МАШИНОСТРОЕНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ

УДК 658.527.011

А.А. Иванов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Цель работы. Установление оптимальной зависимости между числом каналов обслуживания и их производительностью, которая предполагает минимизацию затрат и потерь, связанных с простоями технологического оборудования.

Метод проведения работы. В работе использована математическая модель системы массового обслуживания (СМО) в виде ориентированного графа с заданными процедурой обслуживания, а также интенсивностями заявок и обслуживания. При этом принято допущение, что все потоки в СМО являются пуассоновскими, а процесс функционирования системы представляет собой марковский случайный процесс. Для вычисления вероятностей состояний системы используются базовые уравнения СМО.

Результаты и область их применения. Показано, что решение базового уравнения для СМО с двумя состояниями может быть выполнено с помощью формулы полной вероятности, а для более сложной СМО – с помощью численных методов на ЭВМ. Задавая входные и выходные характеристики стационарной СМО, можно быстро вычислять вероятности ее состояний, что важно при проектировании отказоустойчивых автоматизированных комплексов и линий.

Выводы. Предложена методика расчета вероятностей состояний системы массового обслуживания, позволяющая установить оптимальную зависимость между числом каналов обслуживания и их производительностью.

Ключевые слова: система массового обслуживания, вероятность состояния системы, интенсивности заявок и обслуживания, дисциплина очереди.

Теория массового обслуживания изучает процессы, связанные с удовлетворением массового спроса на обслуживание технических объектов или людей с учетом *случайного* спроса и предложения. Поэтому работа системы массового обслуживания (СМО) ведется нерегулярно: то образуется *очередь* заявок на обслуживание, то начинают *простаивать* каналы обслуживания (технические устройства, приборы).

Основная задача теории массового обслуживания – установить *оптимальную* зависимость между числом каналов обслуживания и их производительностью. Оптимальная зависимость предполагает минимизацию затрат на каналы обслуживания и потерь, связанных с простоями технологического оборудования в очереди на обслуживание и с простоями каналов обслуживания. Обобщенная схема СМО показана на рис. 1.

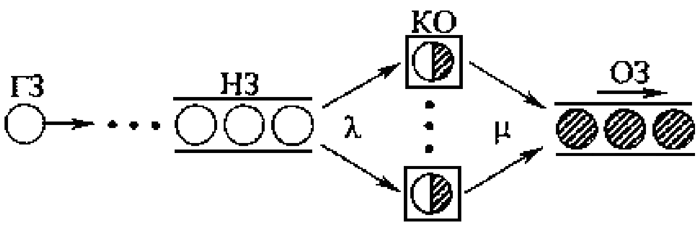

Рис. 1. Обобщенная схема СМО:
ГЗ – генератор заявок; НЗ – накопитель заявок; КО – каналы обслуживания; ОЗ – обслуженные заявки; λ, μ – характеристики входного и выходного потока заявок соответственно

Математическая модель СМО может быть представлена в виде ориентированного графа, вершины которого есть состояния системы, а на дугах графа указаны входные λ и выходные μ характеристики (рис. 2).

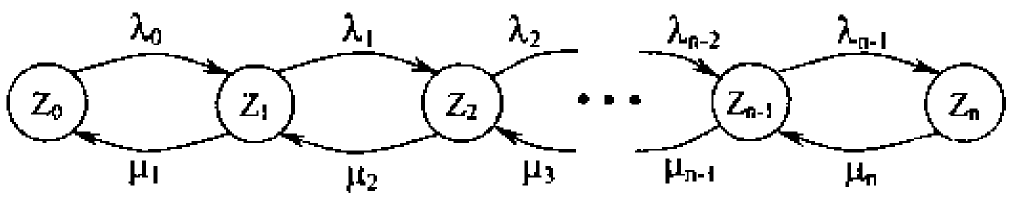

Рис. 2. Пример графа СМО с *n* состояниями

Для построения математической модели СМО необходимо иметь следующие исходные данные:

- интенсивность заявок, т.е. среднее число заявок в единицу времени

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{ср}}},\ \text{ч}^{-1},$$

где $t_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ - среднее время между заявками; n – число наблюдений;

- интенсивность обслуживания, т.е. среднее число обслуженных заявок в единицу времени

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{об}}},\ \text{ч}^{-1},$$

где $t_{\text{об}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ - среднее время обслуживания заявки;

- процедура обслуживания (дисциплина очереди). Живая очередь (первым пришел – первым обслужен); срочное обслуживание (по шкале приоритетов).

Относительный приоритет – поступившая заявка начинает обслуживаться, когда закончится обслуживание предыдущей заявки. Абсолютный приоритет – поступившая заявка начинает обслуживаться сразу (обслуживание предыдущей заявки прерывается).

