

УДК 537.86

Н.В. Асеева, Л.Г. Бляхман, К.В. Логвинова, В.В. Тютин

**ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В РАСШИРЕННОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ИНДУЦИРОВАННЫМ РАССЕЯНИЕМ РАМАНА И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩЕЙ ДИСПЕРСИЕЙ**

Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики, г. Н. Новгород

**Цель работы:** рассмотрена динамика солитонов в рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера. Учтено как индуцированное рассеяние высокочастотных волн на затухающих низкочастотных волнах, так и неоднородность линейной дисперсии второго порядка.

**Научный подход:** исследование проведено как численно, так и аналитически.

**Результат:** показано, что смещение пространственного спектра солитона в длинноволновую область обусловленного индуцированным рассеянием, компенсируется убывающей дисперсией, смещающей спектр солитона в коротковолновую область. Аналитически в рамках расширенного неоднородного нелинейного уравнения Шредингера найден новый класс стационарных нелинейных локализованных решений (солитонов), возникающих в результате баланса индуцированного рассеяния и убывающей дисперсии. Найден режим динамического равновесия индуцированного рассеяния и неоднородности дисперсии среды, при котором параметры солитона меняются во времени периодически. Для данного режима аналитические результаты согласуются с результатами численного счета.

**Новизна:** результаты исследования новые и могут иметь приложение для разработки новых поколений оптических волоконных линий связи на базе коротких оптических солитонов.

*Ключевые слова:* расширенное нелинейное уравнение Шредингера, солитон, индуцированное рассеяние затухающие низкочастотные волны, неоднородность, дисперсия второго порядка, аналитическое исследование, численное моделирование

**Введение**

Интерес к солитонам обусловлен их способностью сохранять свою форму в течение длительного времени. Солитонные решения возникают во многих задачах моделирования динамики интенсивных волновых полей в диспергирующих средах: оптических импульсов в волоконных линиях связи, электромагнитных волн в плазме, поверхностных волн на глубокой воде [1–4].

Динамика достаточно протяженных высокочастотных (ВЧ) волновых пакетов описывается во втором приближении теории дисперсии нелинейных волн, учитывающем члены второго порядка малости: линейную дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность. Основным модельным уравнением этого приближения является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [5, 6], солитонное решение в котором возникает в результате баланса дисперсионного расплывания пакета и его нелинейного сжатия.

Динамика ВЧ волновых пакетов достаточно малой протяженности описывается третьим приближением этой теории, учитывающим члены третьего порядка малости [1]: нелинейную дисперсию [7], индуцированное рассеяние Рамана [8–10] и линейную дисперсию третьего порядка. Основным модельным уравнением в этом приближении является нелинейное уравнение Шредингера третьего порядка (НУШ-3) [10–14]. Так, в [15–17] в рамках НУШ-3 в пренебрежении индуцированным рассеянием найден класс устойчивых коротких солитонов, возникающих в результате баланса линейной дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии. В [18] показано, что произвольное начальное распределение в рамках НУШ-3 в пренебрежении индуцированным рассеянием эволюционирует к системе этих коротких солитонов. Впоследствии аналогичные решения в рамках НУШ-3 без индуцированного рассеяния были найдены в [19–23]. В [24, 25] в рамках НУШ-3 без учета линейной дис-

персии третьего порядка найдены стационарные волны перепада, возникающие в результате баланса нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния.

Индуцированное рассеяние Рамана обусловлено возбуждением в атомарных и молекулярных системах временных мод с частотой  $\Omega$  внешним полем с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , связанными соотношением  $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$ , и описывается в расширенном НУШ дополнительным слагаемым с временным запаздыванием нелинейного керровского отклика. Для локализованных нелинейных волновых пакетов (солитонов) учет индуцированного рассеяния Рамана приводит к смещению частоты солитона в низкочастотную область [8–10], и, как следствие, к потере его устойчивости и разрушению. Возможность компенсации рамановского сдвига частоты в протяженных линиях связи с переменными частотными характеристиками исследовалась в [26]. Компенсация вынужденного рассеяния Рамана линейным полем излучения из области ядра солитона рассмотрена в [27]. Компенсация рассеяния Рамана в неоднородных средах рассматривалась в следующих случаях: в средах с периодической линейной дисперсией второго порядка [28, 29], в средах со смещаемой точкой перегиба дисперсионной характеристики [30] и в средах с убывающей дисперсией [31].

