МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 537.86

Н.В. Асеева, Л.Г. Бляхман, К.В. Логвинова, В.В. Тютин

ЗАТУХАЮЩИЕ СОЛИТОНЫ В РАСШИРЕННОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ИНДУЦИРОВАННЫМ РАССЕЯНИЕМ И УБЫВАЮЩЕЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Цель работы: Исследована динамика солитонов в рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), полученного из системы уравнений «захаровского» типа, описывающего взаимодействие между высоко- и низкочастотными (ВЧ и НЧ) волнами. Полученное расширенное НУШ учитывает псевдо-вынужденное рассеяние Рамана, т.е. пространственный аналог классического вынужденного рассеяния Рамана, описываемого в оптике расширенным НУШ во временной формулировке. Также учтена неоднородность пространственной дисперсии второго порядка и линейные потери ВЧ волн.

Научный подход: Исследование проведено как численно, так и аналитически.

Результат: Показано, что уменьшение волнового числа пакетов, обусловленное псевдо-вынужденным рассеянием Рамана, можно компенсировать увеличением волнового числа за счет дисперсии второго порядка, экспоненциально убывающей в пространстве. Аналитически найдено «солитонное» решение, сохраняющее свою структуру. Аналитические результаты подтверждены численным счетом.

Новизна: Результаты исследования новые и могут иметь приложение для разработки новых поколений оптоволоконных линий связи на базе коротких оптических солитонов.

Ключевые слова: расширенное нелинейное уравнение Шредингера, затухающий солитон, вынужденное рассеяние, неоднородность, дисперсия второго порядка, затухание ВЧ волн, линейные потери НЧ-волн, аналитическое решение, численный эксперимент.

Введение

В настоящее время значителен интерес к солитонам, обусловленный их способностью сохранять свою форму,и переносить энергию и информацию в течение длительного времени без значительных потерь. Солитонные решения возникают во многих областях физики, имеющих дело с распространением интенсивных волновых полей в диспергирующих средах: оптические лучи и импульсы в волоконных линиях связи и волноводах, электромагнитные волны в плазме, поверхностные волны на глубокой воде и т.д. [1-7]. В последнее время солитоны используют и для описания «плазмонов» [8-10].

Динамика протяженных ВЧ волновых пакетов корректно описывается во втором порядке теории дисперсии нелинейных волн. Основным модельным уравнением в этом случае является НУШ [11, 12], которое учитывает дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность (самоукручение). Солитонное решение в рамках НУШ существует в результате баланса между дисперсионным расплыванием и нелинейным сжатием волнового пакета. В частности, решение с постоянной структурой в виде затухающего солитона в рамках НУШ, учитывающего линейные потери ВЧ-волн и пространственное убывание дисперсии второго порядка, представлено в [4, 13].

Для описания динамики коротких ВЧ волновых пакетов используется уже третье приближение теории дисперсии нелинейных волн [1], которое учитывает нелинейную дисперсию [14], вынужденное рассеяние Рамана [15-17] и дисперсию третьего порядка. Основное модельное уравнение в этом случае – расширенное НУШ [17-21]. Солитонное решение в рамках расширенного НУШ с дисперсией третьего порядка и нелинейной дисперсией было получено в [22-29]. В [30, 31], были найдены стационарные волны перепада в рамках расширенного НУШ с вынужденным рассеянием Рамана и нелинейной дисперсией.

Эти волны существуют в результате равновесия между вынужденным рассеянием и нелинейной дисперсией. Для локализованных нелинейных волновых пакетов (солитонов) вынужденное рассеяние приводит к сдвигу вниз спектра солитона [15-17] и, в итоге, – к разрушению солитона. Использование баланса между вынужденным рассеянием и переменными характеристиками среды для стабилизации солитонов в протяженных линиях передач предложено в [32]. Компенсация вынужденного рассеяния линейным излучением из ядра солитона рассмотрена в [33]. Компенсация вынужденного рассеяния в неоднородных средах рассмотрена в нескольких случаях: с периодической дисперсией второго порядка [34, 35], в средах со сдвигом точки нулевой дисперсии второго порядка [36], в оптических волокнах с убывающей дисперсией [37].

