

# ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.3.513

Е.А. Никулин

## О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

**Тема работы:** Исследование разрешимости задачи полиномиальной циклической интерполяции.**Цель работы:** Получение условий разрешимости задачи интерполяции линиями разных типов.**Метод решения:** Вывод и анализ определителей обращаемых матриц.**Оригинальность:** Использован блочный метод синтеза интерполяционных линий.**Выводы:** Получены правила выбора исходных данных, делающих задачу интерполяции разрешимой.*Ключевые слова:* полином, интерполяция, сегмент, сопряжение, матрица, определитель.

Данная работа продолжает серию статей [1, 2], посвященных блочному методу конструирования интерполяционных линий. На этот раз мы займемся *циклическими* линиями, у которых, кроме *необязательного* совпадения крайних точек, должны быть равны касательные векторы, что дает первый порядок гладкости замыкания, а для получения гладкости второго порядка должны быть равны еще и значения кривизны.

Рассмотрим применение блочного метода и проблемы, возникающие при создании циклических полиномиальных линий различных типов и порядков гладкости.

### Односегментные циклические линии

Обозначим как  $\mathbf{T}_m(t) = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^m]^T$  вектор базовых функций (степеней параметра  $t$ ) разложения полинома  $m$ -й степени, а векторы первых двух его производных как  $\mathbf{T}'_m(t) = [0 \ 1 \ 2t \ \dots \ mt^{m-1}]^T$  и  $\mathbf{T}''_m(t) = [0 \ 0 \ 2 \ \dots \ m(m-1)t^{m-2}]^T$ . Запишем векторную функцию линии в пространстве ее координат в виде параметрического полинома

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_1 t + \dots + \mathbf{s}_m t^m = \mathbf{S} \mathbf{T}_m(t) \quad (1)$$

с блочным вектором коэффициентов  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_0 \ \mathbf{s}_1 \ \dots \ \mathbf{s}_m]$ . Дифференцируя (1) по  $t$ , получим векторы скорости  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{S} \mathbf{T}'_m(t)$  и ускорения  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{S} \mathbf{T}''_m(t)$  движения точки по линии  $\mathbf{p}(t)$  в момент времени  $t$ .

Линия, проходящая через заданные точки  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  в порядке их нумерации, удовлетворяет условиям интерполяции  $\mathbf{S} \mathbf{T}_m(t_i) = \mathbf{u}_i \ \forall i = \overline{0, n}$ . Они образуют блочное векторно-матричное уравнение

$$\mathbf{S} [\mathbf{T}_m(t_0) \ \mathbf{T}_m(t_1) \ \dots \ \mathbf{T}_m(t_n)] = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n], \text{ или } \mathbf{S} \mathbf{W} = \mathbf{U} \quad (2)$$

с матрицей  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{mn}$ , равной матрице Вандермонда  $\mathbf{W}_{mn} = [\mathbf{T}_m(t_0) \ \mathbf{T}_m(t_1) \ \dots \ \mathbf{T}_m(t_n)]$ , составленной из  $m+1$ -й степеней  $n+1$ -го узлового отсчета параметра  $t$ , и вектором  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_n$ , равным блочному вектору  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ , составленному из  $n+1$ -й узловой точки.

Актуальны два метода задания узловых значений  $t_0 \div t_n$  ( $t_0$  задается свободно):

- *хордовый*, в котором приращение параметра  $t$  на межузловом интервале  $\mathbf{u}_{i-1} \div \mathbf{u}_i$  равно длине хорды  $d_i = |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}|$  и, таким образом,  $t_i = t_{i-1} + d_i$ ;

- *нормализованный*, когда параметр  $t$  на каждом интервале увеличивается на 1 и, таким образом,  $t_i = t_0 + i$ . Это частный случай хордового метода со всеми значениями  $d_i = 1$ .

