РАДИОТЕХНИКА, СИСТЕМЫ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ, АНТЕННЫ И УСТРОЙСТВА СВЧ

УДК 537.874.6

Ы. Ким, Н.Ф. Ковалев, С.Е. Фильченков

ПОЛЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. МЕТОД СВЯЗАННЫХ ВОЛН

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Цель: Развитие метода разложения по собственным функциям, используемого в задачах дифракции.
Методология / подход: Универсальный метод вывода линейных уравнений взаимно связанных волн, применимый к волноведущим системам различной физической природы.
Результаты: Предложен оригинальный математически строгий метод, обладающий физической наглядностью и позволяющий не только получать математически корректные приближенные решения, но и давать им наглядную физическую трактовку.
Применение: Решение широкого класса систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.
Оригинальность / значение: В методе не используются операции почленного дифференцирования рядов, предельные переходы и раскрытие неопределенностей, что обуславливает его широкую применимость, в частности, для случая представления полей неравномерно сходящимися рядами.

Ключевые слова: волновод, собственные волны, коэффициент связи, переизлучение, норма, ортогональность.

При теоретическом исследовании распространения волн в полых волноводах с распределенными неоднородностями весьма эффективен один из вариантов метода связанных волн, названный в [1] методом поперечных сечений. Идея метода состоит в следующем. Неоднородному волноводу в каждом его поперечном сечении сопоставляется вспомогательный регулярный волновод сравнения (ВС) с теми же сечением и распределением параметров заполняющей среды. Искомое поле ищется в виде суперпозиции полей собственных волн соответствующих ВС. Коэффициенты этих разложений определяются из решений системы взаимно связанных линейных уравнений первого порядка, имеющих стандартный вид системы связанных волн или связанных колебаний. Во многих случаях такой переход позволяет получать удобные для приложений приближенные решения.

В монографии [1] приведен вывод уравнений связанных волн как для радио-, так и для акустических волноводов, основанный на нескольких последовательных предельных переходах и раскрытии нескольких неопределенностей. Такой вывод делает неопределенной область применимости метода из [1] и затрудняет дальнейшее его развитие. В настоящей работе приведен прямой вывод уравнений связанных волн применительно к акустическим волноводам, причем без привлечения операций почленного дифференцирования бесконечных рядов, которые в общем случае сходятся неравномерно.

В качестве исходной здесь используется система уравнений первого порядка

$$\mathrm{div}\vec{V} = -iku\,, \tag{1а}$$

$$\mathrm{grad}\,u = -ik\vec{V} + \vec{F} \tag{1б}$$

для поля скоростей $\vec{V}=\vec{V}(\vec{r}_\perp,z)$ и скалярного поля давлений $u=u(\vec{r}_\perp,z)$. Предполагается, что параметры заполняющей среды не зависят ни от поперечных ($\vec{r}_\perp$), ни от продольной (z) координат. Зависимость от времени выбрана в виде $e^{i\omega t}$, ω – циклическая частота, $\vec{F}(\vec{r}_\perp,z)$ – векторное поле сторонних источников.

Каждому поперечному сечению нерегулярного волновода сопоставляется регулярный волновод сравнения (ВС) с координатной системой ($\vec{r}_\perp$, ζ), как показано на рис. 1. Ось ζ пересекает поперечные сечения в тех же точках, что и ось z, соответственно их направления совпадают. Операторы, действующие в пространстве ($\vec{r}_\perp$, ζ), отмечаются нижним индексом ζ.

