

УДК 537.874.6

А.В. Громов, Ы. Ким, С.Е. Фильченков

РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ ПЛАНАРНОГО ВОЛНОВОДА

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

Рассмотрено применение метода интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода к решению четырех взаимно сопряженных задач о рассеянии плоских волн на решетках из идеально проводящих стержней произвольной формы и размеров, и о рассеянии волн планарных волноводов на тех же стержнях. Метод отличается высокой скоростью расчетов и возможностью использования стержней достаточно произвольного сечения, в том числе и с внутренними полостями.

Ключевые слова: дифракция плоских волн, планарный волновод, граничные интегральные уравнения, функция Грина.

Рассматривается задача переизлучения собственной волны плоского волновода на неоднородности.

Волновод представляет собой две параллельные плоскости $z=0$ и $z=L/2$, на одной из которых ($z=0$) находится гладкая неоднородность S (рис. 1). В декартовых координатах ее образующая задана параметрически :

$$x = X(l), z = Z(l), 0 \leq l \leq S_l/2, X(0) = x_1, X(S_l/2) = x_2, Z(0) = Z(S_l/2) = 0, \quad (1)$$

где l - длина дуги; $X(l), Z(l)$ - непрерывные кусочно-дифференцируемые функции. Вся задача однородна вдоль оси Y .

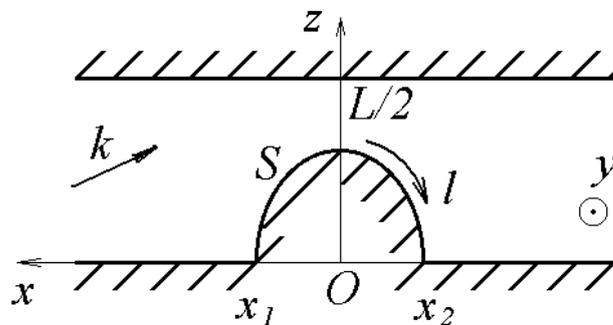


Рис. 1

Рассмотрим волновой процесс в вакууме с зависимостью от времени в виде $\exp(-i\omega t)$. Запишем уравнения Максвелла в Гауссовой системе для комплексных величин:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{\mathbf{H}} = -ik\vec{\mathbf{E}} \\ \text{rot } \vec{\mathbf{E}} = ik\vec{\mathbf{H}} \end{cases}, \quad (2)$$

где $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{H}}$ - вектора напряженностей электрического и магнитного полей соответственно; $k = \omega/c$ - волновое число; c - скорость света в вакууме.

Не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать волны, однородные вдоль оси Y , для которых выполняется

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0 . \quad (3)$$

Сначала рассмотрим волны с магнитной поляризацией вдоль оси Y , для которых $E_y = 0, H_y \neq 0$, а уравнения Максвелла (2) в декартовых координатах имеют вид

$$\begin{cases} E_x = -\frac{i}{k} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ E_y = 0 \\ E_z = \frac{i}{k} \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases}, \begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ H_z = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Эти волны описываются одной составляющей магнитного поля

$$\vec{H} = \vec{e}_y H_y(x, z), \quad (5)$$

удовлетворяющей скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta H_y + k^2 H_y = 0. \quad (6)$$

Границы волновода считаем идеально проводящими, поэтому граничные условия на их внутренней стороне

$$\vec{E}_\tau \Big| = 0 \quad (7)$$

для магнитного поля выглядят

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{z=L/2-0} = \left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{z=+0} = \left. \frac{\partial H_y}{\partial n} \right|_{S+0} = 0 . \quad (8)$$

$\begin{matrix} z = +0 \\ x \geq x_1 \\ x \leq x_2 \end{matrix}$

Разделим полное поле на две части:

$$H_y(x, z) = H_{\text{ext}}(x, z) + H(x, z) . \quad (9)$$

Здесь H - поле, рассеянное на неоднородности, а H_{ext} - приходящая из $x = \infty$ распространяющаяся в плоском волноводе волна

$$H_{\text{ext}}(x, z) = \exp(-ig_n x) \cos(ih_n z) , \quad (10)$$

где $h_n = n \frac{2\pi}{L}$; $g_n^2 = k^2 - h_n^2 \geq 0, n \in Z$.