Интенсивные короткие импульсы ВЧ электромагнитных или ленгмюровских волн в плазме, а также ВЧ поверхностные волны на глубокой воде, испытывают существенное затухание в результате рассеяния на НЧ волнах, которое, в свою очередь, возникает как эффект вязкости. Такие НЧ моды являются ионно-звуковыми волнами в плазме, или внутренними волнами в стратифицированной жидкости. Первая модель для затухания при взаимодействии с НЧ-волнами была предложена в [38]. Эта модель использует расширенное НУШ с пространственным аналогом вынужденного рассеяния Рамана, которое было названо псевдовынужденное рассеяния Рамана. Это уравнение было получено из системы уравнений «захаровского» типа [39, 40] для связанных ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме. Псевдовынужденное рассеяние приводит к сдвигу вниз по спектру волнового числа, подобно хорошо известному эффекту классического вынужденного рассеяния [1, 14–17] и, в итоге, к разрушению солитона. Модель, разработанная в [38], также учитывает плавное пространственное изменение дисперсии второго порядка (как пространственное уменьшение коэффициента дисперсии второго порядка). Эта неоднородность приводит к сдвигу вверх по спектру собственного волнового числа волнового пакета и делает возможным для солитонов компенсацию псевдовынужденного рассеяния пространственно неоднородной дисперсией второго порядка и уничтожает эффект потерь на НЧ-волнах.

В данной работе рассмотрена динамика интенсивных ВЧ волновых пакетов в диспергирующих нелинейных средах при учете рассеяния на затухающих НЧ-волнах, линейных потерь ВЧ-волн и экспоненциально убывающей дисперсии второго порядка. В третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн (для коротких волновых пакетов), исходная система уравнений «захаровского» типа сведена к расширенному неоднородному НУШ. Это уравнение включает член псевдовынужденного рассеяния Рамана и член пространственно убывающей дисперсии второго порядка. Равновесие между этими двумя членами дает возможность стабилизации спектра волнового числа солитона. Найдено решение в виде устойчивого солитона.

Основное уравнение и интегральные соотношения

Рассмотрим эволюцию медленно изменяющейся огибающей $W(\xi,t)$ интенсивного волнового пакета в нелинейной среде с неоднородной дисперсией. Учтем взаимодействие с затухающими НЧ-волнами, которое можно представить как локальное возмущение эффективного показателя преломления $n(\xi,t)$. Эта эволюция описывается соответствующей системой уравнений «захаровского» типа для однонаправленного распространения ВЧ- и НЧ-волн [39, 40]

$$2i\left(\frac{\partial W}{\partial t}+V\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right)-nW+i\nu W=0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+V_S\frac{\partial n}{\partial x}-\delta\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=-\frac{\partial\left(|W|^2\right)}{\partial x}, \tag{2}$$

где ν - коэффициент потерь ВЧ волн; δ - коэффициент вязкости для ВЧ волн; V - групповая скорость ВЧ волн; V_S - скорость НЧ-волн. Как отмечалось ранее, эта система описывает интенсивные ленгмюровские волны в изотропной плазме при взаимодействии с ионно-звуковыми волнами, которое соответствует вязкому трению.

В третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн (для коротких ВЧ волновых пакетов, при $k\Delta << \delta$, где k, Δ - характерные волновое число и пространственная протяженность волнового пакета), в приближении нелинейного отклика среды $n=-|W|^2(V_S-V)^{-1}-\delta(V_S-V)^{-2}\partial\left(|W|^2\right)/\partial\xi$, приходим к следующему эволюционному уравнению для огибающей ВЧ волновых пакетов:

$$2i\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[q(\xi+Vt)\frac{\partial W}{\partial\xi}\right]+2\alpha W|W|^2+\mu W\frac{\partial\left(|W|^2\right)}{\partial\xi}+i\nu W=0, \tag{3}$$

где $\xi\equiv x-Vt$, $\alpha\equiv(1/2)(V_S-V)^{-1}$, слагаемое $\mu W\partial\left(|W|^2\right)/\partial\xi$, с коэффициентом

$$\mu\equiv\delta(V_S-V)^{-2} \tag{4}$$

– это пространственный аналог вынужденного рассеяния Рамана во временном представлении. После подстановки

$$W\equiv U\exp(-\nu t/2), \tag{5}$$

уравнение (3) принимает вид

$$2i\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[q(\xi+Vt)\frac{\partial U}{\partial\xi}\right]+2\alpha U|U|^2\exp(-\nu t)+\mu U\frac{\partial\left(|U|^2\right)}{\partial\xi}\exp(-\nu t)=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) при нулевых условиях на бесконечности $U|_{\xi\to\pm\infty}\to 0$ имеет следующие интегральные соотношения для моментов волнового поля:

$$\frac{dN}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|U|^2 d\xi=0; \tag{7}$$

