МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 53.072

В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, И.Н. Толкачев

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОГО ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ПРОЦЕССА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Хорошо известно, что в логистической модели $x_{n+1} = a\left(x_n - x_n^2\right)$, $0 < a \le 4$, последовательность $\{x_n\}$ может вести себя стохастическим образом. Однако в литературе нет сведений о вероятностных характеристиках этой последовательности таких, как функция распределения и моменты. В статье приводятся результаты обширных вычислений, восполняющие этот пробел.

Ключевые слова: хаос, асимптотическая периодичность, окна периодичности, гистограмма, центрированные моменты.

Сочетание «вероятностный» и «детерминированный» при изучении математических моделей представлялось бы необычным до обнаружения стохастических свойств процессов, описываемых сравнительно простыми уравнениями. В первую очередь, это относится к открытию Лоренцом «странного аттрактора» и к изучению рекуррентных последовательностей типа $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$. Из последних наиболее известна (и замечательна) так называемая логистическая модель, в которой $f(x) = a\left(x - x^2\right)$. Качественное понимание явлений в этой модели достигнуто уже давно (см. [1]), однако некоторые вопросы остаются нерешенными. Это объясняется тем, что адекватный математический аппарат для исследования подобных моделей еще не создан и большую часть результатов приходится получать численными методами, не всегда вызывающими доверие у исследователей, предпочитающих строгие доказательства. В этой статье, примыкающей к [4], численными методами оцениваются функция распределения и моменты логистической модели, рассматриваемой как временной ряд или динамическая система.

1. В качестве справочного материала приведем основные сведения о логистической модели [1]–[4]. В рекуррентном соотношении

$$x_{n+1} = a\left(x_n - x_n^2\right) \tag{1}$$

параметр a берется из интервала [0, 4]. Это обеспечивает принадлежность x_n интервалу [0,1],если из того же интервала берется начальное значение x_0. При a<3,56994567 поведение траектории достаточно простое. Либо существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, либо (при a>3) почти все траектории асимптотически периодичны с периодами $2 \cdot 2^k (k \ge 0)$. Имеются m – окна периодичности, где траектория асимптотически периодична с периодами $m \times 2^k$. Например, 3-окно имеет место при $1+\sqrt{8}<a<3{,}8496...$.Между окнами периодичности находятся интервалы стохастичности, а нас интересуют вероятностные характеристики траекторий из этих интервалов.

2. Предварим приведение результатов численных расчетов, изложением некоторых теоретических сведений о предполагаемых законах распределения стохастичности в логистической модели.

Предложение 1. При $a>1$ и начальном значении x_0 из интервала $[\alpha,\beta]$, где $\beta=\frac{a}{4}$, $\alpha=\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{16}$, все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат тому же интервалу.

Доказательство элементарно и заключается в проверке нужных неравенств. Отметим попутно, что $\alpha<\beta$.

Предложение 2. Если $0<x_0<\alpha$ и $a>2$, то начиная с некоторого n члены последовательности $\{x_n\}$ попадают в интервал $[\alpha,\beta]$.

Доказательство. $x_{n+1}>x_n \Rightarrow a(1-x_n)>1 \Rightarrow x_n<1-\frac{1}{a}$.

Разность $1-\frac{1}{a}-\alpha=1-\frac{1}{a}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{16}=\frac{1}{16a}(a-2)^3(a+2)>0$, при $a>2$. Поэтому, если бы члены последовательности $\{x_n\}$ лежали вне $[\alpha,\beta]$, то последовательность возрастала бы. Но тогда она имела бы предел, который, как нетрудно видеть, был бы равен $1-\frac{1}{a}>\alpha$. Противоречие.

Предложение 3. Пусть $F(x)-$ функция распределения стохастической величины X, чьи значения являются значениями членов последовательности $\{x_n\}$.

Тогда $F(x)=0$, при $x<\alpha$, $F(x)=1$, при $x>\beta=\frac{a}{4}$.

Доказательство. По закону больших чисел $F(x)$ есть предел статистической функции распределения $F_N^*(x)$, построенной по экспериментальным данным x_n для $n<N$, при $N\to\infty$. Предложения 1 и 2 обеспечивают $F(x)=0$ при $x<\alpha$. Второе утверждение следует из того, что $x_{n+1}\le \max a\left(x-x^2\right)=\frac{a}{4}$, т.е. самое большее x не может быть вне $[\alpha,\beta]$.

Естественно задаться вопросом, какую часть $[\alpha,\beta]$ занимают значения x_n при $x_0\in[\alpha,\beta]$. Неожиданными оказались экспериментальные данные, полученные для $x_1,x_2,...,x_{100}$ (табл. 1). В качестве x_0 было взято 0,5.