В данной работе исследована динамика интенсивных ВЧ волновых пакетов в нелинейных неоднородно диспергирующих средах с учетом индуцированного рассеяния на затухающих низкочастотных (НЧ) волнах. В третьем приближении теории дисперсии (для достаточно коротких волновых пакетов) исходная система двух уравнений сведена к неоднородному расширенному НУШ с нелокальным антисимметричным нелинейным керровским откликом, обусловленным индуцированным рассеянием на затухающих НЧ волнах. Это рассеяние приводит к сдвигу пространственного спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область, вызванным возбуждением затухающих пространственных мод с волновым числом  $\chi$  внешним полем с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$ , связанными соотношением  $k_1 - k_2 = \chi$ : пространственный аналог индуцированного рассеяния Рамана или пространственное индуцированное рассеяние Рамана. С другой стороны, пространственная неоднородность дисперсии также приводит к изменению волнового числа ВЧ пакета. Баланс пространственного индуцированного рассеяния Рамана и убывающей дисперсии приводит к стабилизации пространственного спектра волновых чисел солитона. В данной работе в рамках расширенного неоднородного НУШ с антисимметричным нелинейным керровским откликом аналитически найден новый класс солитонов, возникающий в результате баланса индуцированного рассеяния на затухающих НЧ волнах и убывающей дисперсии. Полученный результат подтвержден в численном эксперименте.

### Исходная система и базовое уравнение

Рассмотрим динамику интенсивного ВЧ волнового поля  $U(\xi, t)\exp(i\omega t - ik\xi)$  в нелинейной неоднородно диспергирующей среде с учетом взаимодействия с НЧ затухающим волнами. В качестве исходной рассмотрим систему «Захаровского» типа двух модельных однонаправленных нелинейных уравнений [32, 33]:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q(\xi) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \rho U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} = - \frac{\partial |U|^2}{\partial \xi}, \quad (2)$$

где  $\rho$  – НЧ возмущение параметра среды;  $q(\xi)$  – линейная дисперсия второго порядка;  $\mu$  – коэффициент потерь ВЧ волн на НЧ колебаниях. В частности, данная система описывает динамику интенсивных электромагнитных или ленгмюровских волн в изотропной плазме при учете их взаимодействия с затухающими ионно-звуковыми волнами. Так, во втором прибли-

жении теории дисперсии нелинейных волн нелинейный отклик среды локален  $\rho = -|U|^2$ , а огибающая ВЧ пакета описывается НУШ. В третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн при описании достаточно коротких ВЧ волновых пакетов  $k\Delta \ll \mu$  ( $\Delta$  и  $k$  – протяженность и добавочное волновое число пакета), нелинейный отклик среды содержит нелокальное несимметричное слагаемое, обусловленное ВЧ затуханием НЧ волн  $\rho = -|U|^2 - \mu \partial |U|^2 / \partial \xi$ . В этом приближении модельное уравнение для огибающей волнового пакета следующее:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q(\xi) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + 2\alpha U |U|^2 + \mu U \frac{\partial (|U|^2)}{\partial \xi} = 0. \quad (3)$$

Последнее слагаемое в (3) описывает индуцированное рассеяние ВЧ волнового поля на затухающих НЧ волнах и является пространственным аналогом индуцированного рассеяния Рамана (пространственное индуцированное рассеяние Рамана).

### Аналитические результаты

**Метод интегралов.** Уравнение (3) при нулевых условиях на бесконечности  $U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$  имеет следующие интегралы:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = 0, \quad (4)$$

$$2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} K |U|^2 d\xi = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 d\xi, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 d\xi = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} K \left( \frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} K \frac{\partial |U|^4}{\partial \xi} d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} K \left( 3 \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 |U|^2}{\partial \xi^2} - 2K^2 |U|^2 \right) d\xi, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 |U|^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial (qK|U|^2)}{\partial \xi} d\xi, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} qK |U|^2 d\xi, \quad (8)$$

где  $U = |U| \exp(i\phi)$ ,  $K = \partial \phi / \partial \xi$  – добавочное волновое число пакета. Для замыкания системы (4)–(8) необходимо связать пространственное распределение волнового числа  $K$  с параметрами огибающей пакета и неоднородностью среды. Для этого примем масштабы неоднородности дисперсии и локального волнового числа  $K$  много большими масштаба неоднородности огибающей волнового пакета  $D_{q,K} \gg D_{|U|}$ . Это позволяет аппроксимировать пространственное распределение волнового числа  $K$  в окрестности «центра масс» волнового

пакета  $\bar{\xi} = N^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |U|^2 d\xi$  ( $N = \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi$ ) линейным соотношением

$K(\xi) = K(\bar{\xi}) + (\partial K / \partial \xi)_{\bar{\xi}} (\xi - \bar{\xi})$ . Величину градиента волнового числа в центре «масс» пакета найдем из мнимой части (3) при условии  $(\partial |U| / \partial \xi)_{\bar{\xi}} = 0$ :

$$\left( \frac{\partial K}{\partial \xi} \right)_{\bar{\xi}} = - \left( \frac{2}{q|U|} \frac{\partial |U|}{\partial t} + \frac{1}{q} \frac{dq}{d\xi} K \right)_{\bar{\xi}}. \quad (9)$$