В отсутствие иных, кроме интерполяционных, ограничений степень полинома  $m=n$ , а решение матричного уравнения (2) дает блочный вектор коэффициентов

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}. \tag{3}$$

В циклической линии с гладким замыканием *первого* порядка должны быть равны векторы краевых направлений  $\mathbf{S}\mathbf{T}'_m(t_n) = \mathbf{S}\mathbf{T}'_m(t_0)$ . Это дополнительное ограничение повышает степень полинома до  $m=n+1$  и добавляет в матрицы уравнения (2) по одному столбцу:

$$\mathbf{W}^{(1)} = [\mathbf{W}_{mn} \mid \mathbf{T}'_m(t_n) - \mathbf{T}'_m(t_0)], \quad \mathbf{U}^{(1)} = [\mathbf{U}_n \mid \mathbf{O}]. \tag{4}$$

В циклической *дважды* замкнутой линии должны совпадать еще и векторы краевых ускорений  $\mathbf{S}\mathbf{T}''_m(t_n) = \mathbf{S}\mathbf{T}''_m(t_0)$ . В результате степень полинома увеличивается до  $m=n+2$ , а матрицы уравнения (2) расширяются еще одним дополнительным столбцом:

$$\mathbf{W}^{(2)} = [ \mathbf{W}^{(1)} \mid \mathbf{T}''_m(t_n) - \mathbf{T}''_m(t_0) ], \quad \mathbf{U}^{(2)} = [ \mathbf{U}^{(1)} \mid \mathbf{O} ]. \tag{5}$$

После формирования матриц  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{U}$  по (3) вычисляется вектор коэффициентов полинома  $\mathbf{S}$  и по (1) строится график  $\mathbf{p}(t)$  с желаемым шагом параметра  $t \in [t_0, t_n]$ . Для сравнения методов на рис. 1 построены три пары интерполяционных линий на трехинтервальной неравномерной узловой сетке  $\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$ : со свободными концами (рис. 1, а), с первым (рис. 1, б) и вторым (рис. 1, в) порядками гладкости замыкания. Сплошные линии построены нормализованным, а пунктирные — хордовым методами параметризации.

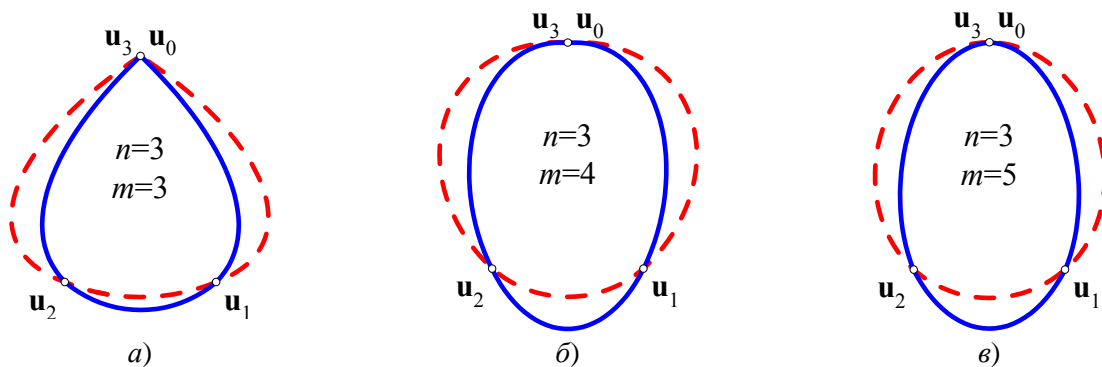


Рис. 1. Циклические интерполяционные линии

Казалось бы, нет проблем в работе достаточно простого алгоритма циклической интерполяции! Однако моделирование с разным числом и расположением узловых точек, а также разными методами параметризации, часто не давало никакого решения ввиду неожиданной сингулярности обращаемой в (3) матрицы  $\mathbf{W}$ .

Рассмотрим суть вопроса на простом примере проведения интерполянты через *три* (отсюда  $n=2$ ) узловых точки  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  с равными краевыми *направлениями*  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_2$  (отсюда  $m=3$ ). Начав с  $t_0=0$ , составим по (4) матрицу  $\mathbf{W}$  и вычислим ее определитель как функцию параметрических длин  $d_1 = t_1 - t_0 \neq 0$  и  $d_2 = t_2 - t_1 \neq 0$ :

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_{32} \mid \mathbf{T}'_3(t_2) - \mathbf{T}'_3(0)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & d_1 & d_1 + d_2 & 0 \\ 0 & d_1^2 & (d_1 + d_2)^2 & 2(d_1 + d_2) \\ 0 & d_1^3 & (d_1 + d_2)^3 & 3(d_1 + d_2)^2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{W}| = d_1 d_2 (d_1 + d_2)^2 (d_2 - d_1).$$

Следовательно, матрица  $\mathbf{W}$  вырождена, а *задача интерполяции с циклической гладкостью первого порядка неразрешима в двух случаях равенства параметрических длин  $d_1 = d_2$* :

- при *нормализованной* параметризации ( $d_1 = d_2 = 1$ ) с *произвольным* расположением узлов;

- при хордовой параметризации с равными межузловыми расстояниями  $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0| = |\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|$ .

