УДК 519.3+513.7

Л. Н. Кривоносов, В.А. Лукьянов

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ В 4-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Электрон в атоме движется свободно, в противном случае он бы излучал. Свободное движение, т.е. движение по инерции, без воздействия сил, геометрически трактуется как движение по экстремали функционала длины дуги. В геометрии Минковского такими экстремалями являются только прямые, что явно не согласуется с траекторией электрона в атоме. Ближайшим обобщением геометрии Минковского является геометрия 4-мерного пространства конформной связности. Локально эти две геометрии имеют одинаковые структуры, но различие их глобальных структур приводит к существованию в пространстве конформной связности весьма сложных экстремальных кривых, которые можно использовать для моделирования свободного движения элементарных бозоновских частиц. В статье изучаются экстремальные кривые двух видов: времениподобные и изотропные. Времениподобные кривые характеризуются тремя функциями длины дуги: *m, c*, и *p*, которые для экстремальных кривых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Изотропные кривые характеризуются двумя функциями длины дуги: *f* и *g*, которые для экстремальных кривых оказываются константами. Такие изотропные кривые могли бы моделировать движение гравитона, но отсутствие экспериментальных данных о его свойствах не позволяет что-либо сказать о согласии этой модели с реальностью. В отличие от гравитона, экспериментальные данные о фотоне очень богаты. Но авторам не удалось справиться с вычислительными трудностями при исследовании **плоской** экстремальной изотропной кривой, которая могла бы моделировать движение фотона, т.к. фотон является плоской волной. Хотя лагранжиан для плоской изотропной кривой авторам известен, в статью он не включен.

Экстремальные кривые в 4-мерном пространстве конформной связности изучались в работе [1], но в ней были допущены некоторые вычислительные ошибки. В данной статье устранены ошибки и уточнены некоторые формулировки

Ключевые слова: многообразие конформной связности, эллиптическая функция Вейерштрасса, уравнение Эйлера-Лагранжа, экстремальные кривые, изотропная экстремальная кривая, времениподобная экстремальная кривая.

Исходные положения

Пространства конформной связности были введены Картаном в [2]. Если $x(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ и $z(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ - две точки проективного 5-мерного пространства P_5, то их скалярное произведение определим как

$$(x,z) = x_0 z_5 + x_5 z_0 - x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + x_4 z_4.$$

Каждой точке x поставим в соответствие репер $\{x, y_i, X\}$, $i = 1,2,3,4$ состоящий из шести линейно независимых точек пространства P_5, удовлетворяющих условиям ортогональности

$$(x,x) = (X,X) = (x,y_i) = (X,y_i) = 0, \quad (x,X) = 1, \quad (y_i, y_j) = \eta_{ij}, \tag{1}$$

где

$$(\eta_{ij}) = (\eta^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера $\{x, y_i, X\}$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} dx = \omega^i y_i + \omega_0^0 x, \\ dy_i = \omega_i^k y_k + \omega_i x + \omega_i^5 X, \\ dX = \omega_5^k y_k - \omega_0^0 X, \end{cases} \tag{2}$$

где пфаффовы формы (инфинитезимальные коэффициенты) удовлетворяют соотношениям [2, с. 161]:

$$\omega_i^5 + \eta_{ij}\omega^j = 0, \quad \eta_{ik}\omega_j^k + \eta_{jk}\omega_i^k = 0, \quad \eta_{ij}\omega_5^j + \omega_i = 0.$$

Здесь и далее все индексы пробегают значения 1,2,3,4; по одноименным верхним и нижним индексам предполагается суммирование. Условия интегрируемости системы (2) имеют вид[2, с. 160]

$$\begin{cases} d\omega_0^0 + \omega_k \wedge \omega^k = 0, \\ d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k + \omega^i \wedge \omega_0^0 = 0, \\ d\omega_i + \omega_k \wedge \omega_i^k + \omega_0^0 \wedge \omega_i = 0, \\ d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k + \omega^j \wedge \omega_i + \eta^{jm}\omega_m \wedge \eta_{in}\omega^n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

