков. – Минск, 1978.
2. **Kelly, G.M.** Basic concepts of enriched category theory, Cambridge University Press, 1982.
3. **Borceux, F.** Handbook of Categorical Algebra 2. Categories and Structures, Cambridge University Press, 1994.
4. **Kondratiev, G.V.** Manifolds, Structures Categorically, ArXiv:math.CT/0608503. 2006. – 38 p.
5. **Kondratiev, G.V.** Strict Infinity Categories. Concrete Duality, ArXiv:math.CT/0807.4256v1. 2008. – 50 p.
6. **Maclane, S.** Categories for the working mathematician, Springer-Verlag, 1971.
7. **MacLane, S.** I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer-Verlag, 1992.
8. **Weibel, C.A.** An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, 1994.

Дата поступления
в редакцию 06.07.2012

G.V. Kondratiev

CANONICAL ENRICHED CATEGORIES IN THE CATEGORY OF PRESHEAVES OF SETS

University of Sao Paulo, Brazil

A canonical enrichment of a category with binary products in the presheaf category of sets is discussed. It is the next step when the category is cartesian but not cartesian-closed and its Hom-sets are not objects in the category. Since cartesian-closed categories are quite rare and everyday categories in Mathematics are just Cartesian there is a need for this enrichment to be able to treat Hom-sets as the objects. As a presheaf a Hom-set becomes a colimit of representables being its parametrizations and reparametrizations in the usual sense, that is Hom-sets become colimits of the objects of the category (or almost-objects of the category) and, in particular, cocontinuous functors return their `classical' characteristics which they should have. It can happen that these almost-objects do belong to the category, like compact-open topology in the category of topological spaces. In the examples, a quasitopology on Hom-sets in the category of topological spaces, Lie functor on Aut(X) in the category of differential manifolds, cohomology of solution spaces of differential equations are considered. The relationship of this enrichment with almost-structures by B.P. Komrakov is also discussed.

Key words: category, presheaf, colimit, quasiobjects.