$$2\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}K|U|^2 d\xi=-\mu\exp(-\nu t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\left(|U|^2\right)}{\partial\xi}\right)^2 d\xi-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial q}{\partial\xi}\left|\frac{\partial U}{\partial\xi}\right|^2 d\xi; \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial U}{\partial\xi}\right|^2 d\xi&=-\mu\exp(-\nu t)\int_{-\infty}^{\infty}K\left(\frac{\partial\left(|U|^2\right)}{\partial\xi}\right)^2 d\xi\\&+\alpha\exp(-\nu t)\int_{-\infty}^{+\infty}K\frac{\partial\left(|U|^4\right)}{\partial\xi}d\xi-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial q}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\frac{\partial U^*}{\partial\xi}-\frac{\partial^2 U^*}{\partial\xi^2}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)d\xi;\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\left(|U|^2\right)}{\partial\xi}\right)^2 d\xi=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\left(|U|^2\right)}{\partial\xi^2}\frac{\partial\left(qK|U|^2\right)}{\partial\xi}d\xi; \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}|U|^4 d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}qK\frac{\partial\left(|U|^4\right)}{\partial\xi}d\xi; \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\xi|U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} qK|U|^2 d\xi . \tag{12}$$

В указанных соотношениях комплексное волновое поле представлено в виде $U \equiv |U|\exp(i\phi)$, U^* - комплексно сопряженная к нему величина, $K \equiv \partial\phi/\partial\xi$ - локальное волновое число.

Аналитические результаты

Изменение моментов волнового поля

Примем характерные масштабы неоднородностей дисперсии второго порядка и локального волнового числа K много большими пространственной ширины огибающей волнового пакета $D_{q,K} >> D_{|U|}$. Аппроксимируем пространственное изменение волнового числа линейной функцией: $K(\xi,t) \approx K(\bar{\xi},t) + (\partial K/\partial\xi)_{\bar{\xi}}(\xi - \bar{\xi})$, где $\bar{\xi} \equiv N^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi|U|^2 d\xi$ и $N \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}|U|^2 d\xi$. Далее получим из мнимой части уравнения (6), при условии $(\partial|U|/\partial\xi)_{\bar{\xi}} = 0$ (которое означает, что максимум амплитуды солитона совпадает с его центром масс), соотношение

$$\left(\frac{\partial K}{\partial\xi}\right)_{\bar{\xi}} = -\left(\frac{2}{q|U|}\frac{\partial|U|}{\partial t} + \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial\xi}K\right)_{\bar{\xi}} . \tag{13}$$

Из уравнения (6), при учете (13), для уединенных волновых пакетов распределение волнового числа можно представить в виде

$$K(\xi,t) = k(t) + \left(\frac{\nu}{q} + \frac{V}{q^2}\frac{\partial q}{\partial\xi}\right)_{\bar{\xi}}(\xi - \bar{\xi}), \tag{14}$$

где $k(t) \equiv K(\bar{\xi},t)$. Далее система уравнений (8)-(12) может быть преобразована в эволюционные уравнения для параметров волновых пакетов:

$$2N\frac{dk}{dt} = -\mu L_0 l\exp(-\nu t) - q'(\bar{\xi}+Vt)Nz , \tag{15}$$

$$\begin{aligned} N\frac{dz}{dt} &= -\mu L_0 kl\exp(-\nu t) - 3kq'(\bar{\xi}+Vt)Nz + 2k^3q'(\bar{\xi}+Vt)N \\ &- \frac{\alpha}{q(\bar{\xi}+Vt)}M_0\left(\nu + V\frac{q'(\bar{\xi}+Vt)}{q(\bar{\xi}+Vt)}\right)m\exp(-\nu t), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{dm}{dt} = -kq'(\bar{\xi}+Vt)m - \left(\nu + V\frac{q'(\bar{\xi}+Vt)}{q(\bar{\xi}+Vt)}\right)m , \tag{17}$$

$$\frac{dl}{dt} = -3kq'(\bar{\xi}+Vt)l , \tag{18}$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = kq(\bar{\xi}+Vt), \tag{19}$$

где $q'(\bar{\xi}+Vt) \equiv (\partial q/\partial\xi)_{\bar{\xi}}$, $l \equiv L/L_0$, $m \equiv M/M_0$, $z \equiv Z/N$; $Z \equiv \int_{-\infty}^{\infty}|\partial U/\partial\xi|^2 d\xi$.

$M \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi$, $L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial\left(|U|^2\right)/\partial\xi\right)^2 d\xi$, вместе с энергией волнового пакета N (определенной в уравнении (7)), – это характеристические интегралы волнового пакета. $M_0 = M(0)$, $L_0 = L(0)$ – исходные значения этих интегралов.