Таблица 1

a	$\min x_n$	$\max x_n$	α	β
3,5	0,382819	0,874997	0,382813	0,875
3,6	0,324364	0,899870	0,324000	0,900
3,7	0,258610	0,924388	0,256688	0,925
3,74	0,227476	0,934940	0,227299	0,935
3,8	0,180531	0949989	0, 180500	0,950
3,9	0,095062	0,974974	0,095062	0,975

Эти данные оправдывают предложение, что $\alpha=\inf\limits_{F(x)>0}(x)$, $\beta=\sup\limits_{F(x)<1}(x)$.

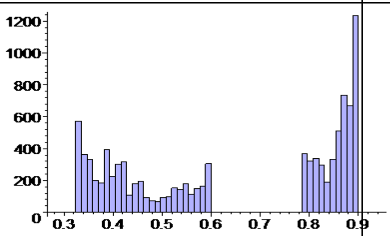
3. При исследовании распределения значений последовательности $\{x_n\}$ внутри интервала $[\alpha,\beta]$ следует учитывать два обстоятельства. Относительно теоретической функции распределения $F(x)$ a priori неизвестно, обладает ли она плотностью вероятностей. Если рассматривать значения a, не входящие в области стохастичности, то это заведомо не так.

Асимптотическая периодичность ведет к тому, что при $N\to\infty$ частоты появления определенных значений будут стремиться к нулю для тех из них, которые отличаются от значений предельной периодической траектории. Распределение становится дискретным и $F'(x)$ не существует.

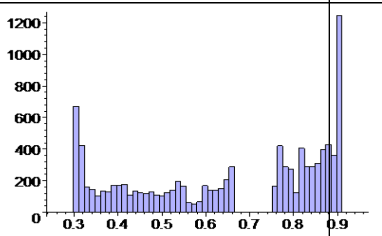
Случай $a=4$ дает иное. Здесь есть явное выражение для x_n: $x_n=\sin^2(2^n t)$. Поведение x_n зависит от поведения $2^n t$ по $\operatorname{mod}\pi$, т.е. от двоичного разложения числа $\frac{t}{\pi}$, определенного начальным условием. Из метрической теории чисел известно, что в двоичных разложениях почти всех чисел значения 0 и 1 встречаются одинаково часто, т.е. $2^n t \operatorname{mod}\pi$ распределено равномерно на $[0,\pi]$. Отсюда легко найти и распределение x_n. Его плотность дается выражением $f(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Таблица 2