Так, для пакетов, амплитуда и протяженность которых связаны солитоноподобным соотношением, с учетом (4) и (9) получим  $K(\xi, t) = K(\bar{\xi}, t) \equiv k(t)$ . Система (4)–(8) в этом случае становится замкнутой:

$$2 \frac{dk}{dt} = -\mu \frac{L_0}{N_0} l - q'(\bar{\xi})z, \tag{10}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\mu \frac{L_0}{N_0} kl - 3kq'(\bar{\xi})z + 2k^3 q'(\bar{\xi}), \tag{11}$$

$$\frac{dl}{dt} = -3kq'(\bar{\xi})l, \tag{12}$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = kq(\bar{\xi}), \tag{13}$$

где  $q'(\bar{\xi}) = (\partial q / \partial \xi)_{\bar{\xi}}$  – значение градиента дисперсии в точке «центра масс» пакета;

$n = N / N_0$ ,  $l = L / L_0$ ,  $z = Z / N_0$ ;  $Z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\partial U / \partial \xi|^2 d\xi$ ,  $L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (\partial |U|^2 / \partial \xi)^2 d\xi$  – интегралы волнового пакета;

$N_0 = N(0)$ ,  $Z_0 = Z(0)$ ,  $L_0 = L(0)$  – значения интегралов волнового пакета в начальный момент времени. Состояние равновесия системы (10)–(13) достигается при условии

$$k = 0, \mu L_0 = -q'(\bar{\xi}_0)Z_0. \tag{14}$$

В состоянии равновесия пространственное индуцированное рассеяние Рамана компенсируется убывающей дисперсией. Для анализа системы (10)–(13) вне состояния равновесия рассмотрим случай экспоненциальной пространственной зависимости дисперсии  $q = q_0 \exp(-\xi / D)$ . Используя замены  $\theta = tq_0 / D$  и  $\eta = \bar{\xi} / D$ , система (10)–(13) примет вид

$$2 \frac{dk}{d\theta} = z \exp(-\eta) - rl, \tag{15}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = (3z \exp(-\eta) - rl - 2k^2 \exp(-\eta))k, \tag{16}$$

$$\frac{dl}{d\theta} = 3kl \exp(-\eta), \tag{17}$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = k \exp(-\eta), \tag{18}$$

где  $r \equiv \mu L_0 D / (q_0 N_0)$ . С учетом первого интеграла уравнений (17)–(18)  $l = \exp(3\eta)$  система (15)–(18) сводится к виду

$$2 \frac{dk}{d\theta} = z \exp(-\eta) - r \exp(3\eta), \tag{19}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = (3z \exp(-\eta) - r \exp(3\eta) - 2k^2 \exp(-\eta))k, \tag{20}$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = k \exp(-\eta). \tag{21}$$

Уравнения (19)–(21) имеют первый интеграл:

$$3 \frac{k^2}{z_0} \exp(-\eta) - \lambda(1 - \exp(3\eta)) + 3 \left(1 - \frac{k_0^2}{z_0}\right) (1 - \exp(\eta)) = 3 \frac{k_0^2}{z_0}, \tag{22}$$

где  $k_0 = k(0)$ ,  $\lambda \equiv r / z_0$ ,  $z_0 \equiv Z_0 / N_0$ . На рис. 1 приведены кривые (22) на плоскости  $(k / \sqrt{z_0}, \eta)$  при  $k_0 = 0$  и различных  $\lambda$ .