В настоящей работе рассматриваются только волноводы с идеально мягкими стенками

$$u\Big|_{S_{\text{бок}}}=0, \tag{3}$$

соответственно на боковой поверхности регулярного ВС выбраны те же граничные условия (3), которые вместе с уравнениями

$$\operatorname{div}_\zeta \vec{V}^m - ih_m V_z^m = -iku^m, \tag{4а}$$

$$\operatorname{grad}_\zeta u^m - ih_m u^m \vec{z}_0 = -ik\vec{V}^m\ , \tag{4б}$$

порождают полные системы собственных волн в волноводах сравнения, отмечаемых верхними индексами m :

$$\hat{\vec{V}}^m(\vec{r}_\perp,\zeta,z)=\vec{V}^m(\vec{r}_\perp,z)e^{-ih_m(z)\zeta}, \tag{5а}$$

$$\hat{u}^m(\vec{r}_\perp,\zeta,z)=u^m(\vec{r}_\perp,z)e^{-ih_m(z)\zeta}. \tag{5б}$$

В (4) и (5) полные комплексные амплитуды $\vec{V}^m$ и u^m зависят не только от $\vec{r}_\perp$, но являются еще и функциями z, поскольку разным сечениям соответствуют различные ВС. По этой же причине от z зависят и продольные волновые числа $h_m(z)$. Индекс m принимает как положительные, так и отрицательные значения, за исключением $m=0$, т.е.

$$m\in(-\infty,-1],[1,\infty).$$

Для определенности предполагается, что отрицательным индексам $m<0$ соответствуют встречные волны, а положительным индексам $m>0$ – попутные. Предполагаются также выполненными условия четности

$$h_{-m}=-h_m, \tag{6а}$$

$$u^{-m}=-u^m, \qquad \vec{V}_\perp^{-m}=-\vec{V}_\perp^m, \qquad V_z^{-m}=V_z^m. \tag{6б}$$

В (5) крышкой отмечены поля скоростей и давлений собственных волн.

Величины и функции, входящие в систему уравнений (4), не зависят от координаты ζ, поэтому после добавления и вычитания в их левых частях по слагаемому

$$\frac{\partial V_z^m}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u^m}{\partial z}\vec{z}_0$$

уравнения (4) преобразуются к виду

$$\operatorname{div}\vec{V}^m - \frac{\partial V_z^m}{\partial z} - ih_m V_z^m = -iku^m, \tag{7а}$$

$$\operatorname{grad} u^m - \frac{\partial u^m}{\partial z}\vec{z}_0 - ih_m u^m \vec{z}_0 = -ik\vec{V}^m\ , \tag{7б}$$

в которые входят дифференциальные операторы, действующие, в отличие от (4), в пространстве $(\vec{r}_\perp, z)$. После подстановки уравнений из (1) и (7) в правую часть дифференциального тождества

$$\operatorname{div}(u^m\vec{V}-u\vec{V}^m)=u^m\operatorname{div}\vec{V}+\vec{V}\operatorname{grad}u^m-u\operatorname{div}\vec{V}^m-\vec{V}^m\operatorname{grad}u\,, \tag{8}$$

выводится удобный для дальнейшего вариант леммы Лоренца:

$$\operatorname{div}(u^m\vec{V}-u\vec{V}^m)=-\vec{V}^m\vec{F}+\left(\frac{\partial u^m}{\partial z}+ih_m u^m\right)V_z-\left(\frac{\partial V_z^m}{\partial z}+ih_m V_z^m\right)u\,, \tag{9}$$

из которой интегрированием по исчезающе тонкому поперечному слою нерегулярного волновода и с использованием теоремы Остроградского-Гаусса получается интегральное равенство с полной производной (d/dz)

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\int_{S_\perp}(u^mV_z-uV_z^m)ds-ih_m\int_{S_\perp}(u^mV_z-uV_z^m)ds=\int_{S_\perp}\left(\frac{\partial u^m}{\partial z}V_z-u\frac{\partial V_z^m}{\partial z}\right)ds-\\-\oint_L(u^m\vec{V}-u\,\vec{V}^m)\vec{\chi}\frac{dl}{\cos\theta}-\int_{S_\perp}\vec{F}\vec{V}^m ds\end{gathered}\,. \tag{10}$$

Следует отметить, что равенство (10) и полученная лемма Лоренца непосредственно применимы к исследованиям некоторых простых волноводных систем и лежат в основе доказательств ряда теорем или общих свойств нерегулярных волноводных систем.