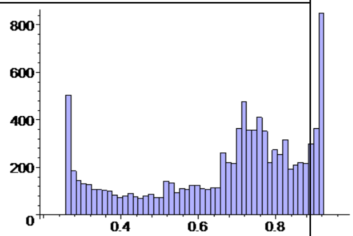
***a*=3,60**



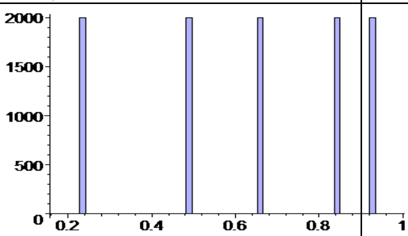
***a*=3,64**



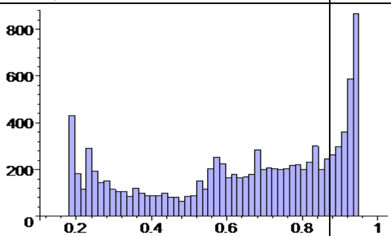
***a*=3,70**



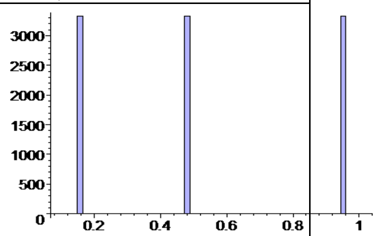
***a*=3,74**



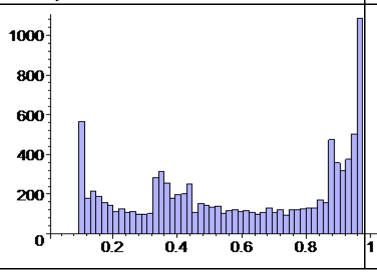
***a*=3,80**



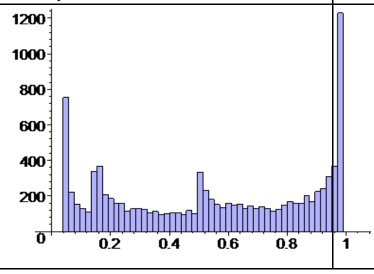
***a*=3,84**



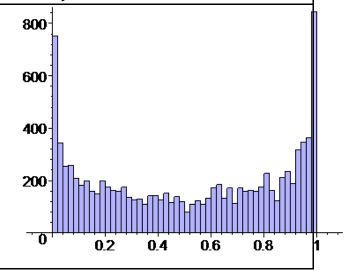
***a*=3,90**



***a*=3,96**



***a*=4,00**



Другое обстоятельство связано с проведением компьютерных вычислений. Компьютерная ошибка в вычислении x_n и растет экспоненциально порядка a^n. Действительно, если ошибка в определении x_n есть Δ_n, то $\Delta_{n+1}\approx a(1-2x_n)\Delta_n$. Поскольку a в расчетах >3, то погрешность даже при сравнительно небольших n становится существенной. Фактически при вычислении происходит усреднение значений x_n для различных начальных данных. Отсюда следует, что при построении гистограмм зависимость от начального значения x_0 должна мало проявляться. Так оно и оказалось в результате расчетов. В табл. 2 приводится ряд гистограмм, полученных по 10000 первых значений x_n. Интервал $[0,1]$ делится на 50 подинтервалов так, что основания прямоугольников в гистограммах равны 0,02.

Визуальный анализ гистограмм приводит к следующим выводам. Наличие лакун (при $a = 3{,}60$ и $a = 3{,}64$) означает, что область значений x_n может быть несвязной. Далее наличие больших выбросов свидетельствует в пользу разрывности функции распределения. Гистограмма для $a = 3{,}84$ соответствует траектории из 3-окна. Последняя асимптотически периодична с периодом 3. Периодичность именно асимптотическая, т.е. разность $x_{n+3} - x_n$ лишь стремится к 0 при $n \to \infty$, но от нуля отлична. Аналогичный вывод можно сделать в случае $a = 3{,}74$. Соответствующая траектория находится в 5-окне. Это объясняет результат, полученный из вычисления показателя Херста. Значение показателя для $a = 3{,}74$ должно быть равно нулю, как это имеет значение для окон периодичности. Может показаться неожиданным, что 5-окно находится между 2- и 3-окнами. Наконец, при $a = 4$ наблюдается очень хорошее приближение к теоретическому распределению.

4. Оценки математического ожидания и центральных моментов производились по формулам:

$$x = \frac{1}{N}\sum_{N \le n} x_n, \quad m_k = \frac{1}{n}\sum_{n \le N} (x_n - x)^k .$$

Значение *N* бралось равным 10 000. Результаты для тех же значений a, которые использовались для составления таблицы, приведены в табл. 3.

Таблица 3

a	**3,60**	**3,64**	**3,70**	**3,74**
x	0,6464541941	0,6533017856	0,6676716338	0,6316760141
M_2	0,04898453	0,04701964	0,04144264	0,06375505
M_3	-0,00186490	-0,00347736	-0,00572293	-0,00624473
M_4	0,00306926	0,00347182	0,00392354	0,00749077
M_5	-0,00028323	-0,00055998	-0,00102891	-0,00156973
M_6	0,00021872	0,00031283	0,00048794	0,00104617
M_7	-0,00003200	-0,00007250	-0,00016274	-0,00030166
M_8	0,00001706	0,00003165	0,00006848	0,00015754
M_9	-0,00000330	-0,00000884	-0,00002521	-0,00005307
M_{10}	0,00000142	0,00000343	0,00001019	0,00002462

Таблица 3(продолжение)

a	**3,80**	**3,84**	**3,90**	**3,96**	**4,00**
x	0,6417085596	0,5323780944	0,5919962520	0,5487472755	0,5026727803
M_2	0,06104216	0,11030207	0,08973320	0,10906247	0,1243422651
M_3	-0,00728511	0,00721588	-0,00494431	-0,00398569	-0,000618231
M_4	0,00717988	0,01825103	0,01273429	0,01859092	0,023235929
M_5	-0,00175536	0,00198922	-0,00187597	-0,00157263	-0,000237661
M_6	0,00106262	0,00307232	0,00216739	0,00357068	0,004832788
M_7	-0,00035399	0,00046080	-0,00052327	-0,00049327	-0,000075173
M_8	0,00017796	0,00052279	0,00041192	0,00073432	0,001056232
M_9	-0,00006863	0,00009841	-0,00013167	-0,00014187	-0,000022033
M_{10}	0,00003197	0,00008984	0,00008421	0,00015846	0,000237533

Начальное значение x_0 для табличных данных выбрано равным 0,6, кроме случая $a = 4$, где $x_0 = 0{,}8$. Однако проводились вычисления и для других значений. Так, для $x_0 = 0{,}6$

и $x_0 = 0{,}8$ разница результатов наблюдалась в 3 и 4-м знаках. Исключение составил случай $a = 4$. Для него при $x_0 = 0{,}6$ получилось $x = 0{,}515654$, $M_2 = 0{,}120855$. Причина сравнительно больших расхождений объясняется тем, что $x_0 = 0{,}5$ приводит к $x_n = 0$ и $N = 10000$ недостаточно для получения более точных оценок при x_0 близком к 0,5. При $x_0 = 0{,}8$ табличные данные можно сравнить с теоретическими. Последние проще всего получить следующим образом.