Воспользуемся тем, что плоские границы являются идеально проводящими, и отразим волновод зеркально относительно граничных плоскостей (при этом структура поля в рассматриваемой области не изменится). В результате получим задачу о дифракции плоской волны (10) на системе, состоящей из периодически расположенных симметричных стержней (рис. 2):

$$W \equiv S \cup S_c : \begin{cases} X(l) = X(S_l - l) \\ Z(l) = -Z(S_l - l) \end{cases}, 0 \leq l \leq S_l, \quad (11)$$

где S_c - линия, зеркально симметричная S относительно плоскости $z = 0$.

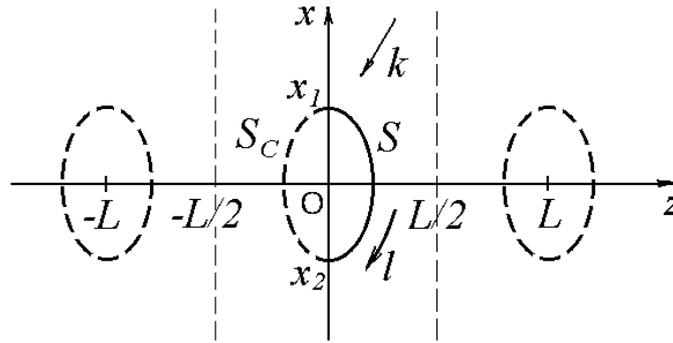


Рис. 2

Решение подобной задачи методом граничных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода подробно изложено в [1]. Суть его состоит в том, что решение периодической задачи ищем в виде интеграла типа потенциала простого слоя на периоде

$$H(x, z) = \int_W \alpha(\bar{l}) G(x, z, X(\bar{l}), Z(\bar{l})) d\bar{l} . \tag{12}$$

Здесь $\alpha(l)$ - неизвестная периодическая функция, определенная на линии W ; $G(x, z, X, Z)$ - функция Грина двумерной периодической задачи, для которой используют представление в виде ряда по пространственным гармоникам

$$G(x, z, X, Z) = \frac{\pi i}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(ig_m|x-X| + ih_m \frac{2\pi}{L}(z-Z)\right)}{g_m} , \tag{13}$$

$\text{Im } g_m \geq 0$. Члены ряда (13) при $|m| \rightarrow \infty$ имеют асимптотику

$$\frac{1}{|m|} \exp\left(-|m| \frac{2\pi}{L}|x-X|\right) \exp\left(im \frac{2\pi}{L}(z-Z)\right).$$

Потенциал (12) непрерывен, непрерывно дифференцируем вне линии (11), имеет правильную нормальную производную на W извне, которая равна

$$\frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{W+0} = -\pi\alpha(l) + \int_W \alpha(\bar{l}) \frac{\partial G(X(l), Z(l), X(\bar{l}), Z(\bar{l}))}{\partial n} d\bar{l} . \tag{14}$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Тогда из (8) с учетом (9) и (10) получаем интегральное уравнение на неизвестную функцию $\alpha(l)$:

$$\begin{aligned} & -\pi\alpha(l) - \frac{\pi}{L} \int_W \alpha(\bar{l}) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[Z'(l) \text{sign}(X(l) - X(\bar{l})) - \frac{h_m}{g_m} X'(l) \right] \times \\ & \times \exp\left[ig_m|X(l) - X(\bar{l})| + im \frac{2\pi}{L}(Z(l) - Z(\bar{l}))\right] d\bar{l} = \\ & = i[g_n Z'(l) \cos(h_n Z(l)) - h_n X'(l) \sin(h_n Z(l))] \exp[-ig_n X(l)] \end{aligned} \tag{15}$$