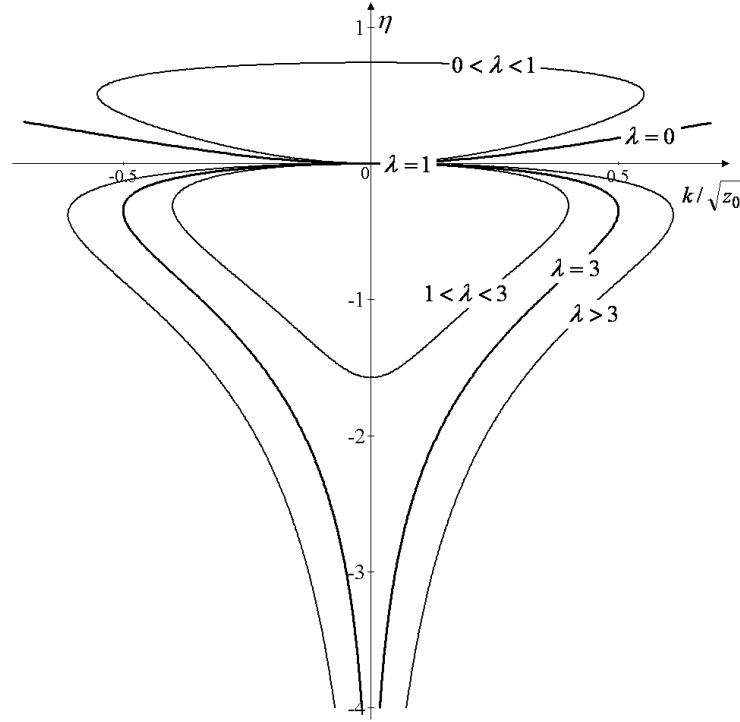


Рис. 1. Кривые (22) на плоскости  $(k/\sqrt{z_0}, \eta)$  при  $k_0 = 0$  и различных  $\lambda$

**Солитонное решение.** Рассмотрим решение уравнения (3) в виде стационарной волны  $U(\xi, t) = \psi(\xi)\exp(i\Omega t)$  при экспоненциальном профиле дисперсии  $q(\xi) = q_0 \exp(-\xi/D)$ :

$$q_0 \exp(-\xi/D) \frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \frac{q_0}{D} \exp(-\xi/D) \frac{d\psi}{d\xi} + 2\alpha\psi^3 - 2\Omega\psi + \mu\psi \frac{d(\psi^2)}{d\xi} = 0. \quad (23)$$

Примем масштаб неоднородности дисперсии много большим масштаба огибающей волнового пакета  $D \gg L_\psi$ . С учетом малости величины  $\varepsilon \sim L_\psi/D \sim \mu \ll \alpha, q_0$ , решение уравнения (23) будем искать в виде  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , где  $\psi_1 \sim \varepsilon\psi_0 \ll \psi_0$ . Удерживая члены порядка  $\varepsilon$ , имеем

$$q_0 \frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} + 2\alpha\psi_0^3 - 2\Omega\psi_0 = 0, \quad (24)$$

$$q_0 \frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} + (6\alpha\psi_0^2 - 2\Omega)\psi_1 = \frac{q_0}{D} \frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} \xi - \frac{2}{3}\mu \frac{d(\psi_0^3)}{d\xi} + \frac{q_0}{D} \frac{d\psi_0}{d\xi}. \quad (25)$$

Уравнение (24) имеет классическое солитонное решение  $\psi_0 = A_0 \operatorname{sech}(\xi/\Delta)$ , где  $\Delta = \sqrt{q_0/\alpha}/A_0$ ,  $\Omega = \alpha A_0^2/2$ . Уравнение (25) при замене  $\eta = \xi/\Delta$  и  $\Psi = \psi_1 D/(A_0 \Delta)$  имеет вид

$$\frac{d^2\Psi}{d\eta^2} + \left( \frac{6}{\cosh^2 \eta} - 1 \right) \Psi = 2 \frac{\eta}{\cosh^3 \eta} - \frac{\eta}{\cosh \eta} + \frac{5}{4} \frac{\mu}{\mu_*} \frac{\sinh \eta}{\cosh^4 \eta} + \frac{\sinh \eta}{\cosh^2 \eta}, \quad (26)$$

где  $\mu_* \equiv -5q_0/(8A_0^2 D)$  - параметр индуцированного рассеяния, отвечающий состоянию равновесия системы (19)–(21). При  $\Psi(0) = 0$  уравнение (26) имеет точное решение

$$\Psi(\eta) = \left( \Psi'(0)\eta - \frac{\eta^2}{4} \tanh \eta + \frac{\mu}{4\mu_*} (\tanh \eta) \ln(\cosh \eta) \right) \operatorname{sech} \eta + \frac{1}{12} \left( \frac{\mu}{\mu_*} - 1 \right) (\tanh^2 \eta) \sinh \eta. \quad (27)$$

При  $\mu = \mu_*$ , отвечающем балансу индуцированного рассеяния и убывающей дисперсии, решение (27) локализовано. Асимптотика (27) в этом случае на больших значениях аргумента следующая  $\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty) \approx \pm\eta^2 \exp(-|\eta|)$ . На рис. 2 показано распределение волнового поля  $\Psi(\eta)$  при  $\mu = \mu_*$  и различных значений  $\Psi'(0)$ .