Принимая допущение, что все потоки λ и μ в модели СМО являются простейшими (пуассоновскими), заключаем, что процесс функционирования системы представляет собой марковский случайный процесс [1, 2, 3, 4]. Как известно, в простейшем потоке событий число заявок k за время t распределяется по закону Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Заявки поступают в систему в случайные моменты времени, причем вероятность поступления одной заявки $P_{\text{i}}(t)$ в интервале от t до $t + \Delta t$ равна $P_i(t) = \lambda \Delta t$ и не зависит от t. Вероятность появления в этом интервале двух и более заявок пренебрежимо мала.

Длительности обслуживания отдельных заявок предполагаются также случайными величинами с экспоненциальным законом распределения. Это свидетельствует о том, что вероятность окончания обслуживания очередной заявки в промежутке от t до $t + \Delta t$ не зависит от времени t и равна $P_{\text{об}}(t) = \mu \Delta t$.

Базовые уравнения СМО используются для вычисления вероятностей состояний системы во время переходного и установившегося (стационарного) режима. Переходный процесс характеризуется пошаговым изменением вероятностей состояний системы от начального к установившемуся.

Сначала рассмотрим минимальный граф СМО с двумя возможными состояниями (рис. 3).

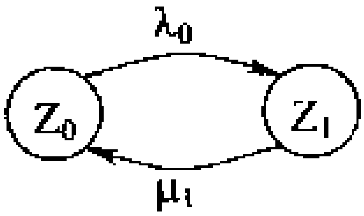

Рис. 3. Граф СМО с двумя состояниями

Расчет вероятностей состояний системы за период Δt проведем, считая потоки пуассоновскими. Рассмотрим возможные ситуации:

1. Вероятность пребывания системы в состоянии z_0 в момент t равна

$$P_0(t).$$

Это означает, что в момент t и за период Δt в систему не поступило ни одной заявки.

2. Вероятность перехода системы из z_0 в z_1 при поступлении заявки в период Δt. Найдем вероятность поступления заявки в систему за период Δt (аналогично вероятности появления отказа)

$$1 - \mathring{a}^{-\lambda_0 \Delta t} = 1 - (1 - \lambda_0 \Delta t) = \lambda_0 \Delta t,$$

где $\mathring{a}^{-\lambda_0 \Delta t} \approx 1 - \lambda_0 \Delta t$ – вероятность непоступления заявки.

Тогда вероятность перехода системы из z_0 в z_1 по теореме умножения первой и второй вероятностей равна

$$-P_0(t) \cdot \lambda_0 \Delta t.$$

Знак минус показывает уменьшение вероятности состояния z_0.

3. Вероятность перехода системы из z_1 в z_0 при обслуживании заявки за период Δt. Вероятность пребывания системы в состоянии z_1 равна

$$P_1(t).$$

Вероятность обслуживании заявки за период Δt равна

$$1 - \mathring{a}^{-\mu_1 \Delta t} = 1 - (1 - \mu_1 \Delta t) = \mu_1 \Delta t.$$

Аналогично вторая вероятность перехода системы из z_1 в z_0 по теореме умножения вероятностей равна

$$P_1(t) \cdot \mu_1 \Delta t.$$

Знак плюс показывает увеличение вероятности состояния z_0.

Вероятность состояния системы, включающего все три ситуации, находим по теореме сложения вероятностей:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - P_0(t) \cdot \lambda_0 \Delta t + P_1(t) \cdot \mu_1 \Delta t.$$

Перенесем $P_0(t)$ влево и разделим на Δt:

$$\frac{\Delta P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t) \cdot \lambda_0 + P_1(t) \cdot \mu_1.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим первое дифференциальное уравнение Колмогорова:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0 \lambda_0 + P_1 \mu_1.$$

Теперь рассмотрим граф СМО с тремя состояниями, считая, что в момент $t + \Delta t$ в системе находится n заявок (рис. 4).

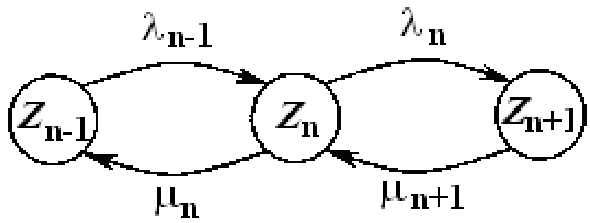

Рис. 4. Граф СМО с тремя состояниями

Перечислим возможные ситуации СМО:

1. Вероятность пребывания системы в состоянии z_0 в момент t:

$$P_n(t).$$

Число заявок в системе не меняется и равно n.