В настоящей статье мы будем использовать лагранжианы, представимые в виде функции от скалярных произведений $\left(x^{(k)}, x^{(l)}\right)$, где $k, l \in \{0,1,2,3,4,5\}$, а символом $x^{(k)}$ обозначена производная k-го порядка. Если L - лагранжиан, то обозначим за $L_{x^{(k)}}$ величину, вычисляемую по формуле

$$L_{x^{(k)}} = \sum_{k \neq l} \frac{\partial L}{\partial\left(x^{(k)}, x^{(l)}\right)} x^{(l)} + \frac{2\partial L}{\partial\left(x^{(k)}, x^{(k)}\right)} x^{(k)}.$$

В частности, если $L = \left(x^{(k)}, x^{(l)}\right)$, то

$$L_{x^{(p)}} = \begin{cases} 0, \text{ если } p \neq k,\ p \neq l; \\ x^{(l)}, \text{ если } p = k \neq l; \\ 2x^{(k)}, \text{ если } p = k = l. \end{cases} \tag{4}$$

Времениподобная кривая

Рассмотрим перемещение подвижного репера $\{x, y_i, X\}$ вдоль времениподобных кривых, то есть таких кривых, что $(dx, dx) < 0$. С помощью формул перемещения канонического репера мы найдем дифференциальное уравнение экстремальных кривых, то есть кривых, являющихся экстремалями функционала $I = \int\limits_{s_0}^{s_1} ds$, где ds - элемент длины дуги времениподобной кривой.

Канонический репер времениподобной кривой

Реперы первого порядка определяются равенствами $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$, а ω^1 - параметрическая форма. Внешним дифференцированием, используя формулы (3), получим, что реперы пятого порядка будут определяться равенствами

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_0^0 = 0,$$
$$\omega_2 = \omega^1, \quad \omega_2^3 = c\omega^1, \quad \omega_1 = m\omega^1, \quad \omega_3^4 = p\omega^1,$$

где $c(s), m(s), p(s)$ - инварианты, а $\omega^1 = ds$ - дифференциал длины дуги. Следовательно, согласно формулам (2), уравнения инфинитезимальных перемещений канонического репера будут такими:

$$\begin{cases} \overline{x}' = \overline{y}_1, \\ \overline{y}_1' = m\overline{x} + \overline{X}, \\ \overline{X}' = m\overline{y}_1 - \overline{y}_2, \\ \overline{y}_2' = \overline{x} + c\overline{y}_3, \\ \overline{y}_3' = -c\overline{y}_2 + p\overline{y}_4, \\ \overline{y}_4' = -p\overline{y}_3. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\bar{x} = \lambda x$ - инвариантно пронормированная точка x, а штрихом обозначена производная по инвариантному параметру s.

Теперь займемся поисками экстремалей функционала $I = \int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt$. Согласно рассуждениям, приведенным в [3, с. 43], если лагранжиан L записан в виде $L(t) = \dfrac{\Delta_3(t)^{\frac{1}{4}}}{\Delta_2(t)^{\frac{1}{3}}}$, где

$$\Delta_3(t) = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,\dot{x}) & (x,\ddot{x}) & (x,\dddot{x}) \\ (\dot{x},x) & (\dot{x},\dot{x}) & (\dot{x},\ddot{x}) & (\dot{x},\dddot{x}) \\ (\ddot{x},x) & (\ddot{x},\dot{x}) & (\ddot{x},\ddot{x}) & (\ddot{x},\dddot{x}) \\ (\dddot{x},x) & (\dot{x},\dddot{x}) & (\ddot{x},\dddot{x}) & (\dddot{x},\dddot{x}) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,\dot{x}) & (x,\ddot{x}) \\ (\dot{x},x) & (\dot{x},\dot{x}) & (\dot{x},\ddot{x}) \\ (\ddot{x},x) & (\dot{x},\ddot{x}) & (\ddot{x},\ddot{x}) \end{vmatrix} \tag{6}$$