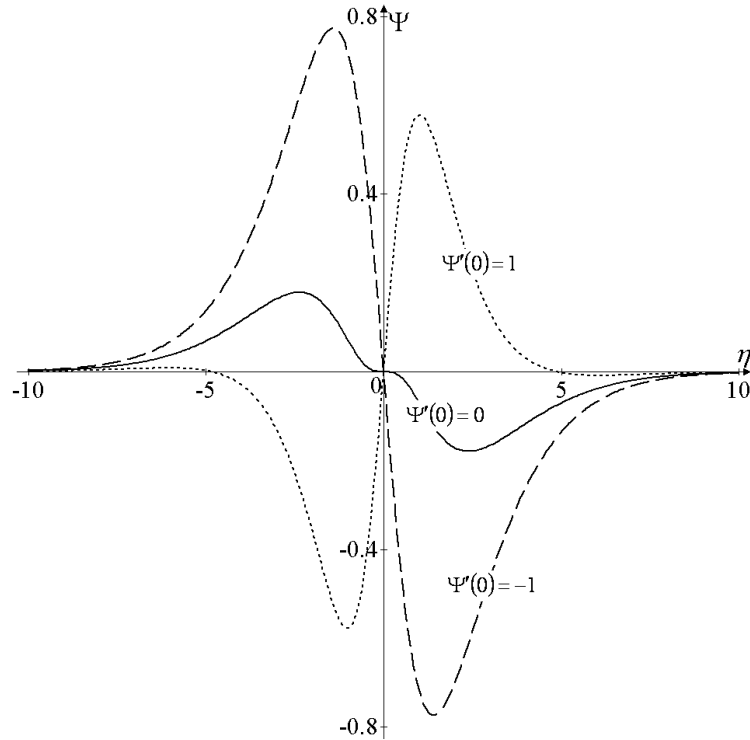


Рис. 2. Распределение  $\Psi(\eta)$  при  $\mu = \mu_*$  и различных  $\Psi'(0)$

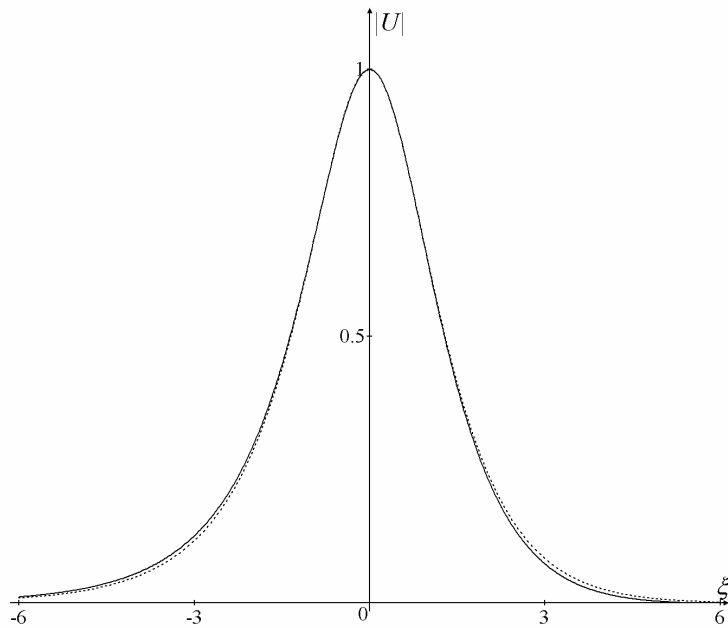
Решение  $\Psi(\eta)$  антисимметрично. Солитоны с антисимметричными «хвостами» возникают и в хорошо известной системе линейно связанных НУШ [34]. При  $\mu \neq \mu_*$  решение (27) не локализовано  $|\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty)| \rightarrow \infty$ .

### Численное моделирование

Рассмотрим численно начальную задачу динамики солитоноподобного пакета  $U(\xi, t = 0) = \text{sech} \xi$  в рамках (3) при  $q(\xi) = \exp(-\xi/10)$ ,  $\alpha = 1$  и различных значениях  $\mu$ . Величина равновесного значения индуцированного рассеяния для данного начального импульса из аналитического рассмотрения системы (19)–(21) составляет  $\mu_* = 1/16$ . В численном счете при  $\mu = 1/16$  исходный волновой пакет эволюционирует к стационарному локализованному распределению (непрерывная кривая на рис. 3) с нулевым волновым числом. Это распределение близко с аналитическим решением системы уравнений (24)–(25) при  $q_0 = \alpha = A_0 = 1$ ,  $D = 10$ ,  $\mu = \mu_*$ :