Таким образом, построение двухинтервальной интерполянты с равными краевыми направлениями возможно только методом хордовой параметризации и при разных длинах отрезков  $\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$  (рис. 2, а).

Этот вывод распространяется на все узловые сетки с четным числом интервалов. Например, при  $n=4$  у определителя  $|\mathbf{W}|$  один из множителей

$$(d_1^3 - d_4^3 + d_1 d_2 d_3 - d_2 d_3 d_4 + d_1 d_2^2 + d_1^2 d_3 - d_2 d_4^2 - d_3^2 d_4 + 2d_1^2 d_2 - 2d_3 d_4^2)$$

обнуляется при всех равных значениях  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$  и делает задачу неразрешимой.

Напротив, при нечетных значениях  $n$  матрица  $\mathbf{W}$  в (4) всегда невырождена, а задача циклической интерполяции первого порядка гладкости разрешима как нормализованным, так и хордовым методами параметризации. Например, на четырехузловой сетке с числом интервалов  $n=3$  получается определитель

$$|\mathbf{W}| = d_1 d_2 d_3 (d_1 + d_2)(d_2 + d_3)(d_1 + d_2 + d_3)^2 (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3^2),$$

неравный нулю в обоих методах параметризации и при любом расположении узлов  $\mathbf{u}_0 \div \mathbf{u}_3$ , о чем свидетельствует гладко замкнутая линия на рис. 2, б.

Моделирование показывает, что увеличение порядка циклической гладкости до второго делает матрицу  $\mathbf{W}$  в (5) невырожденной при любом расположении узлов и в обоих методах параметризации. Например, при  $n=2$  и  $m=4$  она принимает вид

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_{42} \quad \mathbf{T}'_4(t_2) - \mathbf{T}'_4(0) \quad \mathbf{T}''_4(t_2) - \mathbf{T}''_4(0)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_1 + d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_1^2 & (d_1 + d_2)^2 & 2(d_1 + d_2) & 0 \\ 0 & d_1^3 & (d_1 + d_2)^3 & 3(d_1 + d_2)^2 & 6(d_1 + d_2) \\ 0 & d_1^4 & (d_1 + d_2)^4 & 4(d_1 + d_2)^3 & 12(d_1 + d_2) \end{bmatrix}$$

и имеет всегда ненулевой определитель  $|\mathbf{W}| = -12d_1^2 d_2^2 (d_1 + d_2)^3$ , а полученная линия (пунктирная на рис. 2, а) отличается минимальными межузловыми осцилляциями.

Таким образом, рекомендуется всегда строить циклические линии с двойной гладкостью в конечных точках. При совпадении же этих точек линия автоматически станет замкнутой. Именно такая полиномиальная кривая 6-й степени с координатными функциями

$$x(t) = \frac{(1-t)(3-t)(24+32t+8t^2-8t^3+t^4)}{72}, \quad y(t) = \frac{t(2-t)(4-t)(16+12t-3t^2)}{75} \quad \forall t \in [0, 4] \quad (6)$$

проходящая через точки  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_4 = [1 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u}_1 = [0 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = [-1 \ 0]^T$  и  $\mathbf{u}_3 = [0 \ -1]^T$ , построена на рис. 2, в. Максимальное отклонение ее точек от единичной окружности составляет 3%.