(здесь символом $\dot{x}$ обозначена производная по параметру t), то он будет удовлетворять нужным нам условиям

$$L[c(t)x,(c(t)x)',(c(t)x)'',(c(t)x)'''] = L[x,x',x'',x'''],$$
$$L[x(t),x'(t),x''(t),x'''(t)]dt = L[x(s),x'(s),x''(s),x'''(s)]ds.$$

Первое условие означает инвариантность лагранжиана L относительно умножения x на произвольную функцию $c(t)$. Необходимость этого требования следует из того, что в проективном пространстве координаты точки определены с точностью до множителя. Второе условие означает инвариантность функционала $I = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt$ относительно замены параметра.

Так как у нас имеется условие связи $(x,x) = 0$, уравнение Эйлера-Лагранжа нужно составлять для лагранжиана

$$L^*(t) = L(t) + \lambda(x,x) = \frac{\Delta_3(t)^{\frac{1}{4}}}{\Delta_2(t)^{\frac{1}{3}}} + \lambda(x,x),$$

где $\lambda(t)$ - произвольная функция.

Уравнение Эйлера-Лагранжа

Экстремальные кривые должны удовлетворять уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d^3}{ds^3}L^*_{\bar{x}'''} - \frac{d^2}{ds^2}L^*_{\bar{x}''} + \frac{d}{ds}L^*_{\bar{x}'} - L^*_{\bar{x}} = 0. \tag{7}$$

Вычислив величины $\dfrac{d^k}{ds^k}L^*_{\bar{x}^{(k)}}$ по формулам (4) и (6) и используя (5), получим

$$\left(c^2 + \frac{4m}{3} - 4\lambda\right)\bar{x} + (3cc' + m')\overline{y_2} + \left(c^3 - c'' + cp^2 + 2cm\right)\overline{y_3} + (2c'p + cp')\overline{y_4} = 0.$$

Отсюда система уравнений

$$\begin{aligned}
&c^2+\frac{4m}{3}-4\lambda=0,\\
&3cc'+m'=0,\\
&c^3-c''+cp^2+2cm=0,\\
&2c'p+cp'=0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть A, B, D - константы, тогда $2m=A-3c^2$, $c^2p=B$. Если положить

$$u=\frac{2}{3}m,\quad g_2=\frac{4}{3}A^2+4D,\quad g_3=4B^2-\frac{8}{27}A^3-\frac{4}{3}AD,$$

то получим:

$$u'^2=4u^3-g_2u-g_3. \tag{9}$$

Таким образом, u является эллиптической функцией Вейерштрасса:

$$u=\wp(s+E,g_2,g_3),$$

где E - постоянная интегрирования уравнения (9). Поэтому решение системы (8) имеет вид

$$m=\frac{3}{2}\wp(s+E,g_2,g_3),\quad c^2=\frac{A}{3}-\wp(s+E,g_2,g_3),\quad p=\frac{B}{\frac{A}{3}-\wp(s+E,g_2,g_3)}. \tag{10}$$

Если же записать уравнение Эйлера-Лагранжа (7) с помощью x и его производных, то получим

$$\overline{x}^{(6)}-4m\overline{x}^{(4)}-8m'\overline{x}'''+\left(4m^2+1-9m''\right)\overline{x}''-32mm'\overline{x}'-\left(6mm''+7m'^2+c^2+2m\right)\overline{x}=0. \tag{11}$$

Это и есть дифференциальное уравнение времениподобных кривых, где функции m и c удовлетворяют условиям (10).