Далее, учитывая:

- граничные условия на боковых идеально мягких стенках (3);
- условия ортогональности для полной систем собственных, или парциальных, волн

$$\int_{S_\perp}(u^{-m}V_z^j-u^jV_z^{-m})ds=N_m\delta_{m\,j} \tag{11}$$

в форме, удобной для дальнейших преобразований;

- (6а) и изменение знака у индекса m в (10);
- справедливость, то есть сходимость в среднем, только рядов для скалярных полей

$$V_z=\sum_j P_jV_z^j\,, \tag{12а}$$

$$u=\sum_j P_ju^j\,, \tag{12б}$$

из (10) выводится искомая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для взаимно связанных волн

$$\frac{dP_m}{dz}+ih_mP_m+\frac{1}{N_m}\frac{dN_m}{dz}=\frac{1}{N_m}\sum_j S_{m\,j}P_j-\frac{1}{N_m}\int_{S_\perp}\vec{F}\vec{V}^{-m}ds\,, \tag{13}$$

где

$$S_{m\,j}=\int_{S_\perp}\left(\frac{\partial u^{-m}}{\partial z}V_z^j-u^j\,\frac{\partial V_z^{-m}}{\partial z}\right)ds\;- \tag{14}$$

коэффициенты связи парциальных волн.

Как и m, индекс j принимает все значения от $-\infty$ до ∞, кроме $j=0$, так что (13), (14) описывают явление переизлучения собственных волноводных волн (5), (12) на участках волноводов с однородной заполняющей средой, но с переменным сечением, то есть когда $S_{m\,j}(z)\neq 0$, и явления возбуждения тех же волн сторонними векторными источниками, если

$$\int_{S_\perp(z)}\vec{F}\vec{V}^{-m}ds\neq 0\,. \tag{15}$$

Для однозначного определения комплексных амплитуд $P_m(z)$ бесконечную систему (13) нужно дополнить краевыми условиями, определяемыми из постановки конкретных задач и принципа причинности. Например, при падении с левой стороны какой-либо волны с индексом $m = N > 0$ на ограниченный по длине нерегулярный участок (z_1, z_2), вне области которого отсутствуют сторонние источники $\vec{F}$, концевые условия можно записать в следующем простом виде:

$$P_N(z_1) = P,\ P_m(z_1) = 0 \text{ если } m > 0 \text{ и } m \neq N;$$

$$P_m(z_2) = 0 \text{ если } m < 0.$$

При выводе результирующей системы (13) было принято предположение о представлении сходящимися рядами только двух полей u и V_z, причем без дополнительных неразлагаемых составляющих (12а), (12б). Если не применять каких-либо мер по улучшению сходимости ряда (12б), то поперечные скорости $\vec{V}_\perp$ можно представить аналогичными рядами

$$V_\perp = \sum_j P_j \vec{V}_\perp^{\,j} - \frac{i}{k}\vec{F}_\perp, \tag{16}$$

но с неразлагаемыми членами, пропорциональными $\vec{F}_\perp$, и только в области равномерной сходимости (12б). Появление в (16) неразлагаемых составляющих связано с непотенциальностью поля скоростей в области расположения источников (1б). Из полученного представления (16) следует также, что входящий в (16) ряд сходится медленно и неравномерно, а в точках с дельта-источниками

$$|F| \sim \delta \tag{17}$$

расходится.

