

УДК 537.86

Н.В. Асеева, Е.М. Громов, В.В. Тютин

## СТАБИЛИЗАЦИЯ СОЛИТОНОВ В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ВЫНУЖДЕННЫМ РАССЕЯНИЕМ РАМАНА И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ДИСПЕРСИИ И НЕЛИНЕЙНОСТИ

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

**Цель работы:** Исследована динамика солитонов огибающей в рамках расширенного уравнения Шредингера  $2i\left(\frac{\partial U}{\partial t} + V_g^L \frac{\partial U}{\partial x}\right) + q(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\alpha(x)U|U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial x} = 0$ , при учете нелокальной нелинейности (вынужденное пространственное рассеяние Рамана)  $\mu$ , и при учете пропорциональности неоднородностей дисперсии второго порядка  $q(x)$  и кубичной нелинейности (фазовой само – модуляции)  $\alpha(x)$ . Так же учтено движение линейных волн с групповой скоростью  $V_g^L$ .

**Научный подход:** Исследование проведено как численно, так и аналитически. В аналитической теории замкнутую систему шести интегралов исходного модельного уравнения удалось свести к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой анализировалась структура фазового пространства.

**Результат:** Показано, что смещение волнового числа в длинноволновую область, обусловленное индуцированным рассеянием Рамана может компенсироваться пропорционально возрастающими линейной дисперсией и кубичной нелинейностью, приводящим к смещению волнового числа вверх по спектру. В режиме баланса индуцированного рассеяния и возрастающих дисперсии и нелинейности аналитически найден новый класс стационарных нелинейных локализованных волновых пакетов (солитонов), распространяющихся в неоднородных средах с постоянной скоростью и сохраняющих свою форму. Аналитически найден режим динамического равновесия индуцированного рассеяния и неоднородности среды при котором параметры солитона (волновое число, амплитуда и протяженность) меняются периодическим образом. В численном счете показано совпадение аналитических и численных результатов: подтверждено существование всех указанных режимов равновесия и подтверждена устойчивость соответствующих солитонов.

**Новизна:** Результаты исследования новы и могут иметь практическое приложение для оптических волоконных линий связи с пространственным индуцированным рассеянием Рамана, переменной дисперсией второго порядка и переменной фазовой само модуляции.

*Ключевые слова:* расширенное нелинейное уравнение Шредингера, солитон, пространственное вынужденное рассеяние Рамана, неоднородность, линейная дисперсия второго порядка, кубичная нелинейность, аналитическое исследование, численный эксперимент.

### Введение

Интерес к солитонам обусловлен возможностью их распространения на значительные расстояния с сохранением своей формы и переноса энергии и информации без значительных потерь. Солитонные решения возникают во многих нелинейных моделях различных областей физики при исследовании распространения интенсивных волновых полей в нелинейных диспергирующих средах: оптических импульсов в волоконных линиях связи, электромагнитных волн в плазме, поверхностных волн на воде [1–4].

Распространение высокочастотных волновых пакетов достаточно большой протяженности корректно описывается во втором приближении теории дисперсии нелинейных волн. Базовым модельным уравнением в этом приближении является хорошо известное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [5, 6], включающее как линейную дисперсию второго порядка, так и фазовую само модуляцию (кубичную нелинейность). Солитонное решение в этом случае существует в результате баланса дисперсионного расплывания и нелинейного сжатия волнового пакета.

Динамика высокочастотных волновых пакетов малой протяженности корректно опи-

сывается уже не во втором, а в третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн, которое учитывает члены третьего порядка [4]: нелинейную дисперсию (самоукручение) [7], вынужденное рассеяние Рамана [8, 9] и линейную дисперсию третьего порядка. Базовым уравнением в этом приближении является нелинейное уравнение Шредингера третьего порядка (НУШ-3) [10–17]. В частности, в средах с неактивным рассеянием Рамана базовым уравнением является НУШ-3 без вынужденного рассеяния Рамана. В [14–20] найдено солитонное решение НУШ-3 без вынужденного рассеяния Рамана. Этот солитон является устойчивым и существует в результате баланса эффектов линейной дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии. В [21, 22] в НУШ-3 без дисперсию третьего порядка найдены стационарные волны перепада. Эти решения существуют в результате баланса эффектов нелинейной дисперсии и вынужденного рассеяния Рамана. Для локализованных нелинейных волновых пакетов (солитонов) учет вынужденного рассеяния Рамана приводит к смещению вниз спектра солитона [8, 9] и исчезновению устойчивости движущегося солитона.

Вынужденное рассеяние Рамана во временном представлении, описывающее запаздывание во времени нелинейного отклика среды, возникает за счет возбуждения моды колебания на частоте  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$  волновыми полями с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в атомарно-молекулярных системах. Вынужденное рассеяние Рамана приводит к сдвигу вниз частотного спектра солитона [8, 9]. Компенсация эффектов вынужденного рассеяния Рамана за счет излучения линейного волнового поля из ядра солитона рассматривалась в [23]. Компенсация вынужденного рассеяния Рамана в неоднородных средах была рассмотрена в следующих случаях: в средах с периодическим изменением дисперсии второго порядка [24]:

- в средах со смещенной точкой нулевой дисперсии второго порядка [25];
- оптических волокнах с уменьшающейся дисперсией [26].

Вынужденное рассеяние Рамана в пространственном представлении (пространственное вынужденное рассеяние Рамана), описывающее нелокальность нелинейного отклика среды, возникает за счет возбуждения моды пространственного колебания с волновым числом  $\chi = k_1 - k_2$  волновыми полями с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$ . Это имеет место, например, в кристаллических средах с внутренней пространственной неоднородностью. Пространственное вынужденное рассеяние Рамана приводит к сдвигу вниз спектра волнового числа солитона.