Интересен частный случай, когда траектория плоская. Это будет при $c=0$. Тогда $m=\text{const}$, а p остается произвольной функцией от s. Уравнение (11) примет вид

$$\overline{x}^{(6)}-4m\overline{x}^{(4)}+\left(4m^2+1\right)\overline{x}''-2m\overline{x}=0.$$

Оно интегрируется в конечном виде, так как левая часть характеристического уравнения $\nu^6-4m\nu^4+\left(4m^2+1\right)\nu^2-2m=0$ раскладывается на множители: $\left(\nu^2-2m\right)\left(\nu^4-2m\nu^2+1\right)=0$.

Отметим также очевидное следствие системы (8).

Утверждение 1

Времениподобные кривые с **постоянными** инвариантами m, c и p являются экстремальными тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$c\left(c^2+p^2+2m\right)=0.$$

Изотропная кривая

В этом разделе мы рассмотрим перемещение подвижного репера $\{x,y_i,X\}$ вдоль изотропных кривых, т.е. таких кривых, что $(dx,dx)=0$. С помощью формул перемещения канонического репера мы найдем дифференциальное уравнение экстремальных кривых, т.е. кривых, являющихся экстремалями функционала $I=\int\limits_{s_0}^{s_1}ds$, где ds - элемент длины дуги изотропной кривой.

Чтобы упростить вычисления, изменим условия ортогональности (1), положив

$$\left(\eta_{ij}\right)=\left(\eta^{ij}\right)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Канонический репер изотропной кривой

Реперы первого порядка определяются равенствами $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$, а ω^1 - параметрическая форма. Внешним дифференцированием, применяя равенства (3), находим, что реперы седьмого порядка будут определяться условиями:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_3^4 = \omega_3 = \omega_1^1 = \omega_0^0 = 0,$$
$$\omega_1^3 = \omega_4 = \omega^1 = ds, \quad \omega_2 = g\omega^1, \quad \omega_1 = f\omega^1, \quad \omega_2^3 = -\frac{3}{2} f\omega^1,$$

где $f(s), g(s)$ - инварианты. В соответствии с (2), уравнения инфинитезимальных перемещений канонического репера $\{x, y_i, X\}$ примут вид:

$$\begin{cases} \overline{x}' = \overline{y_1}, \\ \overline{y_1}' = f\,\overline{x} + \overline{y_3}, \\ \overline{y_3}' = \dfrac{3}{2} f\,\overline{y_1} - \overline{y_2}, \\ \overline{y_2}' = -\dfrac{3}{2} f\,\overline{y_3} + g\,\overline{x} - \overline{X}, \\ \overline{X}' = -g\,\overline{y_1} - f\,\overline{y_2} - \overline{y_4}, \\ \overline{y_4}' = x. \end{cases}$$

Здесь снова штрихом обозначена производная по инвариантному параметру s.

Согласно рассуждениям, приведенным в [3, с. 43], чтобы лагранжиан L был инвариантен относительно умножения x на произвольную функцию $c(t)$, а функционал $I = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt$ был инвариантен относительно замены параметра, лагранжиан должен иметь вид $L(t) = \dfrac{\Delta_5(t)^{\frac{1}{6}}}{\Delta_4(t)^{\frac{1}{5}}}$, где Δ_5 и Δ_4 - определители 6-го и 5-го порядков, составленные по аналогии с (6).

Так как в случае изотропной кривой имеются уже не одно, а два условия связи: $(x, x) = 0$ и $(x', x') = 0$, уравнение Эйлера-Лагранжа нужно составлять для лагранжиана

$$L^*(t) = L(t) + \lambda(x, x) + \mu(x', x') = \frac{\Delta_5(t)^{\frac{1}{6}}}{\Delta_4(t)^{\frac{1}{5}}} + \lambda(x, x) + \mu(x', x'),$$

где $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ - произвольные функции.