Формула (14) для коэффициентов связи является универсальной, но наиболее пригодна она в случаях исследований переизлучений волн на частотах, близких к критическим $|h_m/k| << 1$. В случае же $|h_m| \approx k$ более удобными становятся другие представления для $S_{m\,j}$, не содержащие производных (по z) от полей. В качестве примера здесь приведен вывод одного из возможных таких представлений, полученного преобразованием (14) с использованием системы уравнений

$$\operatorname{div}_\zeta\left(\frac{\partial \hat{\vec{V}}^{-m}}{\partial z}\right) = -ik\frac{d\hat{u}^{-m}}{dz}, \tag{18а}$$

$$\operatorname{div}_\zeta\left(\frac{\partial \hat{u}^{-m}}{\partial z}\right) = -ik\frac{d\hat{\vec{V}}^{-m}}{dz}, \tag{18б}$$

обозначения в которой такие же, как в (4) и (5), а производные по z соответствуют переходу от одного волновода сравнения к другому, близкому. Например,

$$\frac{\partial \hat{u}^{-m}}{\partial z} = \left(\frac{\partial u^{-m}}{\partial z} + i\zeta\frac{dh_m}{dz}u^{-m}\right)e^{ih_m\zeta}. \tag{19}$$

Подставляя в дифференциальное соотношение типа (8) производные из (18а), (18б) и из (1а), (1б), но записанных для собственных волн ВС с индексами j, нетрудно получить дифференциальное соотношение

$$\operatorname{div}_\zeta\left(\frac{\partial \hat{u}^{-m}}{\partial z}\hat{\vec{V}}^{\,j} - \hat{u}^{\,j}\frac{\partial \hat{\vec{V}}^{-m}}{\partial z}\right) = 0 \tag{20}$$

типа леммы Лоренца. После интегрирования (20) по тонкому поперечному слою волновода сравнения с учетом (19) и граничных условий (3) для собственных волн, вытекает интегральное равенство

$$\frac{d}{d\zeta}\left[e^{i(h_m-h_j)\zeta}\right]\iint_{S_\perp}\left\{\left(\frac{\partial u^{-m}}{\partial z}+i\zeta\frac{dh_m}{dz}u^{-m}\right)V_z^j-u^j\left(\frac{\partial V_z^{-m}}{\partial z}+i\zeta\frac{dh_m}{dz}V_z^{-m}\right)\right\}dz+$$
$$+e^{i(h_m-h_j)\zeta}\oint_L\left(\frac{\partial u^{-m}}{\partial z}+i\zeta\frac{dh_m}{dz}u^{-m}\right)\vec{V}^j\vec{n}dl=0, \tag{21}$$

применимое при любом сочетании индексов m и j. В (21) L – контур поперечного сечения (рис. 1); а l – координата вдоль контура L.

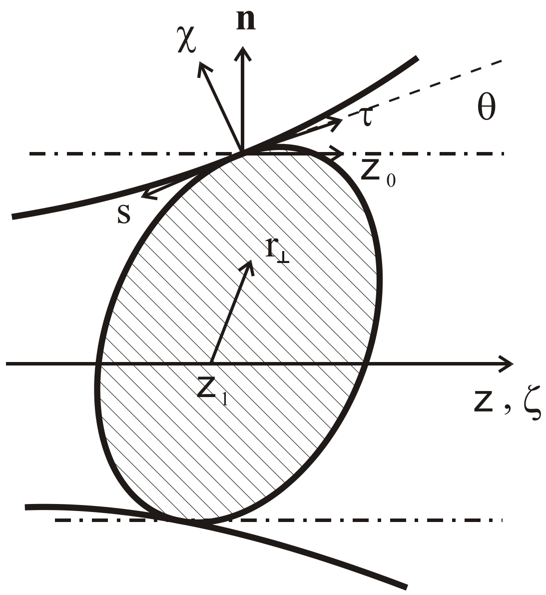

Рис. 1. Поперечное сечение ($z = z_1$) нерегулярного волновода (непрерывные линии) и соответствующий ему волновод сравнения (штрих-пунктирные линии)