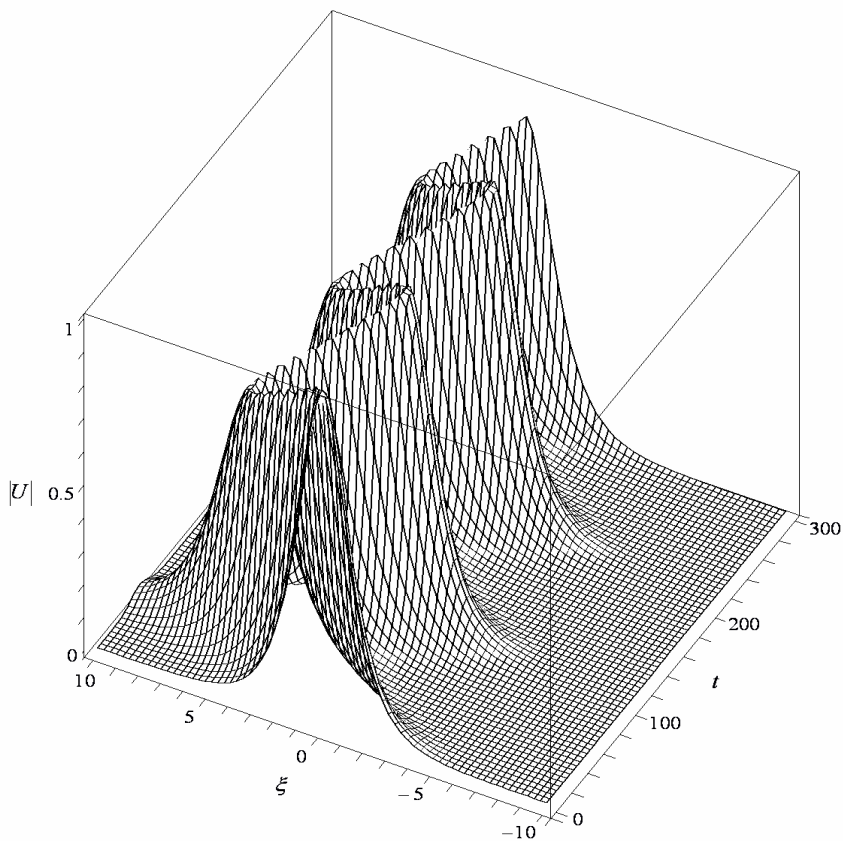
$$|U| = \left( 1 + \frac{1}{40} \left( (\tanh \xi) \ln(\cosh \xi) - \xi^2 \tanh \xi \right) \right) \text{sech} \xi, \quad (28)$$

представленным на рис. 3 штриховой кривой.



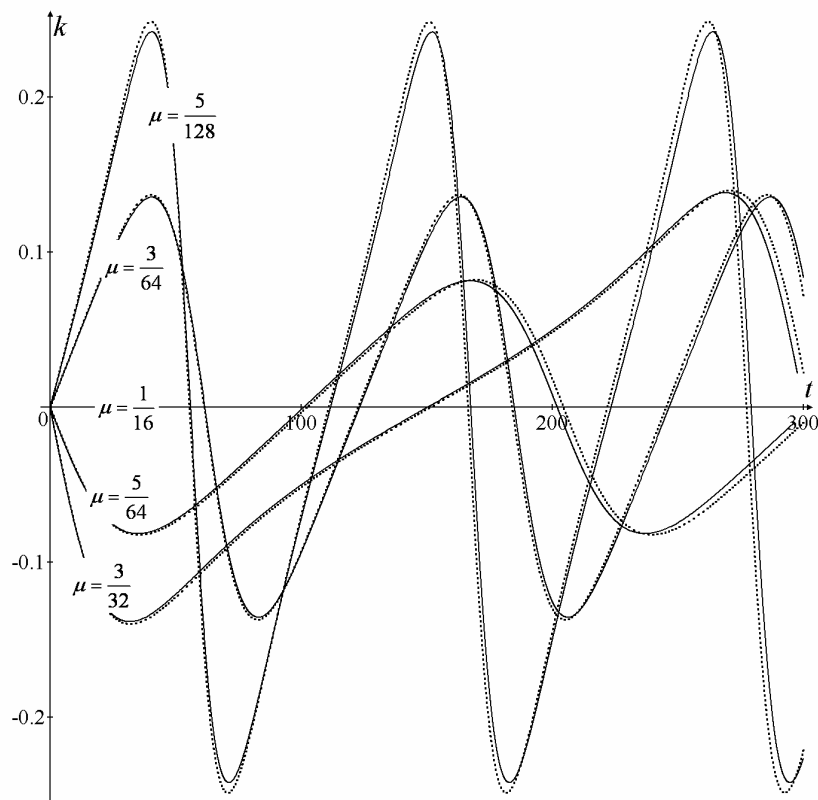
**Рис. 3.** Распределение  $|U|$  по  $\xi$  при  $5 < t \leq 300$ ,  $\mu = 1/16$ .  
 Сплошная кривая — численный счет;  
 ----- — аналитическое солитонное решение (28)

Отклонение параметра  $\mu$  от равновесного значения  $\mu_*$  приводит к изменению параметров солитона (волновое число, амплитуда) во времени. На рис. 4 показано численное моделирование пространственно-временного распределения  $|U|$  при  $\mu = 1/32$ .