Выберем пространственное изменение дисперсии второго порядка в виде $\nu + Vq'\left(\xi + Vt\right)/q\left(\xi + Vt\right) = 0$, соответствующем экспоненциально убывающему профилю

$$q = q_0 \exp(-\nu x/V). \tag{20}$$

Теперь система (15)-(19), при переопределении времени и координаты солитона

$$\theta \equiv \nu t, \eta \equiv \nu\xi/V, \tag{21}$$

преобразуется к виду

$$2\frac{V}{q_0}\exp\theta\frac{dk}{d\theta} = -pl + z\exp(-\eta), \tag{22}$$

$$\frac{V}{q_0}\exp\theta\frac{dz}{d\theta} = -pkl + 3k\exp(-\eta)z - 2k^3\exp(-\eta), \tag{23}$$

$$\frac{V}{q_0}\exp\theta\frac{dl}{d\theta} = 3kl\exp(-\eta), \tag{24}$$

$$\frac{V}{q_0}\exp\theta\frac{d\eta}{d\theta} = k\exp(-\eta) \tag{25}$$

где $p \equiv \mu V L_0/(\nu q_0 N)$. Используя первые интегралы $l = \exp(3\eta)$ и $z = k^2 + \left(z_0 - k_0^2\right)\exp(2\eta)$, где $k_0 = k(0)$, $z_0 \equiv Z_0/N$, $Z_0 = Z(0)$, система уравнений (22)-(25) сводится к виду

$$2\sigma\exp\theta\frac{dy}{d\theta} = -\lambda\exp(3\eta) + y^2\exp(-\eta) + \left(1 - y_0^2\right)\exp(\eta), \tag{26}$$

$$\sigma\exp\theta\frac{d\eta}{d\theta} = y\exp(-\eta). \tag{27}$$

Здесь определены новые константы $\sigma \equiv V/\left(q_0\sqrt{z_0}\right)$, $y_0 = y(0)$,

$$\lambda \equiv p/z_0 = \mu V L_0/\left(z_0 \nu q_0 N\right) \tag{28}$$

и отмасштабированное волновое число солитона

$$y \equiv k/\sqrt{z_0}. \tag{29}$$

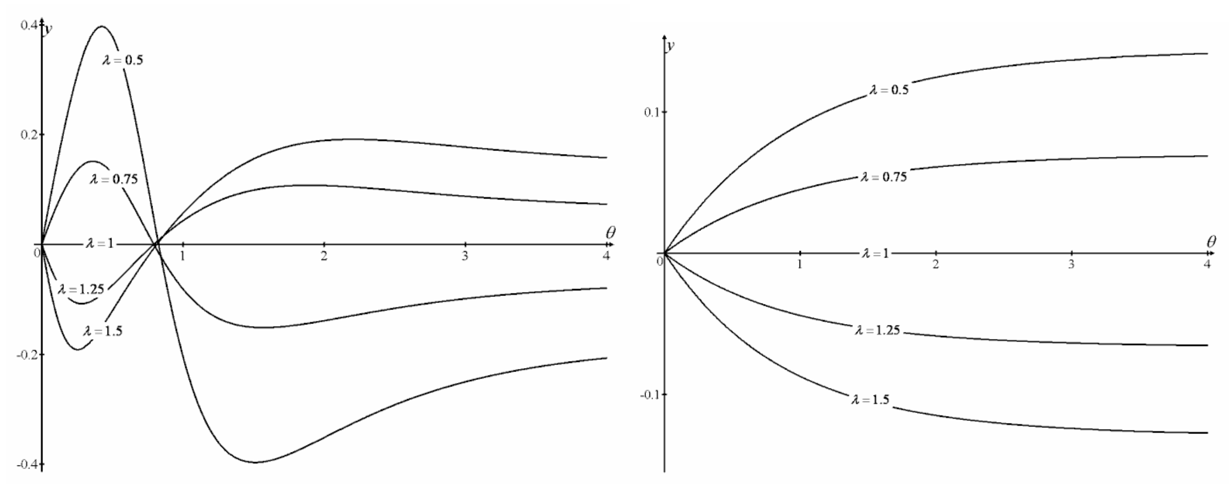
Равновесное состояние системы (27)-(28) достигается при условии

$$k = 0,\ VL_0\mu = q_0\nu Z_0. \tag{30}$$

В равновесном режиме волновой пакет U распространяется, сохраняя исходные величины интегральных моментов N, L_0, и Z_0, и с нулевым волновым числом. Однако моменты волнового поля исходного волнового пакета $W = U\exp(-\theta/2)$ экспоненциально затухают $N_W(\theta) = N\exp(-\theta)$, $L_W(\theta) = L_0\exp(-\theta)$, $Z_W(\theta) = Z_0\exp(-\theta)$. Первый интеграл этих уравнений имеет вид:

$$3y^2\exp(-\eta) - \lambda(1 - \exp(3\eta)) + 3\left(1 - y_0^2\right)(1 - \exp(\eta)) = 3y_0^2. \tag{31}$$

На рис. 1 представлена эволюция $y(\theta)$ во времени, как следствие уравнений (26)–(27), при начальном условии $y_0 = 0$ и для различных величин σ и λ.