С другой стороны, неоднородность дисперсии второго порядка тоже приводит к изменению волнового числа волнового пакета [27]. В частности, в приближении геометрической оптики скорость изменения волнового числа в плавно неоднородной среде описывается

хорошо известным уравнением  $\dot{k} = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi}$ , где  $\omega = \omega(k, \xi)$  – закон изменения линейной дис-

персии. Для неоднородной дисперсии второго порядка  $q(\xi) = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$  скорость изменения

волнового числа пропорциональна градиенту дисперсии  $\dot{k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial q}{\partial \xi} \right) (k - k_0)^2$ , и при  $\frac{\partial q}{\partial \xi} > 0$

волновое число возрастает.

Баланс пространственного вынужденного рассеяния Рамана и возрастающей дисперсии второго порядка приводит к стабилизации спектра волнового числа солитона [28]. При

нелинейном дисперсионном соотношении  $\omega(k, \xi, |U|^2) = \omega(k) - \alpha(\xi)|U|^2$  ( $\alpha(\xi) = -\frac{\partial \omega}{\partial |U|^2}$  – па-

раметр фазовой самомодуляции) скорость изменения волнового числа пропорциональна гра-

диенту фазовой самомодуляции  $\dot{k} = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \right) |U|^2$ , и волновое число возрастает при  $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} > 0$ .

Равновесие пространственного вынужденного рассеяния Рамана и увеличивающейся фазовой само – модуляции тоже приводит к стабилизации спектра волнового числа солитона.

В данной работе рассмотрена динамика солитонов в нелинейных средах с дисперсией при учете пространственного вынужденного рассеяния Рамана и пропорционально возрастающих дисперсии второго порядка и фазовой само модуляции. Получено аналитическое солитонное решение как результат баланса пространственного вынужденного рассеяния Рамана и одновременно возрастающих дисперсии второго порядка и фазовой само модуляции. Аналитические результаты подтверждены в численном эксперименте.

### Базовое уравнение и его интегралы

Рассмотрим динамику высокочастотного волнового поля  $U(\xi, t)\exp(i\omega_0 t - ik_0 \xi)$  в рамках расширенного уравнения Шредингера с пространственным вынужденным рассеянием Рамана и неоднородностью как дисперсии второго порядка, так и фазовой само модуляции:

$$2i\left(\frac{\partial U}{\partial t} + V_g^L \frac{\partial U}{\partial x}\right) + q(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\alpha(x)U|U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где вследствие нелинейного дисперсионного закона  $\omega = \omega(k, |U|^2)$  использованы следующие обозначения:  $V_g^L = \partial\omega/\partial k$  – групповая скорость линейных волн;  $q = -\partial^2\omega/\partial k^2$  – параметр дисперсии второго порядка;  $\alpha = -\partial\omega/\partial(|U|^2)$  – параметр фазовой само модуляции;  $\mu$  – параметр пространственного вынужденного рассеяния Рамана.

В системе отсчета, движущейся с групповой скоростью линейных волн  $\xi = x - V_g^L t$ , уравнение (1) принимает вид

$$2i\frac{\partial U}{\partial t} + q(\xi + V_g^L t)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha(\xi + V_g^L t)U|U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) при нулевых граничных условиях на бесконечности  $U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$  имеет следующие интегралы:

– величина изменения «количества квантов» волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} K |U|^2 d\xi; \quad (3)$$

– величина изменения импульса волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} K |U|^2 d\xi = -\frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi}\right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} \left|\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} |U|^4 d\xi, \quad (4)$$

– величина изменения квадрата модуля градиента волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|^2 d\xi = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi}\right)^2 d\xi + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} K |U|^4 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha K \frac{\partial |U|^4}{\partial \xi} d\xi; \quad (5)$$

– величина изменения квадрата градиента интенсивности волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi}\right)^2 d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial^2 |U|^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial (K |U|^2)}{\partial \xi} d\xi; \quad (6)$$

– величина изменения квадрата интенсивности волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi = -2 \int_{-\infty}^{\infty} q|U|^2 \frac{\partial(K|U|^2)}{\partial \xi} d\xi; \quad (7)$$

– величина изменения «центра масс» волнового поля

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} qK|U|^2 d\xi; \quad (8)$$

где  $U = |U| \exp(i\varphi)$ ,  $K = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$  – добавочное локальное волновое число волнового пакета.

### Аналитические результаты

При аналитическом исследовании динамики волнового пакета предположим, что пространственный масштаб неоднородностей дисперсии второго порядка, фазовой самомодуляции и локального волнового числа  $K$  намного больше масштаба неоднородности огибающей волнового пакета  $L_{q,\alpha,K} \gg L_{|U|}$  и будем приближенно считать пространственное изменение волнового числа волнового пакета в окрестности «центра масс» волнового пакета  $\bar{\xi} = N^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi$  ( $N = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 d\xi$ ) линейной функцией  $K(\xi, t) = k(t) + k_1(t)(\xi - \bar{\xi})$ .

Тогда мы можем из мнимой части уравнения (2) при условии  $\left( \frac{\partial |U(\xi, t)|}{\partial \xi} \right)_{\bar{\xi}} = 0$  получить

$$k_1(t) = \left( \frac{\partial K(\xi, t)}{\partial \xi} \right)_{\bar{\xi}} = - \frac{2}{q(\bar{\xi}) |U(\bar{\xi}, t)|} \frac{\partial |U(\bar{\xi}, t)|}{\partial t}. \quad (9)$$

Пространственное изменение волнового числа солитона возникает из-за изменения амплитуды солитона во времени. Для солитоноподобных волновых пакетов  $N(t) \sim |U(\bar{\xi}, t)| \sqrt{\frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})}}$  при учете (3) и (8) мы имеем

$$K(\xi, t) = k(t) \left( 1 - \left( \frac{q'(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} + \frac{\alpha'(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right) (\xi - \bar{\xi}) \right) + V \frac{\alpha(\bar{\xi})}{q^2(\bar{\xi})} \left( \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right)' (\xi - \bar{\xi}), \quad (10)$$