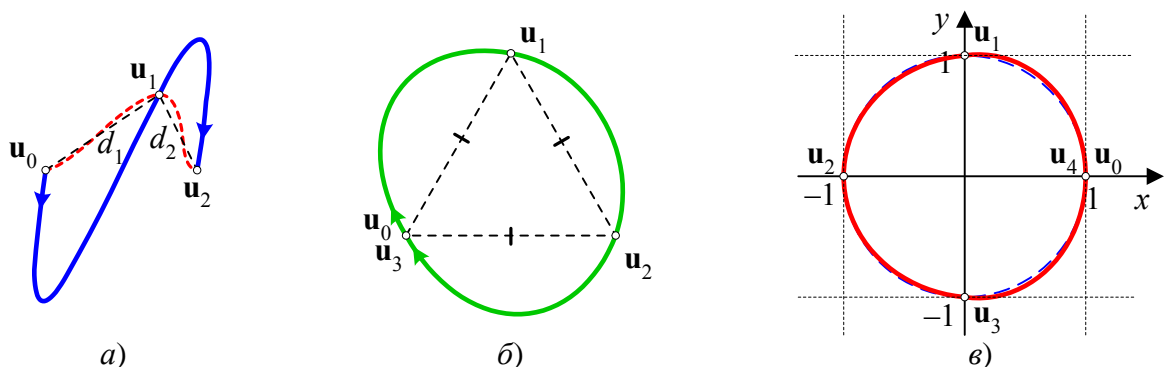


Рис. 2. Циклические интерполяционные линии

### Составные циклические линии

При большом числе узловых точек интерполяционные линии имеют сильные меж-узловые осцилляции, присущие полиномам высоких степеней. Полезным приемом, уменьшающим этот нежелательный эффект, является разбиение узловой сетки на кластеры с малым (не более  $4 \div 5$ ) числом интервалов, что позволяет создать различные свойства сопряжения сегментов, в том числе изломы и разрывы [1].

Пусть  $N$  – число сегментов составной линии и у каждого  $i$ -го сегмента  $n_i$  есть число интервалов кластера узловых точек  $\mathbf{U}_i = [\mathbf{u}_{i0} \ \mathbf{u}_{i1} \ \dots \ \mathbf{u}_{in_i}]$ , а  $m_i$  – степень полинома

$$\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{S}_i \mathbf{T}_{m_i}(t) \quad \forall t \in \Delta_i = [t_{i0}, t_{in_i}], \quad i = \overline{1, N}$$

с блочным вектором коэффициентов  $\mathbf{S}_i = [\mathbf{s}_{i0} \ \mathbf{s}_{i1} \ \dots \ \mathbf{s}_{im_i}]$ . Применяются следующие методы локализации параметра составной линии:

- *локальный*, по которому изменение  $t$  на  $i$ -ом сегменте начинается со значения  $t_{i0} = 0$ ;
- *сквозной*, когда параметр проходит отрезки  $\Delta_1 \div \Delta_N$  с правилом сопряжения  $t_{in_i} = t_{i+1,0}$ .

Для вычисления по (3) блочного вектора  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \ \mathbf{S}_2 \ \dots \ \mathbf{S}_N]$  коэффициентов полиномов всех сегментов циклической составной линии формируется матричное уравнение  $\mathbf{S}\mathbf{W} = \mathbf{U}$ , аккумулирующее следующие условия:

- интерполяции внутри каждого сегмента  $\mathbf{S}_i \mathbf{W}_{m_i n_i} = \mathbf{U}_i \quad \forall i = \overline{1, N}$ ;
- первого порядка гладкости сопряжения сегментов  $\mathbf{S}_i \mathbf{T}'_{m_i}(t_{in_i}) = \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{T}'_{m_{i+1}}(t_{i+1,0}) \quad \forall i = \overline{1, N-1}$  и  $\mathbf{S}_N \mathbf{T}'_{m_N}(t_{N, n_N}) = \mathbf{S}_1 \mathbf{T}'_{m_1}(t_{1,0})$ , при этом их степени  $m_i = n_i + 1$ ;
- для получения второго порядка гладкости сопряжения сегментов добавляются условия  $\mathbf{S}_i \mathbf{T}''_{m_i}(t_{in_i}) = \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{T}''_{m_{i+1}}(t_{i+1,0}) \quad \forall i = \overline{1, N-1}$  и  $\mathbf{S}_N \mathbf{T}''_{m_N}(t_{N, n_N}) = \mathbf{S}_1 \mathbf{T}''_{m_1}(t_{1,0})$ , при этом  $m_i = n_i + 2$ .