а) б)

Рис. 1. Эволюция $y(\theta)$ во времени при начальном условии $y_0 = 0$
и различных величинах σ:
а $-\sigma = 1/10$; *б* – $\sigma = 1$], и λ

Солитонное решение

Рассмотрим теперь решение уравнения (6) при экспоненциальном пространственном профиле дисперсии второго порядка, определенном соотношением (20), т.е. $q(\xi+Vt) = q_0\exp(-(\xi+Vt)/D)$. Искомое решение представим в виде волны стационарного профиля $U(\xi,t) = \psi(\xi)\exp\left(i\int\Omega(t)dt\right)$:

$$q_0\exp\left(-\frac{\xi}{D}\right)\exp\left[t\left(\nu-\frac{V}{D}\right)\right]\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \frac{q_0}{D}\exp\left(-\frac{\xi}{D}\right)\exp\left[t\left(\nu-\frac{V}{D}\right)\right]\frac{d\psi}{d\xi} + \\ + 2\alpha\psi^3 - 2\Omega(t)\exp(\nu t)\psi + \mu\psi\frac{d(\psi^2)}{d\xi} = 0. \qquad (32)$$

При условии $V/D = \nu$ и $\Omega(t) = \Omega_0\exp(-\nu t)$ уравнение (32) дает

$$q_0\exp\left(-\frac{\nu\xi}{V}\right)\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 2\alpha\psi^3 - 2\Omega_0\psi - \nu\frac{q_0}{V}\exp\left(-\frac{\nu\xi}{V}\right)\frac{d\psi}{d\xi} + \mu\psi\frac{d(\psi^2)}{d\xi} = 0. \qquad (33)$$

Предположим, как было показано ранее, что масштаб пространственной неоднородности дисперсии второго порядка много больше ширины волнового пакета $D \equiv V/\nu >> D_U$. Принимая во внимание, что $\varepsilon \sim \nu D_U/V \sim \mu << \alpha, q_0$ и аппроксимация $\exp(-\nu\xi/V) \approx 1 - \nu\xi/V$, решение уравнения (33) можно найти в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \text{ при } \psi_1 \sim \varepsilon\psi_0 << \psi_0. \qquad (34)$$

Удерживая члены порядка ε, получим

$$q_0\frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} + 2\alpha\psi_0^3 - 2\Omega\psi_0 = 0, \qquad (35)$$

$$q_0\frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} + \left(6\alpha\psi_0^2 - 2\Omega\right)\psi_1 = \nu\frac{q_0}{V}\frac{d^2\psi_0}{d\xi^2}\xi - \frac{2}{3}\mu\frac{d(\psi_0^3)}{d\xi} + \nu\frac{q_0}{V}\frac{d\psi_0}{d\xi}. \qquad (36)$$

Уравнение (35) в нулевом порядке дает решение в виде солитона классического профиля:

$$\psi_0 = A_0\,\mathrm{sech}(\xi/\Delta),$$

где $$\Delta \equiv \sqrt{q}/\left(A_0\sqrt{\alpha}\right) \text{ и } \Omega \equiv \alpha A_0^2/2. \qquad (37)$$

После введения обозначений $\eta \equiv \xi/\Delta$ и $\Psi \equiv \psi_1 V/(\nu A_0 \Delta)$ уравнение (36) первой поправки примет вид

$$\frac{d^2\Psi}{d\eta^2}+\left(\frac{6}{\cosh^2\eta}-1\right)\Psi=-2\frac{\eta}{\cosh^3\eta}+\frac{\eta}{\cosh\eta}+\frac{5}{4}\frac{\mu}{\mu_*}\frac{\sinh\eta}{\cosh^4\eta}-\frac{\sinh\eta}{\cosh^2\eta}, \tag{38}$$

где

$$\mu_* \equiv 5q_0\nu/\left(8A_0^2V\right) \tag{39}$$

– равновесная величина коэффициента псевдо вынужденного рассеяния. Фактически, уравнение (39) определяет величину амплитуды солитона в нулевом приближении A_0, с которой солитон существует в принятой модели, т.е. в рамках уравнений (1), (2) и (20). При условии $\Psi(0)=0$ уравнение (38) приводит к точному решению для первой поправки,

$$\Psi(\eta)=\left(\Psi'(0)\tanh\eta-\frac{\eta^2}{4}\tanh\eta+\frac{\mu}{4\mu_*}(\tanh\eta)\ln(\cosh\eta)\right)\mathrm{sech}\eta+\frac{1}{12}\left(\frac{\mu}{\mu_*}-1\right)\left(\tanh^2\eta\right)\sinh\eta, \tag{40}$$