где  $q'(\bar{\xi}) = \left( \frac{\partial q}{\partial \xi} \right)_{\bar{\xi}}$ ,  $\alpha'(\bar{\xi}) = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \right)_{\bar{\xi}}$ ,  $\left( \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right)' = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{q}{\alpha} \right) \right)_{\bar{\xi}}$ . Подставляя (10) в (3–8) мы получаем систему

$$\frac{dn}{dt} = q'(\bar{\xi})kn, \quad (11)$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\mu I_0}{2 N_0} \frac{i}{n} + \frac{1}{2} q'(\bar{\xi}) \frac{z}{n} + \frac{1}{2} \alpha'(\bar{\xi}) \frac{M_0}{N_0} \frac{m}{n} - q'(\bar{\xi})k^2, \quad (12)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\mu \frac{I_0}{N_0} ki + 2k\alpha'(\bar{\xi}) \frac{M_0}{N_0} m + kq'(\bar{\xi}) \frac{\alpha(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} \frac{M_0}{N_0} m - V \left( \frac{\alpha(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} \right)^2 \left( \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right)' \frac{M_0}{N_0} m, \quad (13)$$

$$\frac{di}{dt} = q'(\bar{\xi}) \left( 2 + 3 \frac{\alpha'(\bar{\xi})}{q'(\bar{\xi})} \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right) ki - 3V \frac{\alpha(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} \left( \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right)' i, \quad (14)$$

$$\frac{dm}{dt} = k q'(\bar{\xi}) \left( 2 + \frac{\alpha'(\bar{\xi})}{q'(\bar{\xi})} \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right) m - V \frac{\alpha(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} \left( \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right)' m, \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = k q(\bar{\xi}), \quad (16)$$

где  $n = \frac{N}{N_0}$ ,  $i = \frac{I}{I_0}$ ,  $z = \frac{Z}{N_0}$ ,  $m = \frac{M}{M_0}$ ;  $N = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 d\xi$ ,  $Z = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 d\xi$ ,

$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$ ,  $M = \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^4 d\xi$  – интегралы волнового пакета;  $N_0 = N(0)$ ,  $Z_0 = Z(0)$ ,

$M_0 = M(0)$ ,  $I_0 = I(0)$  – исходные значения интегралов волнового пакета. При непропорциональном пространственном изменении дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции

$\left( \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right)' \neq 0$  система (11–16) не имеет состояний равновесия.

Таким образом, компенсация пространственного вынужденного рассеяния Рамана в средах с непропорциональным пространственным изменением дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции невозможна.

### Пропорциональное изменение дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции

Рассмотрим среды с пропорциональным пространственным изменением дисперсии

второго порядка и фазовой самомодуляции  $\left( \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right)' = 0$ . В этом случае  $\frac{\alpha'(\bar{\xi})}{q'(\bar{\xi})} \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} = 1$  и система (11)–(15) преобразуется к виду:

$$\frac{dn}{dt} = k q'(\bar{\xi}) n, \quad (17)$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\mu}{2} \frac{I_0}{N_0} \frac{i}{n} + \frac{1}{2} q'(\bar{\xi}) \frac{z}{n} + \frac{1}{2} \alpha'(\bar{\xi}) \frac{M_0}{N_0} \frac{m}{n} - q'(\bar{\xi}) k^2, \quad (18)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\mu \frac{I_0}{N_0} k i + 2k \alpha'(\bar{\xi}) \frac{M_0}{N_0} m + k q'(\bar{\xi}) \frac{M_0}{N_0} m, \quad (19)$$

$$\frac{di}{dt} = 5k q'(\bar{\xi}) i, \quad (20)$$

$$\frac{dm}{dt} = 3k q'(\bar{\xi}) m, \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = k q(\bar{\xi}). \quad (22)$$

Для дальнейшего анализа системы (17–22) будем считать градиенты дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции постоянными величинами  $q'(\bar{\xi}) = q' = const$ ,  $\alpha'(\bar{\xi}) = \alpha' = const$ . После замены переменной  $\tau = t q'$  система (17–21) преобразуется к виду

$$\frac{dn}{d\tau} = kn, \quad (23)$$

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{p}{2n}i + \frac{1}{2n}z + \frac{\delta_0}{2n}m - k^2, \quad (24)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -pki + 3k\delta_0 m, \quad (25)$$

$$\frac{di}{d\tau} = 5ki, \quad (26)$$

$$\frac{dm}{d\tau} = 3km, \quad (27)$$

где  $p = \frac{\mu}{q'} \frac{I_0}{N_0}$ ,  $\delta_0 = \frac{\alpha_0}{q_0} \frac{M_0}{N_0} = \frac{\alpha'}{q'} \frac{M_0}{N_0}$ . Система (23) - (27) имеет состояние равновесия

$$k = 0, p = z_0 + \delta_0, \quad (28)$$

где  $z_0 = \frac{Z_0}{N_0}$ . В равновесном режиме при распространении волнового пакета не изменяются

интегралы  $Z_0$ ,  $M_0$ ,  $N_0$ , волновое число остается нулевым. При анализе динамики волнового пакета с неравновесными параметрами мы получили первые интегралы уравнений (25–27) при учете (23):

$$m = n^3, \quad i = n^5, \quad z = -\frac{p}{5}(n^5 - 1) + \delta_0(n^3 - 1) + z_0. \quad (29)$$

Принимая во внимание (29), система (23)–(27) сводится к системе двух уравнений:

$$2\left(\frac{dk}{d\tau} + k^2\right) = -pn^4 + \delta_0 n^2 - \frac{p}{5}\left(n^4 - \frac{1}{n}\right) + \delta_0\left(n^2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{z_0}{n}, \quad (30)$$

$$\frac{dn}{d\tau} = kn. \quad (31)$$

Для волнового пакета с начальными параметрами, соответствующими  $k_0 = 0$  и  $z_0 + \delta_0 = p$ , состояние равновесия системы (30)–(31) совпадает с начальными параметрами волнового пакета ( $k_0 = 0, n_0 = 1$ ). Линеаризация системы в окрестности состояния равновесия

( $k_0 = 0, n_0 = 1$ ) приводит к уравнению  $\frac{d^2k}{d\tau^2} + k\delta_0 = 0$ , которое описывает колебания около состояния равновесия с частотой  $\omega = \sqrt{\delta_0}$ . При  $p \neq z_0 + \delta_0$  параметры исходного волнового пакета становятся переменными. Имеет место первый интеграл системы (30–31):

$$k^2 n^2 + \frac{p}{5}(n^6 - 1) - \frac{\delta_0}{2}(n^4 - 1) + \left(\delta_0 - \frac{p}{5} - z_0\right)(n - 1) = k_0^2, \quad (32)$$

где  $k_0 = k(0)$  – начальная величина волнового числа.