В результате блочные матрицы  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{U}$ :

- при первом порядке гладкости сопряжения всех сегментов  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(1)}$  и  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(1)}$ , где

$$\mathbf{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{m_1 n_1} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{T}'_{m_1}(t_{1n_1}) & \dots & \mathbf{O} & -\mathbf{T}'_{m_1}(t_{10}) \\ \mathbf{O} & \mathbf{W}_{m_2 n_2} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\mathbf{T}'_{m_2}(t_{20}) & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{W}_{m_{N-1} n_{N-1}} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{T}'_{m_{N-1}}(t_{N-1, n_{N-1}}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{W}_{m_N n_N} & \mathbf{O} & \dots & -\mathbf{T}'_{m_N}(t_{N0}) & \mathbf{T}'_{m_N}(t_{N, n_N}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{(1)} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2 \ \dots \ \mathbf{U}_{N-1} \ \mathbf{U}_N \ | \ \mathbf{O} \ \dots \ \mathbf{O} \ \mathbf{O}];$$

- при задании второго порядка гладкости сопряжения  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(2)}$  и  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(2)}$ , где

$$\mathbf{W}^{(2)} = \begin{bmatrix} & & & \mathbf{T}''_{m_1}(t_{1n_1}) & \dots & \mathbf{O} & & -\mathbf{T}''_{m_1}(t_{10}) \\ & & & -\mathbf{T}''_{m_2}(t_{20}) & \dots & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{T}''_{m_{N-1}}(t_{N-1, n_{N-1}}) & & \mathbf{O} \\ & & & \mathbf{O} & \dots & -\mathbf{T}''_{m_N}(t_{N0}) & & \mathbf{T}''_{m_N}(t_{N, n_N}) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = [ \quad \mathbf{U}^{(1)} \quad | \quad \mathbf{O} \ \dots \ \mathbf{O} \ \mathbf{O} ].$$

Приступим теперь к изучению проблемы разрешимости задачи циклической составной интерполяции на примере линии, два кубических сегмента которой строятся на двух кластерах  $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{u}_{10} \ \mathbf{u}_{11} \ \mathbf{u}_{12}]$  и  $\mathbf{U}_2 = [\mathbf{u}_{20} \ \mathbf{u}_{21} \ \mathbf{u}_{22}]$  с первым порядком гладкости сопряжения.

Определитель матрицы  $\mathbf{W}^{(1)}$  выражается через длины параметрических интервалов  $d_{ij}=t_{ij}-t_{i,j-1}$  следующим образом (зададим локальную параметризацию с  $t_{10}=t_{20}=0$ ):

$$\mathbf{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{11}+d_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & d_{11}^2 & (d_{11}+d_{12})^2 & 0 & 0 & 0 & 2(d_{11}+d_{12}) & 0 \\ 0 & d_{11}^3 & (d_{11}+d_{12})^3 & 0 & 0 & 0 & 3(d_{11}+d_{12})^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{21} & d_{21}+d_{22} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{21}^2 & (d_{21}+d_{22})^2 & 0 & 2(d_{21}+d_{22}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{21}^3 & (d_{21}+d_{22})^3 & 0 & 3(d_{21}+d_{22})^2 \end{bmatrix},$$

$$|\mathbf{W}^{(1)}| = d_{11}d_{12}d_{21}d_{22}(d_{11}+d_{12})^2(d_{21}+d_{22})^2(d_{11}d_{21}-d_{12}d_{22}).$$

Видно, что при  $\{n_1, n_2\} = \{2, 2\}$  и  $\{m_1, m_2\} = \{3, 3\}$  эта матрица сингулярна, а задача циклической интерполяции с гладкостью сопряжения первого порядка неразрешима, в двух случаях:

- в методе *нормализованной* параметризации (все  $d_{11}=d_{12}=d_{21}=d_{22}=1$ ) с произвольным расположением узловых точек;
- в методе *хордовой* параметризации с *равными* произведениями межузловых расстояний  $d_{11}d_{21}=d_{12}d_{22}$ , где  $d_{ij} = |\mathbf{u}_{ij} - \mathbf{u}_{i,j-1}|$ .

Моделирование с произвольными узловыми точками *показало неразрешимость задачи нормализованной циклической интерполяции при четном суммарном числе интервалов узловой сети*  $n = \sum n_i$ . Создаваемая методом хордовой параметризации, составная линия не существует при определенном сочетании расстояний между узлами. Так, при  $\{n_1, n_2\} = \{1, 3\}$

определитель  $|\mathbf{W}^{(1)}| = d_{11}^2 d_{21} d_{22} d_{23} (d_{21} + d_{22}) (d_{21} + d_{22} + d_{23})^3 (d_{23} - d_{21}) = 0$ , когда  $d_{21} = d_{23}$ .

Напротив, при *нечетных*  $n$  задача циклической составной интерполяции *разрешима* обоими методами параметризации при любом расположении узловых точек. К примеру, на узловой сетке из  $n=3$  интервалов, разделенных на два кластера размерностей  $\{n_1, n_2\} = \{1, 2\}$ , получается всегда ненулевой определитель  $|\mathbf{W}^{(1)}| = -d_{11}^2 d_{21} d_{22} (d_{21} + d_{22})^3 \neq 0$ .