2. Вероятность перехода системы из z_n в z_{n+1} при поступлении заявки за период Δt:

$$-P_n(t)\cdot \lambda_n \Delta t.$$

3. Вероятность перехода системы из z_n в z_{n-1} при обслуживании заявки за время Δt:

$$-P_n(t)\cdot \mu_n \Delta t.$$

4. Вероятность перехода системы из z_{n-1} в z_n при поступлении заявки за время Δt:

$$P_{n-1}(t)\cdot \lambda_{n-1} \Delta t.$$

5. Вероятность перехода системы из z_{n+1} в z_n при обслуживании заявки за время Δt:

$$P_{n+1}(t)\cdot \mu_{n+1} \Delta t.$$

Вероятность состояния системы, включающего все пять ситуаций, находим по теореме сложения вероятностей:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) - P_n(t)\cdot \lambda_n \Delta t - P_n(t)\cdot \mu_n \Delta t + P_{n-1}(t)\cdot \lambda_{n-1} \Delta t + P_{n+1}(t)\cdot \mu_{n+1} \Delta t.$$

Перенесем $P_n(t)$ влево, разделим на Δt и, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим второе дифференциальное уравнение Колмогорова:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -P_n(\lambda_n + \mu_n) + P_{n-1}\lambda_{n-1} + P_{n+1}\mu_{n+1}.$$

Решение этих уравнений производится численными методами на ЭВМ. Однако решение первого уравнения для СМО с двумя состояниями может быть выполнено с помощью формулы полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)\, p_{Bi}(A),$$

где $P(A)$ – полная вероятность появления события A; $p(B_i)$ – безусловная вероятность; $p_{Bi}(A)$ – условная вероятность.

Событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий B_i.

Приведем пример расчета вероятностей для минимального графа СМО с заданными числовыми характеристиками (рис. 5).

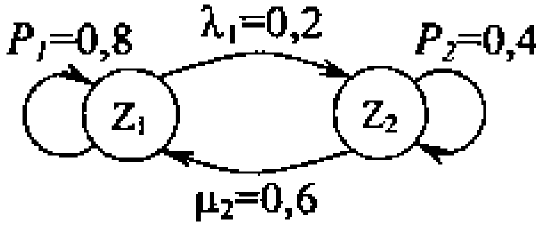

Рис. 5. Минимальный граф СМО с заданными числовыми характеристиками

Произвольно зададим распределение вероятностей на нулевом шаге $n = 0$ (начальный момент):

$p_{n=0} = (1,0)$, т.е. $p_{1б} = 1$ и $p_{2б} = 0$ (это безусловные вероятности).

Для 1-го шага ($n = 1$) находим:

$$p_{n=1}(z_1) = p_{1б} \cdot p_{1у} + p_{2б} \cdot \mu_2 = 1\cdot 0,8 + 0\cdot 0,6 = 0,8,$$

где $p_{1у} = 0,8$ и $\mu_2 = 0,6$ - условные вероятности (μ_2 увеличивает вероятность пребывания системы в состоянии z_1),

$$p_{n=1}(z_2) = p_{2б}\cdot p_{2у} + p_{1б}\cdot\lambda_1 = 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,2 = 0,2.$$

Для 2-го шага ($n = 2$) расчет ведем с учетом новых значений безусловных вероятностей $p_{n=1}(0,8; 0,2)$:

$$p_{n=2}(z_1) = 0,8\cdot 0,8 + 0,2\cdot 0,6 = 0,76,$$
$$p_{n=2}(z_2) = 0,2\cdot 0,4 + 0,8\cdot 0,2 = 0,24.$$

Уже при $n = 5$ имеем: $p_{n=5}(z_1) = 0,75008$ и $p_{n=5}(z_2) = 0,24992$.

При $n \to \infty$ получим предельные значения вероятностей, характерные для установившегося состояния системы

$$p_n(z_1) = 0,75;\ p_n(z_2) = 0,25.$$

Проведем проверку: $p_1 + p_2 = 0,75 + 0,25 = 1$.

Вероятности переходов независимы от начального состояния системы. Пусть начальное состояние будет: $p_{n=0} = (0,1)$, т.е. $p_{1б} = 0$ и $p_{2б} = 1$.

Тогда для $n = 1$ имеем:

$$p_{n=1}(z_1) = 0\cdot 0,8 + 1\cdot 0,6 = 0,6;$$
$$P_{n=1}(z_2) = 1\cdot 0,4 + 0\cdot 0,2 = 0,4,$$

а для $n = 2$:

$$p_{n=2}(z_1) = 0,72,\ p_{n=2}(z_2) = 0.28$$

и т.д. до $p_1 = 0,74976$ и $p_2 = 0,25024$.