### Траектории солитонов

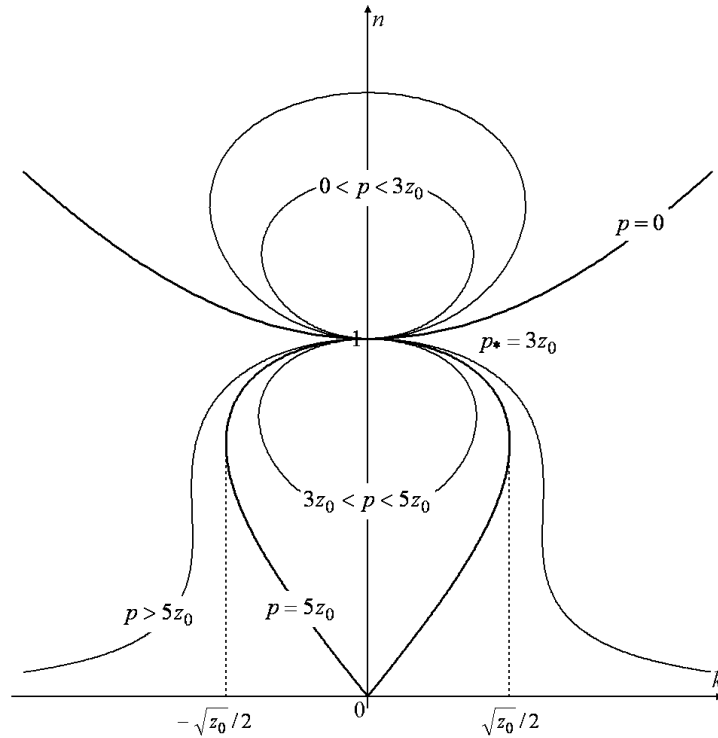
Рассмотрим траектории (32) для исходного пакета с нулевым начальным волновым числом  $k_0 = 0$  и огибающей, соответствующей солитонному решению

$$U(\xi, t = 0) = \frac{A_0}{\cosh(\xi A_0 \sqrt{\alpha_0 / q_0})}, \quad (33)$$

где  $q_0 = q(0)$ . Принимая во внимание обозначения  $p = \frac{8}{15} \frac{\mu}{q'} \frac{\alpha_0}{q_0} A_0^4$  и  $2z_0 = \delta_0 = \frac{2}{3} \frac{\alpha_0}{q_0} A_0^2$ , соотношение (32) приводится к более простой форме:

$$5nk^2 + pn^5 - 5z_0n^3 + (5z_0 - p) = 0. \quad (34)$$

На рис. 1 показаны траектории солитона (34) при заданных начальных условиях ( $k_0 = 0, n_0 = 1$ ) и различных значениях параметра  $p$ .



**Рис. 1. Траектории солитона (34) при заданных начальных условиях ( $k_0 = 0, n_0 = 1$ ) и различных значениях параметра  $p$**

Траектории солитона локализованы при  $0 < p < 5z_0$ , и параметры солитона, соответственно, периодически изменяются. Это соответствует динамическому равновесию пространственного вынужденного рассеяния Рамана и пропорционально возрастающих дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции. При  $p = 5z_0$  имеет место сепаратрисный режим динамики солитона: волновое число бесконечно медленно стремится к нулю. В этом случае наименьшая возможная величина волнового числа  $k_{\min} = -\frac{\sqrt{z_0}}{2}$ . При  $p > 5z_0$  пространственное вынужденное рассеяние Рамана доминирует, и волновое число солитона неограниченно возрастает. При  $p < 0$  волновое число солитона убывает.

### Солитонное решение

Рассмотрим решение уравнения (2) при линейных профилях дисперсии второго порядка  $q(\xi) = q_0 + q' \cdot \xi$  и фазовой самомодуляции  $\alpha(\xi) = \alpha_0 + \alpha' \cdot \xi$ . Предположим, что масштабы пространственных неоднородностей как дисперсии второго порядка, так и фазовой самомодуляции много больше характерного масштаба неоднородности огибающей волнового пакета  $L_{q,\alpha} \gg L_{\psi}$ , а также представим решение в форме стационарной волны

$$U(\xi, t) = \left( \psi_0(\xi) + \frac{\psi_1(\xi)}{\left(1 + \frac{q'}{q_0} V_g^L t\right)} \right) \exp\left( i\Omega \left( t + \frac{1}{2} \frac{q'}{q_0} V_g^L t^2 \right) \right), \quad (35)$$

где  $\psi_1 \sim \varepsilon \psi_0 \ll \psi_0$ ,  $\varepsilon \sim \xi q' \sim \xi \alpha' \sim L_\psi / L_{\alpha, q} \sim \mu \ll \alpha_0, q_0$ . Удерживая члены первого порядка относительно  $\varepsilon$ , мы имеем

$$q_0 \left( 1 + \frac{q'}{q_0} V_g^L t \right) \frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + 2\alpha_0 \left( 1 + \frac{\alpha'}{\alpha_0} V_g^L t \right) \psi_0^3 - 2\Omega \left( 1 + \frac{q'}{q_0} V_g^L t \right) \psi_0 = 0, \quad (36)$$

$$q_0 \frac{d^2 \psi_1}{d\xi^2} + 6\alpha_0 \frac{\left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha_0} V_g^L t\right)}{\left(1 + \frac{q'}{q_0} V_g^L t\right)} \psi_0^2 \psi_1 - 2\Omega \psi_1 = -2\alpha' \psi_0^3 \xi - q' \frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} \xi - \frac{2}{3} \mu \frac{d(\psi_0^3)}{d\xi}. \quad (37)$$