Уравнение Эйлера-Лагранжа

Экстремальные кривые должны удовлетворять уравнению Эйлера-Лагранжа, которое в случае изотропной кривой запишется в виде

$$\frac{d^5}{ds^5} L^*_{\overline{x}^{(5)}} - \frac{d^4}{ds^4} L^*_{\overline{x}^{(4)}} + \frac{d^3}{ds^3} L^*_{\overline{x}'''} - \frac{d^2}{ds^2} L^*_{\overline{x}''} + \frac{d}{ds} L^*_{\overline{x}'} - L^*_{\overline{x}} = 0. \tag{12}$$

Вычислив с помощью (4) величины $\dfrac{d^k}{ds^k} L^*_{x^{(k)}}$ и используя (5), получим

$$\left(-18f'' + 6f^2 + 8g - 30\mu f + 30\lambda\right)\overline{x} + (3f' + 4\mu')\overline{y_0} - (10f + 30\mu)\overline{y_2} + (-5f''' + 20ff' + 5g')\overline{y_3} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\overline{y_0}$ и $\overline{y_2}$ находим, что $f' = 0$. Из равенства нулю коэффициента при $\overline{y_3}$ придем к $g' = 0$. Итак, получен основной результат:

Утверждение 2

На экстремальной изотропной кривой инварианты f и g постоянны.

Если же теперь записать уравнение Эйлера-Лагранжа (12) с помощью x и его производных, то получим уравнение экстремальных изотропных кривых:

$$\left(2f^2+g\right)\left(\bar{x}^{(6)}-5f\bar{x}^{(4)}+2\left(2f^2+g\right)\bar{x}''+\bar{x}\right)=0.$$

Справедлив также и результат, обратный Утверждению 2:

Утверждение 3

Если у изотропной кривой инварианты f и g постоянны, то она является экстремалью.

Библиографический список

1. **Кривоносов, Л. Н**. Развитие конформной теории поля // Деп. в ВИНИТИ № 1005-В92. 1992. – 59 с.
2. **Картан, Э.** Пространства аффинной, проективной и конформной связност / Э. Картан. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. – 210 с.
3. **Лукьянов, В. А.** Одномерныелагранжианы, порожденные квадратичной формой // Изв. вузов. Матем. 2009. № 5. С. 33–44.

Дата поступления
в редакцию 10.10.2012

L. N. Krivonosov, V. A. Lukianov

EXTREME CURVES ON 4-DIMENTIONAL CONFORMALLY CONNECTED SPACE

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

The movement of electron in atom is free, otherwise it would radiate. Free movement, i.e. movement by inertia, without influence of forces, is geometrically treated as movement along the extreme curve of an arch length functional. In Minkowski geometry such extreme curves are straight lines only, that obviously doesn't match with a trajectory of electron in atom. The nearest generalization of Minkowski geometry is the geometry of a 4-dimensional conformally connected space. Locally these two geometries have identical structures, but distinction in their global structures leads to existence of rather difficult extreme curves in conformally connected space, which can be used for free movement modeling of boson elementary particles.

In the article extreme curves of two kinds are studied: time-like and null. Time-like curves are characterized with three functions of arch length: m, c, and p, which for extreme curves are expressed with the help of elliptic Weierstrass function. Null curves are characterized with two functions of arch length: f and g, which for extreme curves appear to be constant. Such null curves could model the movement of graviton, but the absence of experimental data about its properties does not allow us to tell anything about the correlation of this model with reality. Unlike graviton, experimental data about photon are very rich. But authors did not manage to cope with calculating difficulties when researching a flat extreme null curve, which could model photon movement, since photon is a flat wave. Though the authors know the lagrangian for the flat null curve, it is not included in the article.

Extreme curves in 4-dimensional conformally connected space were studied in work [1], but some computing mistakes were committed in it. In this article all mistakes are eliminated and some formulations are specified.

Key words: conformally connected manifold, Weierstrass elliptic function, Euler-Lagrange equation, extreme curves, null extreme curve, time-like extreme curve.