Из $x_n = \sin^2\left(2^n t\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2^{n+1} t\right)$ следует, что $x = \frac{1}{2}$. Для получения точных значений M_k надо усреднить значения $\left(-\frac{1}{2}\cos\lambda\right)^k$ в предположении равномерного распределения λ. Но $\left(-\frac{1}{2}\cos\lambda\right)^k = \left(\frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{4}\right)^k$.

Биномиальное разложение и обращение в нуль среднего значения экспоненты дает $M_k = \frac{C_k^{k/2}}{2^{2k}}$ при k четном и 0 при k нечетном. Здесь $C_k^{k/2}$ – биномиальный коэффициент. Числовые значения таковы: $x = 0{,}5$; $M_2 = 0{,}125$; $M_4 = 0{,}023438$; $M_6 = 0{,}004883$; $M_8 = 0{,}001068$; $M_{10} = 0{,}000240$

5. Определенный интерес представляет вопрос о существовании и нахождении периодических последовательностей $\{x_n\}$. Для последовательности периода k имеем $x_{n+k} = x_n$ для всех n. Достаточно, впрочем, рассматривать это уравнение при $n = 0$: $x_0 = x_k$. Вывод, сделанный при анализе табл. 1, позволяет ввести замечательный класс периодических последовательностей, для которых $x_0 = \frac{a}{4}$. Уравнение $x_0 = x_k$ превращается в алгебраическое уравнение степени $2^{k+1} - 1$ относительно a.

Здесь мы не будем анализировать это уравнение, а приведем лишь результаты численного счета для некоторых k:

- $\boldsymbol{k = 2}$. Уравнение седьмой степени для a имеет корнями 0, 2, $1 \pm \sqrt{5}$, причем ненулевые корни имеют кратность 2. Нетривиален лишь случай $a = 1 + \sqrt{5}$, приводящий к последовательности из 2-окна периодичности;
- $\boldsymbol{k = 3}$. Уравнение 15-й степени для a имеют семь действительных корней – 0, 2 (кратности 2), $\lambda = 3{,}831874...$ и $2 - \lambda$ (оба кратности 2). И здесь нетривиален лишь случай $a = \lambda$, приводящий к последовательности из 3-окна периодичности;
- $\boldsymbol{k = 4}$. Из 31 корня действительными являются – 15. Это 0, 2, $1 \pm \sqrt{5}$, $\lambda_1 = 3{,}498561...$, $\lambda_2 = 3{,}960270...$, $2 - \lambda_1$, $2 - \lambda_2$. Ненулевые корни имеют кратность 2. Значение $a = \lambda_1$ принадлежит 2-окну, но другое $a = \lambda_2$ выходит за его пределы. Период последовательности составляют $x_0 = 0{,}998067$, $x_1 = 0{,}038944$, $x_2 = 0{,}148224$, $x_3 = 0{,}500000$. Расчеты для a, близких к λ_2, показывают, что λ_2 принадлежит 4-окну периодичности;
- $\boldsymbol{k = 5}$. Здесь выявляются три 5-окна, соответствующие $a = 3{,}738914913$; $3{,}905766470$; $3{,}990267047$. Укажем период для первого из этих значений: $x_0 = 0{,}934728$; $x_1 = 0228114$; $x_2 = 0{,}658342$; $x_3 = 0{,}840985$; $x_4 = 0{,}500000$.

Библиографический список

1. **Берже, П.** Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М.: Мир, 1991.
2. **Лихтенберг, А.** Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М.: Меркурий Пресс, 2000.
3. Хаос и две задачи Рамануджана / В.М. Галкин [и др.] // Прогрессивные технологии в Машино- и приборостроении: сб. ст. – Н.Новгород – Арзамасс, 2010.
4. **Галкин, В.М.** Логистическое отображение: некоторые экспериментальные данные / В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, И.Н.Толкачев // Труды НГТУ. 2011. №4(91).

Дата поступления
в редакцию 19.02.2013

V.M. Galkin, L.N. Erofeeva, I.N. Tolkachev

THE PROBABILITY CHARACTERISTICS OF A DETERMENING PROCESS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

The aim of this paper is to give some information about the stochastic behavior of the sequence $\{x_n\}$. This sequence is recurrent one and $x_{n+1} = a\left(x_n - x_n^2\right), 0 < a \le 4$. The histograms and central moments M_n (n<10) for some values of a are given. The remarkable class of the periodic sequences is founded.

Key words: Haos, asimptotic periodicy, periodicy windows, histogram, central moments.