**Рис. 4.** Пространственно-временное распределение  $|U|$  при  $\mu = 1/32$ .  
 (Результат численного моделирования)

На рис. 5 приведена динамика во времени локального волнового числа в точке максимума модуля огибающей волнового пакета при различных значениях  $\mu$ . Непрерывные кривые отвечают результатам численного счета, пунктирные – аналитическое решение системы (21)–(23) при различных  $\mu$ .



**Рис. 5. Изменение волнового числа солитона в центре максимума волнового поля  $k$  во времени при различных  $\mu$ :**

----- – аналитический результат; ————— – непрерывные – численный

При  $\mu < 3/16$ , отвечающем режиму динамического равновесия индуцированного рассеяния и убывающей дисперсии, результаты численного счета и аналитического рассмотрения хорошо соотносятся. При  $\mu \geq 3/16$  результаты численного счета и аналитического рассмотрения не совпадают. Это несовпадение обусловлено возникновением в численном счете полей излучения из ядра солитона, что не учитывалось при аналитическом рассмотрении. Поля излучения приводят к уменьшению энергии солитонного ядра и, как следствие, к отклонению значений волнового числа пакета, полученных из численного счета, от значений, полученных решением системы (26)–(27).

### Заключение

В данной работе рассмотрена динамика солитонов в рамках расширенного неоднородного уравнения Шредингера с неоднородной дисперсией второго порядка при учете индуцированного рассеяния на затухающих НЧ волнах. Исследование проведено как аналитически, так и численно. Показана возможность баланса пространственного индуцированного рассеяния на затухающих НЧ волнах, приводящего к смещению пространственного спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область, и убывающей дисперсии, смещающей спектр солитона в коротковолновую область. В явном виде получено солитонное решение, возникающее в результате этого баланса. Найден режим динамического равновесия индуди-



рованного рассеяния и неоднородной дисперсии, при котором параметры солитона меняются во времени периодически.

Динамика солитонов рассматривалась в пренебрежении неоднородностью кубичной нелинейности, групповой скоростью ВЧ составляющей, нелинейной дисперсией и линейной дисперсии третьего порядка. Исследование динамики солитонов с учетом эффектов, обусловленных данными слагаемыми, будет проведено в следующих работах.

#### Библиографический список

1. **Agraval, G.P.** Nonlinear Fiber Optic / G.P. Agraval. – San Diego: Academic Press, 2001.
2. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. – New York: Springer, 2001.
3. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agraval. – San Diego: Academic, 2003.
4. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems / L.A. Dickey. – New York: World Scientific, 2005.
5. **Zakharov, V.E.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. JETP. 1972. №34 P. 62–69.
6. **Hasegawa, A.** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion / A. Hasegawa, F. Tappert // Appl. Phys. Lett. 1973. № 23. P. 142–144.
7. **Oliviera, J.R.** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation / J.R. Oliveira, M.A. Moura // Phys. Rev. E. 1998. № 57. P. 4751–4755.
8. **Mitschke, F.M.** Discovery of the soliton self-frequency shift / F.M. Mitschke, L.F. Mollenauer // Opt. Lett. 1986. № 11. P. 659–661.
9. **Gordon, J.P.** Theory of the Soliton Self-frequency Shift // Opt. Lett. 1986. № 11. P. 662–664.
10. **Kodama, Y. J.** Optical solitons in a monomode fiber // Stat. Phys. 1985. № 39. P. 597–614.
11. **Kodama, Y.** Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide / Y. Kodama, A. Hasegawa // IEEE J. Quantum Electron. 1987. № 23. P. 510–524.
12. **Zaspel C.E.**, Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation // Phys. Rev. Lett. 1999. № 82. P. 723–726.
13. **Hong, B.** New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodinger equation / B.Hong, D. Lu // Inter. Journal of Nonlinear Science. 2009. № 7. P. 360–367.
14. **Karpman, V.I.** The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation // The European Physical Journal B. 2004. № 39. P. 341–350.
15. **Gromov, E.M.** Nonlinear Dynamics of Short Wave Trains in Dispersive Media / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1996. № 110. P. 137; Sov. Phys. JETP. 1996. № 83. P. 73–79.
16. **Gromov, E.M.** Short envelope-solitons (combined nonlinear equation) / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Radiophysics and Quantum Electronics. 1996. № 39. P. 735–756.
17. **Gromov, E.M.** Short Optical Solitons in Fibers / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Chaos. 2000. № 10. P. 551–558.
18. **Gromov, E.M.** Dynamics of wave packets in the frame of third-order non-linear Schrodinger equation / E.M. Gromov, L.V. Piskunova, V.V. Tyutin // Physics Letters A. 1999. № 256. P. 153–158.
19. **Obregon, M.A.** Oblique magneto-acoustic solitons in a rotating plasma / M.A. Obregon, Yu.A. Stepanyants // Physics Letters A. 1998. № 249. P. 315–323.
20. Generalized nonlinear Schrödinger equation for dispersive susceptibility and permeability: application to negative index materials / M. Scalora [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2005. P. 95. P. 013902.
21. Modulation instability in nonlinear negative-index material / S.C. Wen [et al.] // Phys. Rev. E. 2006. № 73. P. 036617.
22. **Marklund, M.** Ultrashort solitons and kinetic effects in nonlinear metamaterials / M. Marklund, P.K. Shukla, L. Stenflo // Phys. Rev. E. 2006. №73. P. 037601.
23. Higher-order effects and ultrashort solitons in left-handed metamaterials / N.L. Tsitsas [et al.] // Phys. Rev. E. 2009. № 79. P. 037601.
24. **Kivshar, Y.S.** Dark-soliton Dynamics and shock waves induced by the stimulated Raman effect in optical fibers // Phys. Rev. A. 1990. № 42. P. 1757–1761.
25. **Kivshar, Y.S.** Raman-induced optical shocks in nonlinear fibers / Y.S. Kivshar, B.A. Malomed // Optics Letters. 1993. № 18. P. 485–487.