При условии пропорциональности пространственного изменения дисперсии второго порядка и фазовой само – модуляции  $\frac{q'}{q_0} = \frac{\alpha'}{\alpha_0}$  уравнение (36) имеет решение в виде классического солитона  $\psi_0 = \frac{A_0}{\cosh(\xi/\Delta)}$ , где  $\Delta = \frac{1}{A_0} \sqrt{\frac{q_0}{\alpha_0}}$ ,  $\Omega = \frac{1}{2} \alpha_0 A_0^2$ . Уравнение (37) после за-

мен  $\eta = \xi/\Delta$  и  $\Psi = \frac{\psi_1}{A_0} \frac{q_0}{q'_\eta}$  принимает вид

$$\frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} + \left( \frac{6}{\cosh^2 \eta} - 1 \right) \Psi = -\frac{\eta}{\cosh \eta} + \frac{15}{4} \frac{\mu}{\mu_*} \frac{\sinh \eta}{\cosh^4 \eta}, \quad (38)$$

где  $\mu_* = \frac{15}{8} \frac{q'_\eta}{A_0} \sqrt{\frac{\alpha_0}{q_0}}$  – равновесное значение параметра пространственного вынужденного рассеяния Рамана. При выполнении условия  $\Psi(0) = 0$  уравнение (38) имеет точное решение:

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{4 \cosh \eta} \left( 4\Psi'(0)\eta + \eta^2 \tanh \eta - 2(\eta - \tanh \eta) + 3 \frac{\mu}{\mu_*} \tanh \eta \ln(\cosh \eta) \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{\mu_*} - 1 \right) \tanh^2 \eta \sinh \eta. \quad (39)$$

При  $\mu = \mu_*$  решение (39) ограничено и стремится к нулю на бесконечности  $\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ . Такое решение существует в результате равновесия пространственного вынужденного рассеяния Рамана и неоднородностей как дисперсии второго порядка, так и фазовой само модуляции. На рис. 2 показано распределение  $\Psi(\eta)$  при  $\mu = \mu_*$  для различных начальных величин  $\Psi'(0)$ .

При  $\mu \neq \mu_*$  решение (39) не локализовано и на бесконечности является ненулевым  $|\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty)| \rightarrow \infty$ . На рис. 3 показано распределение  $\Psi(\eta)$  при начальных значениях  $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$  и для различных значений  $\mu$ .



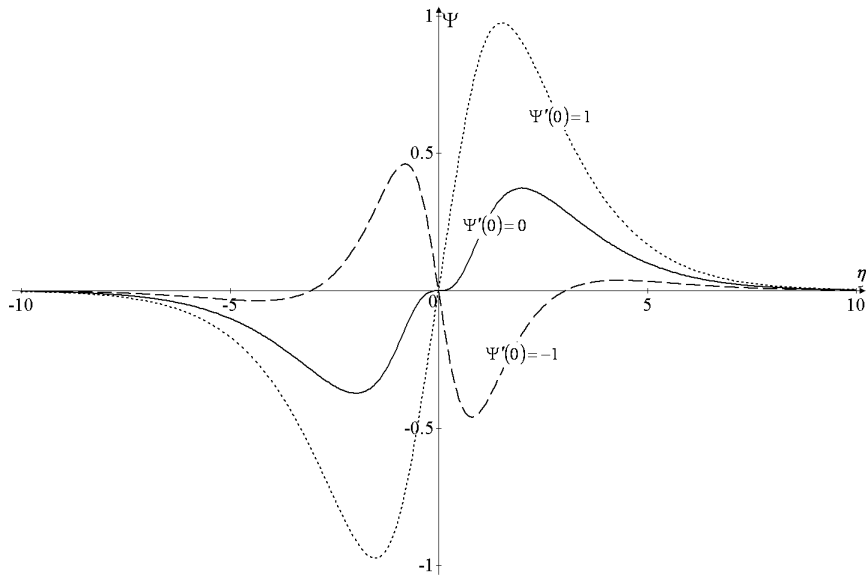


Рис. 2. Распределение  $\Psi(\eta)$  при  $\mu = \mu_*$  для различных начальных величин  $\Psi'(0)$

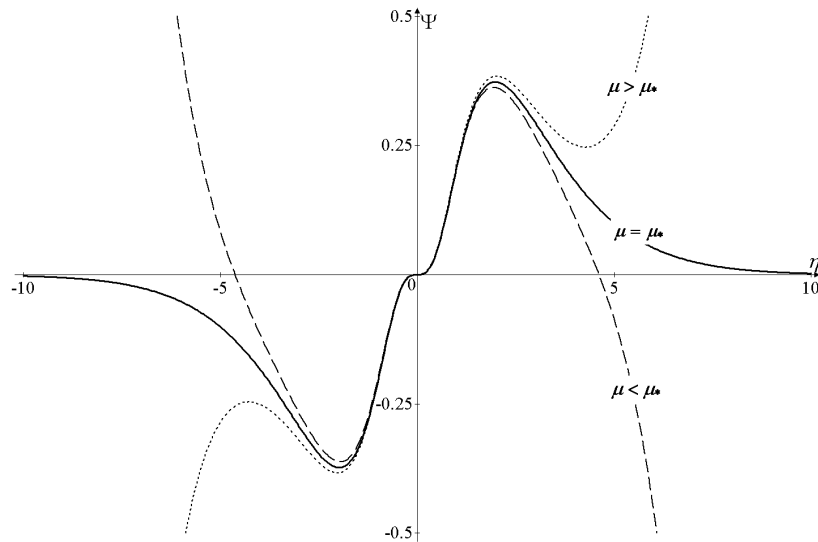


Рис. 3. Распределение  $\Psi(\eta)$  при  $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$  для различных значений  $\mu$