что можно сравнить с похожим решением, показанном в [38]. При $\mu=\mu_*$ решение (40) удовлетворяет граничным условиям $\Psi(\eta\to\pm\infty)\to 0$. Данное решение существует в результате баланса между псевдовынужденным рассеянием и экспоненциально убывающей дисперсией второго порядка. При $\mu\neq\mu_*$ решение (40) на бесконечности расходится $|\Psi(\eta\to\pm\infty)|\to\infty$. Отметим, что полное решение, заданное выражением (33), несимметрично, и является комбинацией симметричной и антисимметричной частей нулевого порядка и первого порядка (37) и (40). Решение с несимметричными хвостами возникает в рамках хорошо известной системы линейно связанных НУШ, описывающей туннельно связанные нелинейные оптические волокна [41].

Численный счет

Был проведен численный эксперимент для задачи эволюции волнового пакета с начально-заданным распределением $U(\xi,t=0)=1/\cosh\xi$, в рамках уравнения (6) при $\nu/V=1/10$, $q(\xi)=\exp(-\xi/10)$, $\alpha=1$ и различных величинах V, ν и μ. Предсказанный аналитически равновесный уровень коэффициента псевдовынужденного рассеяния (39) для указанного начального импульса - $\mu_*=1/16$.

В численном эксперименте начальный импульс при $\mu=1/16$ трансформировался к стационарному локализованному распределению с нулевым волновым числом. Это распределение близко к полученному аналитически решению, заданному выражениями (34), (37), и (40), с константами $q_0=\alpha=A_0=1$, $q'=-1/10$, и $\mu=\mu_*$, предсказанными (35)–(36):

$$|U|=\left(1+\frac{1}{40}\left((\tanh\xi)\ln(\cosh\xi)-\xi^2\tanh\xi\right)\right)\mathrm{sech}\xi. \tag{41}$$

При величине коэффициента псевдовынужденного рассеяния, отличном от μ_* (39), численный эксперимент приводит к нестационарному решению. Например, при $\mu=2/64\equiv 0.5\mu_*$, результат приведен на рис. 2.

На рис. 3 представлены результаты как численного эксперимента изменения во времени локального волнового числа в точке максимума огибающей волнового числа при различных величинах μ и соответствующие величины, полученные аналитически из (26)–(27). Показано близкое совпадение результатов аналитического исследования и численного эксперимента как при $\mu=\mu_*$ (где и в аналитическом, и в численном результате волновое число остается практически нулевым), так и для нестационарных импульсов при $\mu\neq\mu_*$. Подобная схожесть наблюдается и при всех величинах параметров.

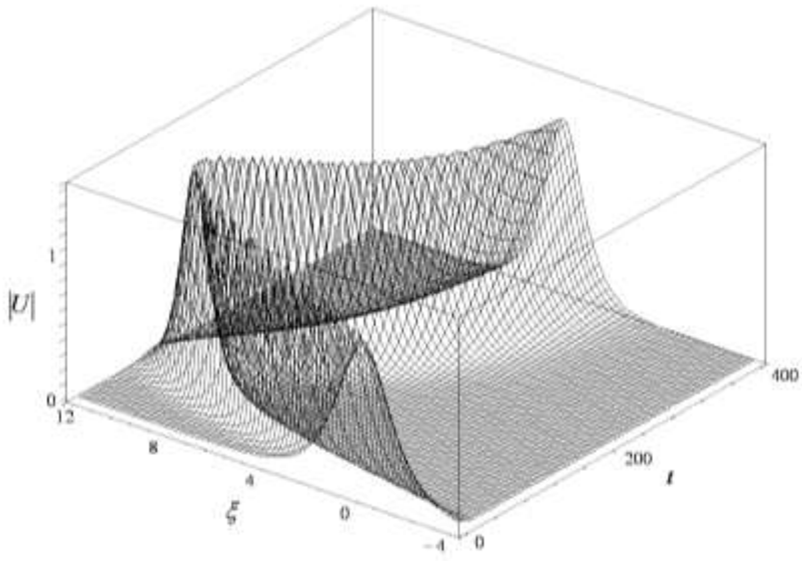
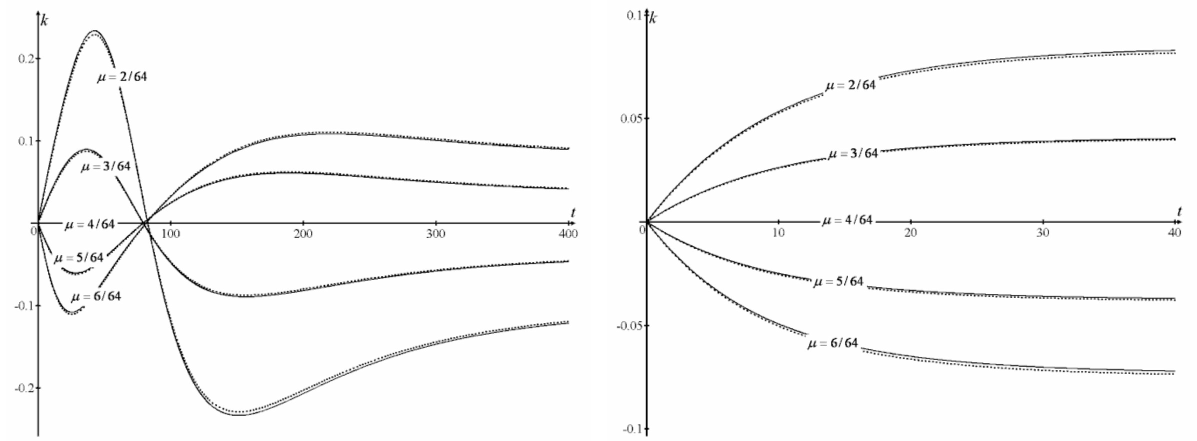