26. **Malomed, B.A.** Matching intrapulse self-frequency shift to sliding-frequency filters for transmission of narrow solitons / B.A. Malomed, R.S. Tasgal // Journal of the Optical Society of America B. 1998. № 15. P. 162–170.
27. **Biancalama, F.** Theory of the soliton self-frequency shift compensation by the resonant radiation in photonic crystal fibers / **F. Biancalama, D.V. Skrybin, A.V. Yulin** // Phys. Rev. E. 2004. № 70. P. 011615.
28. **Essiambre, R.-J.** Timing jitter of ultra short solitons in high-speed communication systems. I. General formulation and application to dispersion-decreasing fibers / **R.-J. Essiambre, G.P. Agrawal** // Journal of the Optical Society of America B. 1997. № 14. P. 314–322.
29. **Essiambre, R.-J.** Timing jitter of ultra short solitons in high-speed communication systems. II. Control of jitter by periodic optical phase conjugation / R.-J. Essiambre, G.P. Agrawal // Journal of the Optical Society of America B. 1997. №14. P. 323–330.
30. DDF-based all-fiber optical source of femtosecond pulses smoothly tuned in the telecommunication Range / A. Andrianov [et al.]// Laser Physics. 2007. № 17. P. 1296–1302.
31. Soliton pulse compression in dispersion-decreasing fiber / S. Chernikov [et al.]// Optics Letters. 1993. № 18. P. 476–478.
32. **Zakharov, V.E.** Hamiltonian formalism for hydrodynamic plasma model // Sov. Phys. JETP. 1971. №33. P. 927-932.
33. **Zakharov, V.E.** The Hamiltonian formalism for waves in nonlinear media having dispersion // Radiophysics and Quantum Electronics. 1974. №17. P. 326–343.
34. **Blit, R.** Propagation and collisions of semidiscrete solitons in arrayed and stacked waveguides / R. Blit, B.A.Malomed // Phys. Rev. 2012. A. № 86. P. 043841.

Дата поступления  
в редакцию 04.06.2013

**N.V. Aseeva, L.G. Blyakhman, K.V. Logvinova, V.V. Tyutin**

## SOLITON DYNAMICS IN AN EXTENDED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH A SPATIAL COUNTERPART OF THE STIMULATED RAMAN SCATTERING AND EXPONENTIALLY DECREASING DISPERSION

National research university Higher school of economics

**Purpose:** Dynamics of solitons is considered in the framework of the extended nonlinear Schrödinger equation (NLSE), which is derived from a system of Zakharov's type for the interaction between high- and low-frequency (HF and LF) waves, in which the LF field is subject to diffusive damping. The model may apply to the propagation of HF waves in plasmas. The resulting NLSE includes a *pseudo-stimulated-Raman-scattering* (PSRS) term, i.e., a spatial-domain counterpart of the SRS term which is well known as an ingredient of the temporal-domain NLSE in optics. Also included is inhomogeneity of the spatial second-order diffraction (SOD).

**Approach:** Soliton's dynamic investigated as analytically as numerically.

**Findings:** It is shown that the wavenumber downshift of solitons, caused by the PSRS, may be compensated by an upshift provided by the SOD whose coefficient is an exponential function of the coordinate. An analytical solution for solitons is obtained in an approximate form. Analytical and numerical results agree well, including the predicted balance between the PSRS and the exponentially inhomogeneous SOD.

*Key words:* Extended Nonlinear Schrödinger Equation, Soliton Solution, Stimulated Scattering; Damping Low-Frequency Waves, Inhomogeneous, Second-Order Dispersion, Analytical Investigation, Numerical Simulation.