При численной реализации перейдем к новой переменной t :

$$l = l(t) , l'(t) \geq 0 , l(t + 2\pi) = l(t) + S_l \tag{16}$$

с произвольной $l(t)$, которая выражает дискретное описание профиля (1), и к новой неизвестной функции

$$\beta(t) = -\pi\alpha[l(t)]l'(t) . \tag{17}$$

Уравнение (15) при этом примет вид, инвариантный относительно координаты интегрирования:

$$\beta + \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \bar{\beta} Q(X, Z, \bar{X}, \bar{Z}) d\bar{t} = i [g_n Z' \cos(h_n Z) - h_0 X' \sin(h_n Z)] \exp(-ig_n X). \quad (18)$$

Здесь введено обозначение ядра

$$Q(X, Z, \bar{X}, \bar{Z}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[Z' \operatorname{sign}(X - \bar{X}) - \frac{h_m}{g_m} X' \right] \exp \left[ig_m |X - \bar{X}| + im \frac{2\pi}{L} (Z - \bar{Z}) \right]. \quad (19)$$

Введение новой переменной t позволяет использовать уравнение (18) для профилей, имеющих конечное число точек нарушения гладкости.

Следует отметить, что однородное уравнение (18) описывает собственные волны с магнитной поляризацией исходного плоского волновода, а однородное уравнение (18) с изменением знака перед интегралом – собственные волны волновода внутри профиля W .

Интегральное уравнение (18) решается методом Галеркина с базисной системой $\{\exp(ipt)\}$. При этом получается бесконечная система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$b_p + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_{pj} b_j = f_p, \quad (20)$$

где b_p - коэффициенты Фурье искомой функции $\beta(t)$; B_{pj} - коэффициенты Фурье ядра уравнения (18):

$$B_{pj} = \frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(X, Z, \bar{X}, \bar{Z}) \exp(i(j\bar{t} - pt)) d\bar{t} dt, \quad (21)$$

а f_p - коэффициенты Фурье правой части уравнения (18).

Для улучшения сходимости ряда ядра (19) была выделена его главная часть с известной суммой:

$$\begin{aligned} AQ(X, Z, \bar{X}, \bar{Z}) &= \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[Z' \operatorname{sign}(X - \bar{X}) + iX' \operatorname{sign}(m) \right] \exp \left[- \left| m \frac{2\pi}{L} \right| |X - \bar{X}| + im \frac{2\pi}{L} (Z - \bar{Z}) \right] = \\ &= \frac{Z' \operatorname{sh}(X - \bar{X}) - X' \sin \frac{2\pi}{L} (Z - \bar{Z})}{ch |X - \bar{X}| - \cos \frac{2\pi}{L} (Z - \bar{Z})} - Z' \operatorname{sign}(X - \bar{X}) \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение (22) содержит устранимую особенность типа $\frac{0}{0}$.

Для численной реализации используем конечную систему линейных уравнений

$$b_p^d + \sum_{j=-M}^M B_{pj}^d b_j^d = f_p^d, \quad p = \overline{-M, M}, \quad (23)$$

где B_{pj}^d - дискретное преобразование Фурье ядра (19).