### Результаты численного эксперимента

Рассмотрим численно начальную задачу динамики солитоноподобного волнового пакета

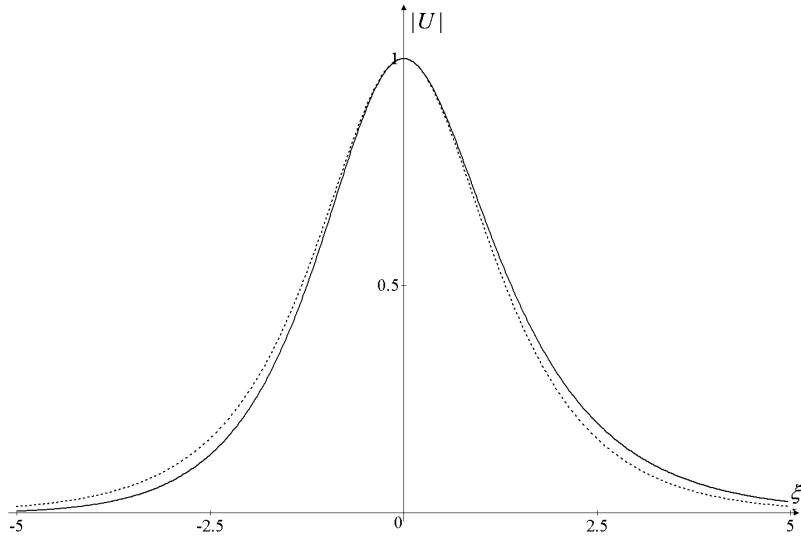
$$U(\xi, t = 0) = \frac{1}{\cosh \xi}. \tag{40}$$

В рамках уравнения (2) при  $V_g^L = 1$ ,  $q(\xi) = \alpha(\xi) = 1 + \frac{\xi + t}{L}$  для различных значений  $\mu$  и  $L$ . Параметры интегрирования начального импульса (40)  $2z_0 = \delta_0 = 2/3$  совпадают с параметрами равновесного состояния пространственного вынужденного рассеяния Рамана и пропорционально увеличивающихся дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции при условии  $\mu_* = \frac{15}{8} \frac{1}{L}$ . При  $L = 20$  мы имеем  $\mu_* = 3/32$ . На рис. 4 показано полученное в результате численного счета распределение модуля огибающей  $|U|$  по  $\xi$  при  $\mu = 3/32$ ,  $L = 20$  в моменты времени  $t = 5$  (непрерывная кривая) и  $t = 200$  (прерывистая кривая). В течение всего эксперимента волновое число волнового пакета остается равным нулю. Полученное чис-

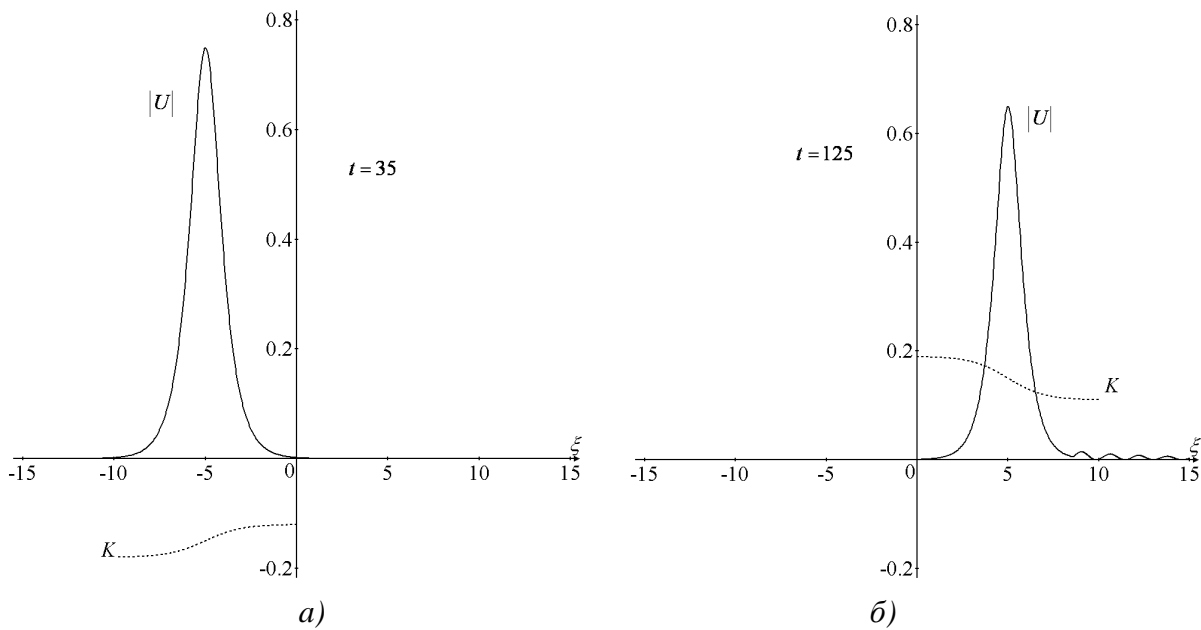
ленно распределение  $|U|$  на временах  $t > 2$  совпадает с полученным аналитически солитонным решением системы (36) - (37) при  $\alpha_0 = q_0 = V_g^L = A_0 = 1$ ,  $L = 20$  и  $\mu = \mu_*$ :

$$|U| = \frac{1}{\cosh \xi} \left( 1 + \frac{1}{80 \left( 1 + \frac{t}{20} \right)} \left( \xi^2 \tanh \xi + 2(\tanh \xi - \xi) + 3 \tanh \xi \ln(\cosh \xi) \right) \right). \quad (41)$$

На больших временах  $t \gg 20$  распределение (41) стремится к классическому солитону  $|U| = 1/\cosh \xi$  (прерывистая кривая на рис. 4).