Если предположить, что $j \neq m$, то с учетом условия ортогональности (11) из (21) следует необходимая для дальнейших преобразований формула:

$$i(h_m-h_j)\int_{S_\perp}\left(\frac{\partial u^{-m}}{\partial z}V_z^j-u^j\frac{\partial V_z^{-m}}{\partial z}\right)ds+\oint_L\frac{\partial u^{-m}}{\partial z}V_n^j dl=0\,. \tag{22}$$

Поскольку из граничных условий (3) следует

$$\frac{\partial u^{-m}}{\partial z}=-\kappa\frac{\partial u^{-m}}{\partial n}\,, \tag{23}$$

$$\kappa=\mathrm{tg}\theta \tag{24}$$

(см. рис. 1), то

$$S_{mj}=-\frac{i}{h_m-h_j}\oint_L\kappa\frac{\partial u^{-m}}{\partial n}V_n^j dl\,. \tag{25}$$

Если же положить $j=m$, то аналогичным образом выводится

$$\frac{dh_m}{dz}=-\frac{i}{N_m}\oint_L\kappa\frac{\partial u^{-m}}{\partial n}V_n^m dl\,. \tag{26}$$

В этом же случае $j=m$ путем дифференцирования по z условия ортогональности (11) аналогично выводятся соотношения взаимности:

$$S_{mj} = -S_{jm}\,, \quad j \neq m\,, \tag{27}$$

$$S_{mm} = -\frac{1}{2}\frac{dN_m}{dz} \tag{28}$$

– выражение для диагональных членов матрицы коэффициентов связи (14).

Последние результаты (25), (26) с точностью до обозначений, как и следовало ожидать, совпадают с соответствующими выражениями из [1]. Однако развитый здесь метод имеет несомненные преимущества. Поскольку при выводе (13) не использовались операции почленного дифференцирования плохо сходящихся рядов (12), предельные переходы и операции раскрытия неопределенностей, то возможны обобщения на случаи других граничных условий (3) и, что важно, на случаи разных граничных условий для полного поля и собственных волн волноводов сравнения. Возможен также корректный учет поглощения энергии звуковых волн волноводными стенками, сопровождаемого переизлучением волн.

Основания развитого здесь метода весьма просты и универсальны, поэтому он (метод) может быть использован и для других систем дифференциальных уравнений в частных производных, например, описывающих явления распространения тепловых возмущений. Применим метод и к несамосопряженным задачам, таким как исследование рассеяния волн в полых волноводах, заполненных электронными пучками. В подобных задачах вместо (11) нужно использовать более общее условие полной биортогональности, при выводе которого не используется симметрия (6а).

Очевидно, что рассмотренный обобщенный метод связанных волн становится эффективным, когда в процессе участвует небольшое число собственных волн, имеющих сравнимые амплитуды. Сопоставление амплитуд и фаз взаимодействующих волн и, особенно, сама форма промежуточных и последних уравнений часто позволяет давать простую и хорошо изученную трактовку явления переизлучения, облегчающую качественный анализ различных практических устройств.

---

1. **Каценеленбаум, Б.З**. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 215 с.

Дата поступления
в редакцию 22.04.2014

E. Kim, N.F. Kovalev, S.E. Filchenkov

HOLLOW ACUSTIC WAVEGUIDES WITH VARIABLE SECTION. COUPLED-WAVES APPROACH

Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod

Purpose: Development of a method of expansion in eigenfunctions, used in diffraction problems.
Design/methodology/approach: Universal method of a deriving of the linear equations of mutually coupled waves, applicable to waveguide systems of various physical nature.
Findings: The original mathematically strict method is suggested having physical presentation and allowing not only to obtain mathematically correct approximations but also to give them evident physical interpretation.
Research limitations/implications: The solution of a wide class of systems of the linear partial differential equations.
Originality/value: In the method operations of term by term differentiation, limit transitions and evaluation of indeterminate form not used. That is why it is widely applicated, in particular for a case of expansion of solution with nonuniform covergent series.

Key words: waveguide, eigenwaves, coupling coefficient, reradiation, norm, orthogonality.