Точность, достигаемая в расчетах при заданном числе гармоник M и числе точек дискретизации профиля (не менее $(2M + 1)$), контролировалась скоростью убывания старших гармоник решения, и – оперативно – выполнением закона сохранения энергии, который в нашем случае записывается как

$$\sum_{m, \text{Im } g_m = 0} \left| \frac{g_m}{g_0} \right| |A_m|^2 = 1, \quad (24)$$

где A_m - коэффициенты разложения поля $H(x, z)$ по пространственным гармоникам вдали от поверхности (1):

$$H(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp\left(ig_n x + in \frac{2\pi}{L} z\right) \quad \text{при } x > x_1. \quad (25)$$

Для волн с электрической поляризацией вдоль оси Y , для которых $E_y \neq 0$, $H_y = 0$, уравнения Максвелла (2) в декартовых координатах имеют вид

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\frac{i}{k} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \\ E_z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} H_x = \frac{i}{k} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ H_y = 0 \\ H_z = -\frac{i}{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}. \quad (26)$$

Такие волны описываются одной составляющей электрического поля

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_y(x, z), \quad (27)$$

которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta E_y + k^2 E_y = 0. \quad (28)$$

Идеально проводящий металл границы приводит к граничной задаче Дирихле для полного поля

$$E_y|_{S+0} = 0, \quad (29)$$

или для рассеяного поля

$$E|_{S+0} = -E_{\text{ext}}|_{S+0}, \quad (30)$$

где, как и в (9), выделена приходящая распространяющаяся плоская волна

$$E_{\text{ext}}(x, z) = \exp(-ig_n x) \sin(h_n z) \quad (31)$$

с обозначениями (10).

Как и ранее, при зеркальном отражении волновода получаем задачу дифракции плоской волны на периодической структуре, решение которой ищем в виде периодического по z интеграла типа потенциала двойного слоя:

$$E(x, z) = \int_w \alpha(\bar{l}) \frac{\partial G(x, z, X(\bar{l}), Z(\bar{l}))}{\partial n} d\bar{l}, \quad (32)$$

где $G(x, z, X, Z)$ - функция Грина (13).

Потенциал (32) непрерывен вне линии (11) и на ней, а его предельное значение извне равно

$$E|_{W+0} = \pi\alpha(l) + \int_{s_l} \alpha(\bar{l}) \frac{\partial G(X(l), Z(l), X(\bar{l}), Z(\bar{l}))}{\partial n} d\bar{l}, \quad (33)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. После перехода к новой переменной (16) и неизвестной функции $\beta = \pi\alpha(l(t))$, из (30)–(33) получаем интегральное уравнение для задачи рассеяния волн с электрической поляризацией:

$$\beta + \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \bar{\beta} U(X, Z, \bar{X}, \bar{Z}) d\bar{t} = \exp(-ig_n X) \sin(h_n Z) \quad (34)$$

с ядром

$$U(X, Z, \bar{X}, \bar{Z}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\bar{Z}' \operatorname{sign}(X - \bar{X}) - \frac{h_m}{g_m} \bar{X}' \right] \exp \left[ig_m |X - \bar{X}| + im \frac{2\pi}{L} (Z - \bar{Z}) \right]. \quad (35)$$

Решается это уравнение описанным выше способом.

Как указано ранее, однородное уравнение (34) описывает собственные волны исходного плоского волновода, а при изменении знака перед интегралом – волновода внутри профиля W .

Далее приведены рис. 3 – рис. 6, иллюстрирующие расчеты уравнения (18) (магнитная поляризация) в случае нулевой распространяющейся гармоники ($n = 0$ в правой части уравнения) с волновым числом $k = 4$ для волноводов $L/2 = \pi$ с неоднородностью в виде полуокружностей с радиусом $\pi/8$ (рис. 3, 4) и радиусом $3\pi/8$ (рис. 5, 6).

На рис. 3 и рис. 5: e – профиль неоднородности в координатах z и x с эквидистантной сеткой точек описания ($1 < p \leq M = 65$); a, b – координаты z и x в сетке точек описания профиля; c, d – модуль и фаза решения в той же сетке; f – модуль логарифма гармоник решения.

На рис. 4 и рис. 6 показаны первые 12 коэффициентов разложения отраженного A_n и прошедшего B_n полей: их модуль (Abs), фаза Arg и плотность мощности P.