Рис. 2. Эволюция огибающей волнового пакета в численном эксперименте при $\mu = 2/64 \equiv 0.5\mu_*$ и $\nu = 0.01$, $V = 0.1$



а) *б)*

Рис. 3. Результаты численных и аналитических исследований (непрерывные и прерывистые линии). Изменение во времени локального волнового числа в максимуме огибающей волнового пакета при профиле дисперсии второго порядка $q(x) = \exp(-x/10)$, при различных величинах μ и различных ν и V :

$a - \nu = 0.01, V = 0.1$; $б - \nu = 0.1, V = 1$

Выводы

В данной работе исследована динамика солитона в рамках расширенного неоднородного НУШ, полученного из системы уравнений «захаровского» типа для связанных ВЧ- и НЧ-волн. Эта модель учитывает псевдовынужденное рассеяние Рамана, экспоненциально убывающую дисперсию второго порядка и линейные потери ВЧ-волн.

Результаты исследования получены аналитическим методом, основанным на анализе эволюционных уравнений для моментов волнового поля, а также подтверждены в численном эксперименте. Стационарный солитон в рамках этой модели существует в результате баланса между сдвигом вниз по спектру собственного волнового числа пакета (эффект вызван псевдовынужденным рассеянием) и сдвигом волнового числа вверх (эффект вызван экспоненциально убывающей дисперсией второго порядка). Аналитические и численные результаты совпадают для всех рассмотренных величин параметров.

В использованной модели не рассматривалась нелинейная дисперсия и линейная дисперсия третьего порядка. Модели с указанными членами высоких порядков малости и возможность компенсации эффектов псевдовынужденного рассеяния Рамана в таких моделях будут рассмотрены в дальнейших работах.