**Рис. 4.** Результат численного счета. Распределение модуля огибающей  $|U|$  на  $\xi$  при  $\mu=3/32$ ,  $L=20$  в моменты времени  $t=5$  (непрерывная кривая) и  $t=200$  (прерывистая кривая)

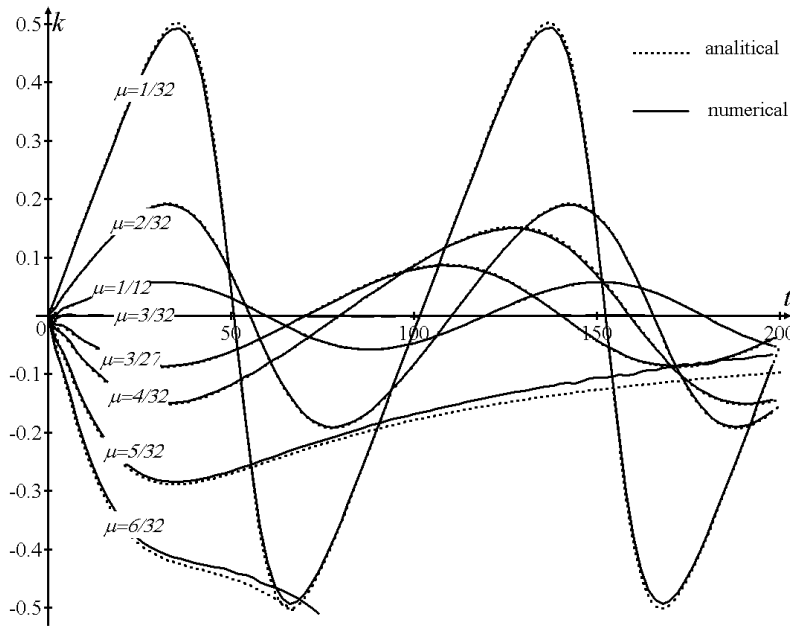


**Рис. 5.** Результат численного счета. Пространственные распределения  $|U|$  и  $K$  при  $\mu=4/32$ ,  $L=20$ . (а) соответствует  $t=35$ , (б) –  $t=125$

Изменение параметра  $\mu$  приводит к изменению параметров солитона (волнового чис-

ла, амплитуды). На рис. 5 показаны пространственные распределения модуля огибающей  $|U|$  и локального волнового числа  $K$  в различные моменты времени при  $\mu = 4/32$ ,  $L = 20$ . Волновое число в области ядра солитона изменяется слабо.

На рис. 6 показаны результаты численного счета (непрерывная кривая) и аналитического описания (прерывистая кривая) для зависимости локального волнового числа в точке максимума модуля огибающей волнового пакета  $k(|U| = \max)$  как функции  $t$  при  $L = 20$  и различных значениях  $\mu$ .



**Рис. 6.** Локальное волновое число в максимуме модуля огибающей волнового пакета  $k(|U| = \max)$  в зависимости от  $t$  при  $L = 20$  и различных  $\mu$ .

### Численный и аналитический результаты

При  $\mu = 3/32$  локальное волновое число волнового пакета не изменяется. Это соответствует равновесию пространственного вынужденного рассеяния Рамана и пропорционально возрастающих дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции. При  $\mu < 5/32$  изменяется периодически. Это соответствует динамическому равновесию пространственного вынужденного рассеяния Рамана и пропорционально возрастающих дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции. При  $\mu = 5/32$  имеет место сепаратрисный режим: в течение некоторого времени волновое число уменьшается, а затем бесконечно долго стремится к нулевому значению. Наименьшая величина волнового числа при этом составляет  $k = -0.29$ , что соответствует полученной аналитически величине  $k_{\min} = -\frac{\sqrt{z_0}}{2}$  при  $z_0 = 1/3$  (рис. 1).

При  $\mu > 5/32$  волновое число неограниченно убывает (доминирование пространственного вынужденного рассеяния Рамана). Динамика волнового числа соответствует полученному аналитически фазовому портрету на рис. 1.

### Выводы

В данной работе рассмотрена динамика солитонов огибающей в рамках расширенного уравнения Шредингера, учитывающего пространственное вынужденное рассеяние Рамана, групповую скорость линейных волн, неоднородность как дисперсии второго порядка, так и фазовой самомодуляции. Исследование проведено как аналитически в рамках системы (30–31), так

и численно в рамках уравнения (2). Показана возможность компенсации сдвига вниз волнового числа солитона за счет рамановского рассеяния сдвигом вверх волнового числа пропорциональным увеличением дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции.

Найдено аналитическое солитонное решение, существующее в результате равновесия пространственного вынужденного рассеяния Рамана и пропорционального увеличивающихся дисперсии второго порядка и фазовой самомодуляции. Определен режим динамического равновесия пространственного вынужденного рассеяния Рамана и неоднородности среды, при котором происходит периодическое изменение параметров солитона. Результаты аналитического и численного исследований в этих режимах полностью совпадают.

В данной работе динамика солитонов рассматривалась в пренебрежении эффектами нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка. Возможность и условия компенсации пространственного вынужденного рассеяния Рамана в неоднородной среде при учете этих эффектов будет рассмотрена в следующих работах.