В установившемся режиме вероятности состояний системы не меняются $p_n(t) = \text{const}$, производная $dp_n(t)/dt = 0$ и дифференциальные уравнения Колмогорова превращаются в алгебраические

$$p_0\lambda_0 = p_1\mu_1;\ p_n(\lambda_n + \mu_n) = p_{n-1}\lambda_{n-1} + p_{n+1}\mu_{n+1}.$$

Последовательно задавая $n = 1,2,...$ во втором уравнении, получим систему

$$p_0\lambda_0 = p_1\mu_1;\ p_1\lambda_1 = p_2\mu_2;\ ...\ p_n\lambda_n = p_{n+1}\mu_{n+1}.$$

Например, при $n = 1$ имеем

$$p_1(\lambda_1 + \mu_1) = p_0\lambda_0 + p_2\mu_2.$$

Подставляя в это уравнение $p_0\lambda_0 = p_1\mu_1$, получим $p_1\lambda_1 = p_2\mu_2$.

Из полученной системы найдем значения вероятностей

$$p_1 = p_0\frac{\lambda_0}{\mu_1};\ p_2 = p_0\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2};\ ...\ p_n = p_0\frac{\lambda_0\lambda_1..\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2..\mu_n}.$$

При вычислении p_i необходимо дополнительно использовать условие

$$p_0 + p_i = 1,\ \text{откуда}\ p_i = 1 - p_0.$$

Используя полученные уравнения установившегося режима, вычислим предельные значения вероятностей p_1 и p_2 СМО с двумя состояниями (см. рис. 5)

$$p_2 = p_1\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}\ \text{и}\ p_1 = 1 - p_2.$$

Подставив p_1 в первое уравнение, получим

$$p_2 = (1 - p_2)\frac{\lambda_1}{\mu_2},\ \text{откуда}\ p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2 + \lambda_1} = 1/4 = 0,25\ \text{и}\ p_1 = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Как видим, эти значения вероятностей p_1 и p_2 совпадают со значениями, полученными с помощью формулы полной вероятности.

Таким образом, задавая входную (λ) и выходную (μ) характеристики стационарной СМО с двумя состояниями, можно легко вычислять вероятности состояний системы, что важно при проектировании отказоустойчивых автоматизированных комплексов и линий.

Вывод

Предложена методика расчета вероятностей состояний системы массового обслуживания, позволяющая установить оптимальную зависимость между числом каналов обслуживания и их производительностью, которая предполагает минимизацию затрат на каналы обслуживания и потерь, связанных с простоями технологического оборудования. Результаты моделирования используются для структурного и параметрического синтеза технической системы с оптимизацией ее по важнейшим параметрам: производительность, надежность, экономическая эффективность.

Библиографический список

1. **Иванов, А.А.** Автоматизация технологических процессов и производств: учеб. пособие / А.А. Иванов. – М.: ФОРУМ, 2011. − 224 с.
2. **Саломатин, Н.А.** Имитационное моделирование в оперативном управлении производством / Н.А.Саломатин [и др.]. – М.: Машиностроение, 1984. – 208 с.
3. **Гмурман, В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1975. – 333 с.
4. **Зельдович, Я.Б.** Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. − М.: Наука, 1965. – 616 с.

Дата поступления
в редакцию 28.01.2013

A.A. Ivanov

OBJECT MODELING OF THE AUTOMATED PRODUCTION BASED ON THE THEORY OF MASS SERVICE

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: Some optimal dependence between the number of some service channels and their productivity is established. It proposes as a result to minimize expenditures of labour and some losses connected with the technological equipment standing idle.

Methodology: There is some mathematical model of the mass service system (MSS) given as some oriented graph with some service procedure setpoints. Besides the intensity of orders and service is also taken into consideration Meanwhile some assumption is adopted that Puasson flows are widely spread in MSS. It is important to know that the system functioning process is Markov random process. For example, for computing system state probabilities some basic equations of MSS are employed.

Findings: It is possible, for example to fulfil the base equation solution for MSS with two states with the help of the total probability formula. By analogy such equations for more complicated MSS can be solved with the help of numerical computation. As a result, if input and output characteristics of the stationary MSS are given it is possible to computerize some probabilities of its states rather quickly. It should be noted it is very important while designing fault-tolerant automated complexes and lines.

Research limitations/implications: The present study provides methodology of computerizing some probabilities of MSS states. Moreover, this methodology makes it possible to establish optimal dependence between the number of service channels and their productivity.

Key words: mass service system, system state probability, intensity of orders and service, queue discipline.