Библиографический список

1. **Infeld, E.** Nonlinear Waves, Solitons, and Chaos / E. Infeld, G. Rowlands // Cambridge University Press. – Cambridge, 2000.
2. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optic // Academic Press. – San Diego, 2001.
3. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis // Springer. – New York, 2001.
4. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agraval // Academic. – San Diego, 2003.
5. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems // World Scientific. – New York, 2005.
6. **Malomed, B.A.** Soliton Management in Periodic Systems // Springer. –New York, 2006.
7. **Dauxois, T.** Physics of Solitons / T. Dauxois, M. Peyrard **//** Cambridge University Press. – Cambridge, 2006.
8. **Sich M., Krizhanovskii D.N., Skolnick M.S., Gorbach A.V., Hartley R., Skryabin D.V., Cerda-Méndez E.A., Biermann K., Hey R., Santos P.V.,** Nature Phot. 6 (2012) 50-55.
9. **Kauranen M., Zayats A.V.,** Nature Phot. 6 (2012) 737-748.
10. **Cerda-Ménde E. A., Sarkar D., Krizhanovskii D. N., Gavrilov S.S., Biermann K., Skolnick M.S., and Santos P.V.,** Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 146401.
11. **Zakharov V.E., Shabat A.B.,** Sov. Phys. JETP. 34 (1972) 62-69.
12. **Hasegawa A., Tappert F.,** Appl. Phys. Lett. 23 (1973) 142-144.
13. **Tajima K.,** Optics Letters 12 (1987) 54-56.
14. **Oliviera J.R., Moura M.A.,** Phys. Rev. E 57 (1998) 4751-4755.
15. **Mitschke F.M, Mollenauer L.F.,** Optics Letters 11 (1986) 659-661.
16. **Gordon J.P.,** Optics Letters 11 (1986) 662-664.
17. **Kodama Y.,** J. Stat. Phys. 39 (1985) 597-614.
18. **Kodama Y. and Hasegawa A.,** IEEE J. Quantum Electron 23 (1987) 510-524.
19. **Zaspel C.E.,** Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 723-726.
20. **Hong B., Lu D.,** Inter. Journal of Nonlinear Science 7 (2009) 360-367.
21. **Karpman V.I.,** The European Physical Journal B 39 (2004) 341-350.
22. **Gromov E.M., Talanov V.I.,** JETP 83 (1996) 73-79.
23. **Gromov E.M., Talanov V.I.,** Chaos 10 (2000) 551-558.
24. **Gromov E.M., Piskunova L.V., Tyutin V.V.,** Physics Letters A 256 (1999) 153-158.
25. **Obregon M.A., Stepanyants Yu.A.,** Physics Letters A 249 (1998) 315-323.
26. **Scalora M., Syrchin M., Akozbek N., Poliakov E.Y., D'Aguanno G., Mattiucci N., Bloemer M.J., Zheltikov A.M.,** Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 013902.
27. **Wen S.C., Wang Y., Su W., Xiang Y., Fu X., Fan D.,** Phys. Rev. E 73 (2006) 036617.
28. **Marklund M., Shukla P.K., Stenflo L.,** Phys. Rev. E 73 (2006) 037601.
29. **Tsitsas N.L., Kourakis Rompotis I., Kevrekidis P.G.and Frantzeskakis D.J.,** Phys. Rev. E 79 (2009) 037601.
30. **Kivshar Y.S.,** Phys. Rev. A 42 (1990) 1757-1761.
31. **Kivshar Y.S., Malomed B.A.,** Optics Letters 18 (1993) 485-487.
32. **Malomed B.A., Tasgal R.S.,** JOSA B 15 (1998) 162-170.
33. **Biancalama F., Skrybin D.V., Yulin A.V.,** Phys. Rev. E 70 (2004) 011615.
34. **Essiambre R.-J., Agraval G.P.,** JOSA B 14 (1997) 314-322.
35. **Essiambre R.-J., Agrawal G.P.,** JOSA B 14 (1997) 323-330.
36. **Andrianov A., Muraviev S., Kim A., Sysoliatin A.,** Laser Physics 17 (2007) 1296-1302.
37. **Chernikov S., Dianov E., Richardson D., Payne D.,** Optics Letters 18 (1993) 476-478.
38. **Gromov E.M. and Malomed B.A.,** Soliton dynamics in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial counterpart of the stimulated Raman scattering, Journal of Plasma Physics 80 (2014) (accepted), text online available http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1306/1306.4550.pdf.

39. **Zakharov V.E.,** Sov. Phys. JETP 33 (1971) 927-932.
40. **Zakharov V.E.,** Radiophysics and Quantum Electronics 17 (1974) 326-343.
41. **Blit R., Malomed B.A.,** Phys. Rev. A 86 (2012) 043841.

Дата поступления
в редакцию 05.02.2014

N.V. Aseeva, L.G. Blyakhman, K.V. Logvinova, V.V. Tyutin

DAMPED SOLITONS IN AN EXTENDED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH A SPATIAL STIMULATED RAMAN SCATTERING AND DECREASING DISPERSION

National Investigate University Higher School of Economics

Purpose: Dynamics of solitons is considered in the framework of the extended nonlinear Schrödinger equation (NSE), which is derived from a system of Zakharov's type for the interaction between high- and low-frequency (HF and LF) waves. The resulting NSE includes a pseudo-stimulated-Raman-scattering (pseudo-SRS) term, i.e., a spatial-domain counterpart of the SRS term, which is a known ingredient of the temporal-domain NLSE in optics. Also included is inhomogeneity of the spatial second-order diffraction and linear losses of HF waves.
Approach: Soliton's dynamic investigated as analytically as numerically.
Findings: It is shown that wavenumber downshift by the pseudo-SRS may be compensated by upshift provided by SOD whose local strength is an exponentially decaying function of the coordinate. An analytical soliton solution with a permanent shape is found in an approximate form, and is verified by comparison with numerical results.

Key words: Extended Nonlinear Schrödinger Equation, Damped Soliton Solution, Stimulated Scattering, Damping Low-Frequency Waves, Linear Loss High-Frequency Waves, Inhomogeneity, Second-Order Dispersion, Analytical Solutions, Numerical Simulation.