*В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 11-01-0066, реализованного в рамках программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012–2013 гг.*

### Библиографический список

1. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis (Springer, New York, 2001).
2. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems (World Scientific, New York, 2005).
3. **Kivshar, Y.S. and Agrawal G.P.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals (Academic, San Diego, 2003).
4. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optic (Academic Press, San Diego, 2001).
5. **Zakharov, V.E., Shabat, A.B.,** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media // Sov. Phys. JETP. 34 (1972) 62–69.
6. **Hasegawa, A., Tappert, F.,** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion // Appl. Phys. Lett. 23 (1973) 142–144.
7. **Oliviera, J.R., Moura, M.A.,** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation // Phys. Rev. E 57 (1998) 4751–4755.
8. **Mitschke, F.M., Mollenauer, L.F.,** Discovery of the soliton self-frequency shift // Opt. Lett. 11 (1986) 659–661.
9. **Gordon, J.P.,** Theory of the Soliton Self-frequency Shift // Opt. Lett. 11 (1986) 662–664.
10. **Kodama, Y. J.,** Optical solitons in a monomode fiber // Stat. Phys. 39 (1985) 597–614.
11. **Zaspel, C.E.,** Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation // Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 723–726.
12. **Hong, B., Lu, D.,** New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodinger equation // Inter. Journal of Nonlinear Science 7 (2009) 360–367.
13. **Karpman, V.I.,** The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation // The European Physical Journal B 39 (2004) 341–350.
14. **Gromov, E.M., Talanov, V.I.,** Nonlinear Dynamics of Short Wave Trains in Dispersive Media // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 110 (1996) 137; Sov. Phys. JETP. 83 (1996) 73–79.
15. **Gromov, E.M., Talanov, V.I.,** Short Optical Solitons in Fibers // Chaos. 10 (2000) 551–558.
16. **Gromov, E.M., Piskunova, L.V., Tyutin, V.V.,** Dynamics of wave packets in the frame of third-order nonlinear Schrödinger equation // Physics Letters A. 256 (1999) 153–158.
17. **Scalora, M., et al.,** Generalized Nonlinear Schrödinger Equation for Dispersive Susceptibility and Permeability: Application to Negative Index Materials // Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 013902.
18. **Wen, S.C. et al.,** Modulation instability in nonlinear negative-index material // Phys Rev E, 73 (2006) 036617.
19. **Marklund, M., Shukla, P.K., Stenflo, L.,** Ultrashort solitons and kinetic effects in nonlinear metamaterials // Phys. Rev. E. 73 (2006) 037601.
20. **Tsitsas, N.L., Rompotis, N., Kourakis, I., Kevrekidis, P.G. and Frantzeskakis, D.J.,** Higher-order effects and ultra-short solitons in left-handed metamaterials // Phys. Rev. Lett. E 79 (2009) 037601.

21. **Kivshar, Yu.S.**, Dark-soliton dynamics and shock waves induced by the stimulated Raman effect in optical fibers // Phys. Rev. A. 42. N.3 (1990) P.1757-1761.
22. **Kivshar, Y.S. and Malomed, B.A.**, Raman-induced optical shocks in nonlinear fibers // Opt. Lett. 18 (1993) 485–487.
23. **Biancalama, F., Skrybin, D.V., Yulin, A.V.**, Theory of the soliton self-frequency shift compensation by the resonant radiation in photonic crystal fibers // Phys. Rev. E 70 (2004) 011615.
24. **Andrianov, A., Muraviev, S., Kim, A., Sysoliatin, A.**, DDF-based all-fiber optical source of femtosecond pulses smoothly tuned in the telecommunication range // Laser Physics 17 (2007) 1296–1302.
25. **Essiambre, R.-J., Agrawal, G. P.**, Timing jitter of ultrashort solitons in highspeed communication systems. II. Control of jitter by periodic optical phase conjugation // Journal of the Optical Society of America B 14 (1997) 323–330.
26. **Chernikov, S., Dianov, E., Richardson, D., Payne, D.**, Soliton pulse compression in dispersion-decreasing fiber // Optics letters. 18 (1993) 476–478.
27. **Essiambre, R.-J., Agrawal, G.P.**, Timing jitter of ultrashort solitons in high-speed communication systems. I. General formulation and application to dispersion-decreasing fibers // Journal of the Optical Society of America B. 14 (1997) 314–322.
28. **Aseeva, N.V., Gromov, E.M., Tyutin, V.V.**, Soliton self-wave number down shift compensation by the increasing second-order dispersion // Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis / Ed. by B. Goldengorin, V. Kalyagin, P. Pardalos. Springer Berlin Heidelberg, 2013. Vol. 32 of Springer Series in Mathematics & Statistics, p. 1–10.

*Дата поступления  
в редакцию 16.10.2012*

**N.V. Aseeva, E.M. Gromov, V.V. Tyutin**

## **SOLITON'S STABILIZATION IN MEDIA WITH SPATIAL STIMULATED RAMAN SCATTERING AND PROPORTIONAL INHOMOGENEOUS OF DISPERSION AND SELF - PHASE MODULATION**

National Investigate University Higher School of Economics

**Purpose:** Dynamics of envelope solitons in the frame of the extended nonlinear Schrödinger equation  $2i\left(\frac{\partial U}{\partial t} + V_g^L \frac{\partial U}{\partial x}\right) + q(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\alpha(x)U|U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial x} = 0$ , taking into account non - local nonlinearity (space stimulated Raman scattering)  $\mu$ , proportionally inhomogeneous of second-order dispersion  $q(x)$  and self - phase modulation (cubic nonlinearity)  $\alpha(x)$ , and linear group velocity  $V_g^L$  is considered.

**Approach:** Soliton's dynamic investigated as numerically as analytically. In analytic theory the six integrals of basic model equation was reduced to two ordinary differential equations system. Phase space structure of the system was analyzed.

**Findings:** It is shown that soliton's wave number down shift (caused by space stimulated Raman scattering) is compensated by wave number up shift (cause by increasing both second-order linear dispersion and self - phase modulation). New class of soliton solutions is analytically found as a result of equilibrium of stimulated scattering and media inhomogeneous. The stimulated scattering and media inhomogeneous dynamic equilibrium regime (in the regime the soliton's parameters - wave number, amplitude and longitude - periodically varying) is analytically found too. It is numerically shown that analytical and numerical results in a good agreement: acknowledge the receipt of a both equilibrium regime and dynamic equilibrium regime and obtained solitons stability is proved.

**Originality:** The obtained results is original and can be important for optical fibers application.

*Key words:* Extended Nonlinear Schrödinger Equation, Soliton, Nonlocal Nonlinearity, Space Stimulated Raman-Scattering, Inhomogeneous, Second-Order Linear Dispersion, Cubic Nonlinearity, Self - Phase Modulation, Analytical Investigation, Numerical Simulation.