Как и в односегментном варианте, *использование двойной гладкости сопряжения сегментов делает задачу составной циклической интерполяции всегда разрешимой*. Например, при  $\{n_1, n_2\} = \{2, 2\}$  и  $\{m_1, m_2\} = \{4, 4\}$  очень громоздкое выражение определителя  $|\mathbf{W}^{(2)}|$  не содержит ни одной разности, и потому его значение всегда ненулевое.

Все изложенное иллюстрируют графики на рис. 3:

- двухсегментная линия (рис. 3, а) с гладкостью первого порядка успешно построена хордовым методом на  $n=4$  интервальной узловой сетке благодаря неравенству  $d_{11}d_{21} \neq d_{12}d_{22}$ , что было бы невозможно при  $d_{11}d_{21} = d_{12}d_{22}$  либо нормализованным методом;
- выбор второго порядка гладкости сопряжения сегментов сделало эту задачу разрешимой как нормализованным, так и хордовым методами параметризации даже при равномерном распределении четырех узловых точек по кругу, когда  $d_{11}d_{21} = d_{12}d_{22}$ . Максимальное отклонение точек двухсегментной составной линии (рис. 3, б) от окружности составило 2%, то есть ее полиномиальная модель (с нормализованной локальной параметризацией)

$$\mathbf{p}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 - 1.5t^2 + 0.5t^3 \\ 1.6t - 0.8t^3 + 0.2t^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2(t) = -\mathbf{p}_1(t) \quad \forall t \in [0, 2]$$

лучше приближает окружность, чем более сложная односегментная модель (6);

- три составные дважды гладкие линии (е) построены на узловой сетке с *четным* (неразрешимым с первым порядком гладкости сопряжения!) числом интервалов  $n=18$ . У линий с нормализованной (1) и хордовой (2) параметризациями сеть разбита на шесть кластеров с  $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\} = \{3, 3, 3, 4, 1, 4\}$ , а линия (3) построена методом хордовой параметризации на четырех кластерах с  $\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = \{4, 5, 5, 4\}$ . Графики наглядно показывают существенную зависимость формы составной линии как от выбора метода параметризации, так и от способа кластеризации узловой сети.

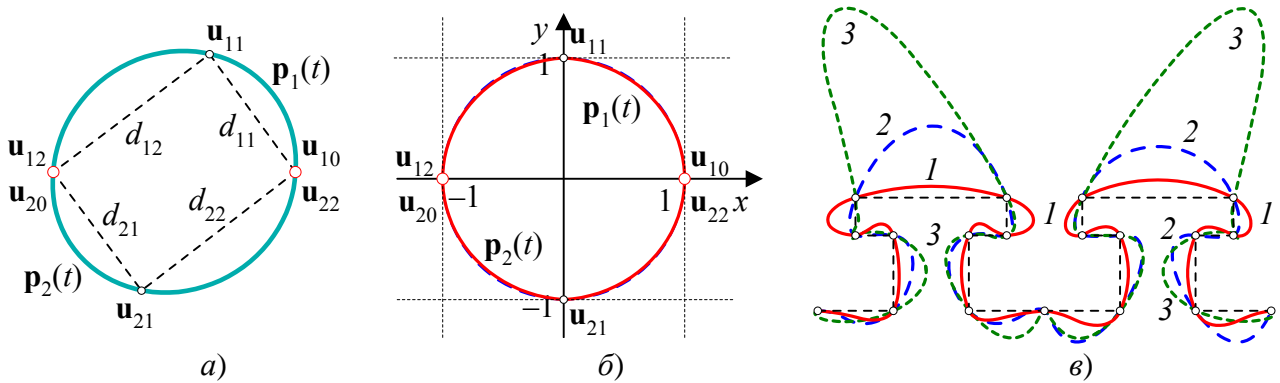


Рис. 3. Циклические составные интерполяционные линии

### Сплайновые циклические линии

Дважды гладкие составные полиномиальные линии, созданные на одноинтервальных ( $n_i=1$ ) кластерах  $u_{i-1}u_i$ , называются сплайнами и описываются кубическими полиномами

$$p_i(t) = S_i T_3(t) \quad \forall t \in [t_{i0}, t_{i1}] \quad \forall i = \overline{1, N}.$$