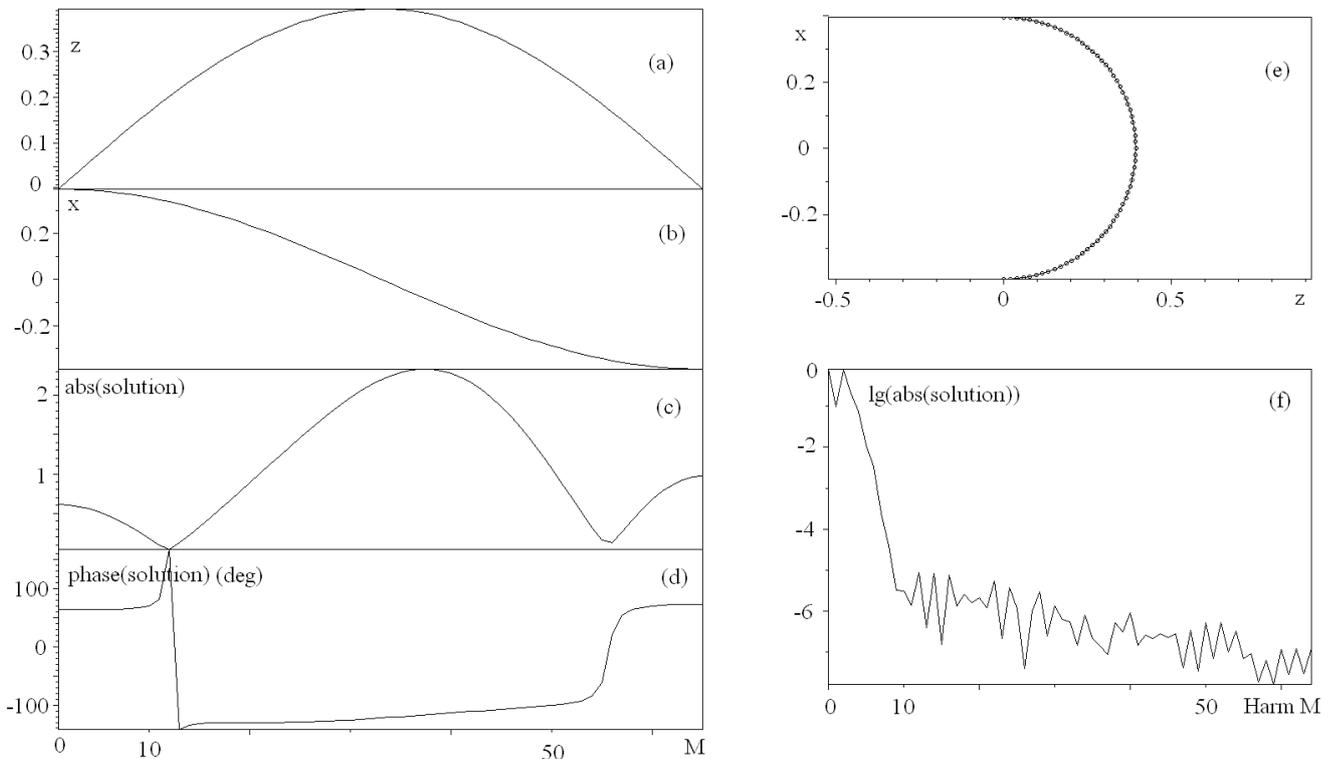


Рис. 3

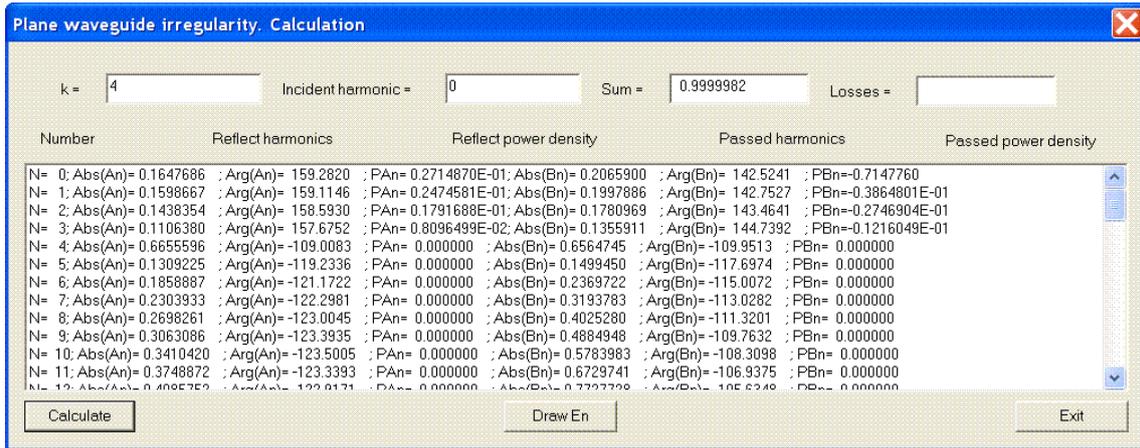


Рис. 4

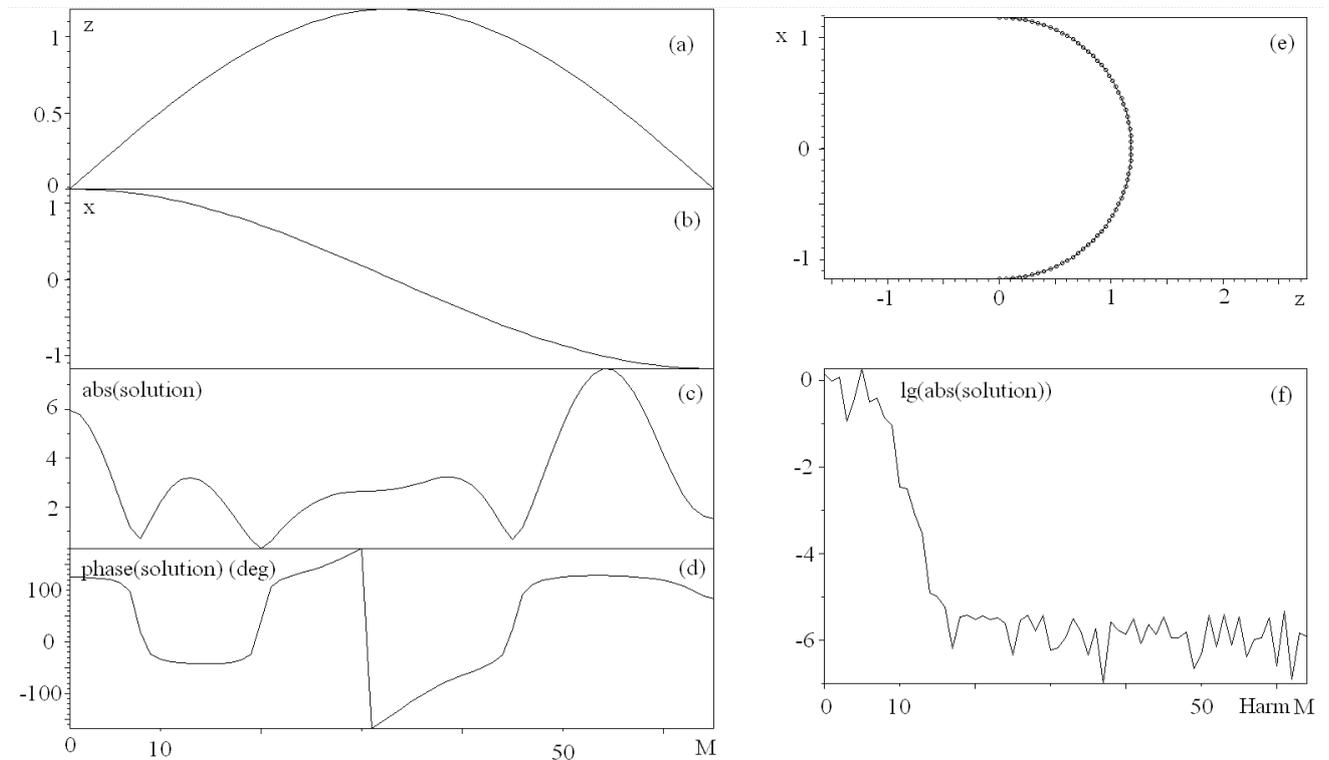


Рис. 5

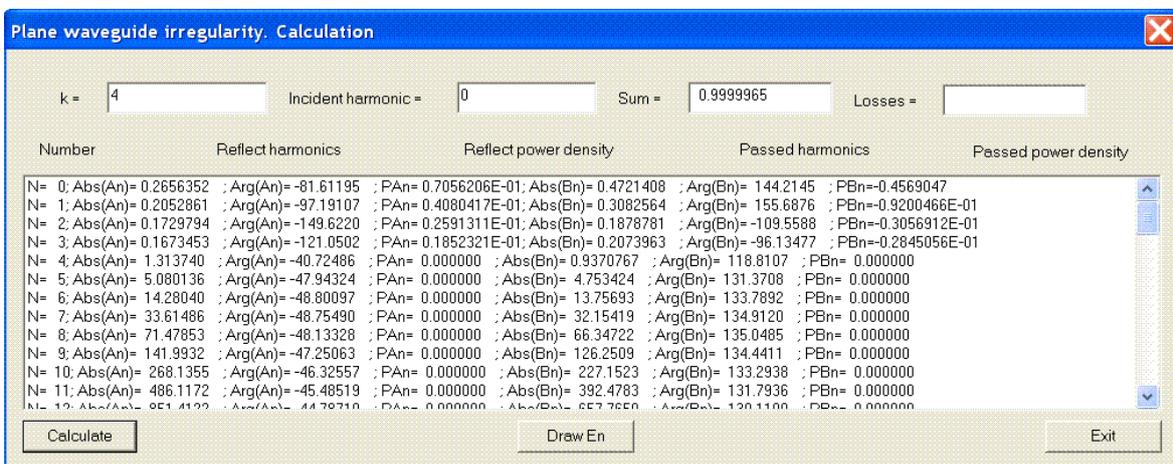


Рис. 6

Время расчета составляет порядка 1 с для процессора Intel Core Quad 2.83 GHz.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Ковалеву Н.Ф. за полезные дискуссии на предмет данной работы.

-
1. **Petelin, M.I.** Quasi-optical diffraction grill for excitation of lower-hybrid waves in tokamaks / M.I. Petelin [et al.] // Plasma Phys. Control. Fusion. 1996. 38. P. 593–610.

*Дата поступления
в редакцию 15.07.2013*

A.V. Gromov, E. Kim, C.E. Filchenkov

WAVE SCATTERING ON THE PLANE WAVEGUIDE NONHOMOGENEITIES

Institute of Applied Physics Russian Academy of Science, Nizhny Novgorod

The application of the second kind Fredholm type integral equations method to solution of four mutually adjacent problems on the lattice scattering of plane waves for perfectly conductive rods of arbitrary magnitude and on the wave scattering of planar waveguides for the same rods is considered. This method is of high calculating velocity and it can be used for the rods of arbitrary shape including the ones with integral inner cavities. The single (double) lower potential are used as a solution. Their limit characteristics are well known from potential theory and allows to get the second kind integral equations which solution is correct problem. The separation of Green function analytic singularity give fast convergence for plane waves series. The results of calculation for magnetic waves are presented.

Key words: plane wave diffraction, plane waveguide, boundary integral equation, Green function.