Блочный метод расчета матриц  $S_0 \div S_N$  коэффициентов сплайнов с различными краевыми условиями подробно рассмотрен в [2], а здесь приведен конечный алгоритм их вычисления применительно к циклическому варианту сопряжения крайних сегментов:

$$A_i = [T(t_{i0}) \quad T(t_{i1}) \quad T'(t_{i1}) \quad T''(t_{i1})], \quad B_i = [O \quad O \quad T'(t_{i0}) \quad T''(t_{i0})], \quad U_i = [u_{i-1} \quad u_i \quad O \quad O];$$

$$W = \begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O & -B_1 \\ -B_2 & A_2 & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & A_{n-1} & O \\ O & O & \dots & -B_n & A_n \end{bmatrix}, \quad U = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_N]; \tag{8}$$

$$S = UW^{-1}.$$

Для устранения проблем, связанных с высокой размерностью обращаемой матрицы  $W \in \mathbb{R}^{4N \times 4N}$ , в [2] приведен рекуррентный алгоритм вычисления матриц  $S_N, \dots, S_2, S_1$ , в котором обращаются лишь две матрицы размерности  $4 \times 4$ .

**Шаг 1.** Получение матриц  $L$  и  $M$  в выражении  $S_1 = L + S_N M$ :

$$L = O, \quad M = I_4, \quad \{L = (U_i + LB_{i+1})A_i^{-1}, \quad M = MB_{i+1}A_i^{-1} \quad \forall i = \overline{N-1, 1}\},$$

где  $I_k$  – единичная матрица размерности  $k \times k$ .

**Шаг 2.** Вычисление векторов коэффициентов сплайна:

$$S_N = (U_N + LB_1)(C - MB_1)^{-1}, \quad S_i = (U_i + S_{i+1}B_{i+1})A_i^{-1} \quad \forall i = \overline{N-1, 1}.$$

Алгоритм легко программируется и отличается *постоянными* небольшими затратами

памяти и *линейной* зависимостью времени расчета от числа интервалов  $N$ , в отличие от ретроспективного метода (8), чья трудоемкость квадратично зависит от размера узловой сети.

Разрешимость задачи циклической сплайн-интерполяции связана с обнулением определителя матрицы  $\mathbf{W}$ . Структурно матрицы  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{U}$  алгоритма (8) отличаются от матриц  $\mathbf{W}^{(2)}$  и  $\mathbf{U}^{(2)}$  из (7) лишь синхронной перестановкой столбцов, поэтому благодаря второму порядку сопряжения всех сегментов *задача циклической сплайн-интерполяции всегда разрешима*. Это подтверждают значения определителей  $|\mathbf{W}|$ , не обращающиеся в нуль при любых размерах узловой сети  $N$ , параметрических длинах  $d_i = t_{i1} - t_{i0}$  и во всех методах параметризации и локализации. Например, при вычислении коэффициентов сплайна, создаваемого на трехинтервальной узловой сети  $\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$ , получается определитель

$$|\mathbf{W}| = 48d_1^2d_2^2d_3^2(d_1+d_2+d_3)(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3) \neq 0.$$

### Библиографический список

1. **Никулин, Е.А.** Построение составных линий с различными свойствами сопряжения и произвольными условиями фиксации сегментов // Информационные технологии: тр. НГТУ; Нижегород. гос. техн. ун-т. – Н. Новгород, 2006. Т. 58. Вып. 11. С. 5–12.
2. **Никулин, Е.А.** Прямой параметрический синтез сплайновых линий // Системы обработки информации и управления: тр. НГТУ; Нижегород. гос. техн. ун-т. – Н. Новгород, 2007. Т. 65. Вып. 14. С. 123–130.

Дата поступления  
в редакцию 01.02.2014

**Е.А. Nikulin**

### ON THE SOLVABILITY OF CYCLIC INTERPOLATION PROBLEM

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

**Subject:** Investigation of the solvability of polynomial cyclic interpolation.

**Purpose:** To find the solvability conditions of the interpolation problem by different types of lines.

**Methodology:** Derivation and analysis of the matrices inversed determinants.

**Originality:** Block method of interpolation lines synthesis is used.

**Findings:** Rules for input data selection that make the interpolation problem resolvable are obtained.

*Keywords:* polynome, interpolation, segment, junction, matrix, determinant.