УДК 621.372.8

Н.А. Новоселова, Л.Г. Рудоясова

О ПОСТАНОВКЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАДАЧ СЛОИСТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Дается постановка дисперсионных задач волн сферического двухслойного волновода. Дисперсионные уравнения составлены для случаев однородного и неоднородного внешнего слоя. Полученные уравнения позволяют исследовать, в частности, волны тропосферных волноводов.

Ключевые слова: дисперсионная задача, слоистый сферический волновод, комплексные волны, тропосферный слой.

Рассмотрение слоистых сферических волноводов представляет интерес в плане исследования волновых процессов в тропосфере. Тропосферный волновод можно рассматривать как открытый слоистый сферический волновод. Краевая задача, описывающая волны такого волновода, является несамосопряженной. В том случае, когда среды, образующие волновод, являются диссипативными, несамосопряженность краевой задачи следует [1,2] из нетождественности дифференциальных уравнений прямой и сопряженной задач. В том случае, когда параметры ε и μ сред, образующих волновод, являются действительными величинами, несамосопряженность краевой задачи является следствием несовпадения числа граничных условий прямой и сопряженной задач [1-4]. При этом в случае угловой симметрии поля такое несовпадение получается, если не накладывать на решение задачи нулевое условие на бесконечности.

Рассмотрим открытый двухслойный сферический волновод (рис. 1). Диэлектрическая проницаемость внешнего слоя является функцией радиальной координаты и частоты.

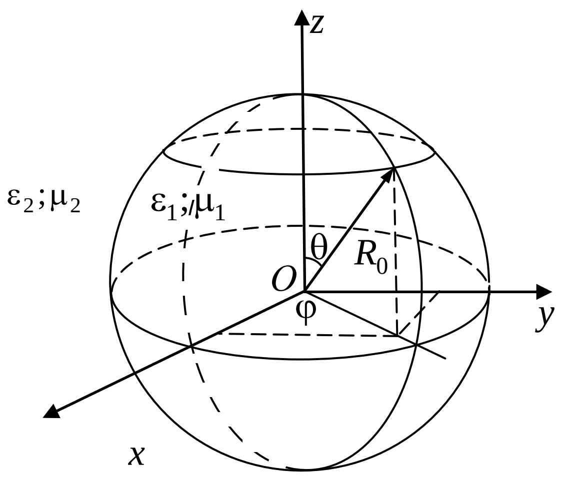

Рис. 1

Будем исследовать волны с комплексными волновыми числами. Если нет диссипации энергии (когда параметры ε и μ сред, образующих волновод, считаются действительными величинами), такие волны называются комплексными [1, 2]. В дальнейшем будем обозначать их как КВ.

Математический аппарат и полученные с помощью него результаты можно перенести на тропосферные волноводы с соответствующими зависимостями $\varepsilon(r,\omega)$ в среде, окружающей Землю.

В сферическом волноводе, образованном шаром радиуса R_0 с $\varepsilon = \varepsilon_1 = \mathrm{const}$ (рис. 1), и внешней неограниченной средой, диэлектрическая проницаемость которой в общем случае $\varepsilon = \varepsilon(r,\omega)$, могут распространяться волны, имеющие при отсутствии зависимости от координаты φ компоненты поля: E_φ, H_r, H_θ. В этом случае компонента электрического поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца, которое в сферической системе координат при $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = 0$ имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta}\right) + k^2E_\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $k^2 = \varepsilon(r,\omega)\mu\omega^2$.

Записывая решение уравнения (1) как $E_\varphi(r,\theta) = R(r)T(\theta)$,
после разделения переменных, получаем:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2r^2 - \gamma\right)R = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right) + \gamma T = 0. \qquad (3)$$

Взяв постоянную разделения в виде $\gamma = \nu(\nu+1)$, где ν – любое, в том числе комплексное, число, уравнении (3) переписываем в виде

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2T}{dx^2} - 2x\frac{dT}{dx} + \nu(\nu+1)T = 0, \qquad (4)$$

где введено обозначение $x = \cos\theta$.

Уравнение (4), называемое уравнением Лежандра [5], имеет решение

$$T(x) = P_\nu^{(0)}(x) + CQ_\nu^{(0)}(x), \qquad (5)$$

представляющее собой линейную комбинацию функций Лежандра 1- и 2-го рода.

Интересуясь в нашем случае волнами, бегущими в направлении θ, берем постоянную интегрирования $C = \pm i\dfrac{2}{\pi}$. При этом решение уравнения (3) принимает вид

$$T(\cos\theta) = T_0\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k(\nu+1)^k}{k!\left(\nu+\frac{3}{2}\right)^k}e^{\pm i(\nu+2k+1)\theta}. \qquad (6)$$

В этом случае величина ν имеет смысл постоянной распространения волны в направлении θ при любой зависимости $\varepsilon(r,\omega)$ во внешней области $r > R_0$.

Вид решений уравнения (2) определяется функцией диэлектрической проницаемости внешней области $\varepsilon_2(r,\omega)$, которая может быть частотно зависимой комплексной величиной.

Рассмотрим два варианта внешней среды, образующей вместе с однородным диэлектрическим шаром слоистый диэлектрический волновод.

Вариант 1: внешняя среда однородная: $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \neq k_2(r)$.

Записав решение уравнения (2) в виде $R(r) = w(r) / \sqrt{r}$, приходим к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]w = 0 \tag{7}$$

относительно функции $w(r)$. Решением уравнения (7) являются цилиндрические функции

$$w(r) = Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr), \tag{8}$$

которые описывают радиальную зависимость поля как во внутренней, так и во внешней областях рассматриваемой структуры. Из условия ограниченности поля при $r \to 0$ во внутренней области в качестве решения (8) берем функцию Бесселя $w(r) = AJ_{\nu+\frac{1}{2}}(k_1 r)$.

Во внешней области в предположении того, что при комплексном значении ε_2 волны должны удовлетворять условию излучения, в качестве решения (8) берем функцию Ханкеля 2-го рода $w(r) = BH^{(2)}_{\nu+\frac{1}{2}}(k_2 r)$. Здесь $k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$ – постоянные распространения плоских волн в соответствующих однородных средах.

Выражая компоненты поля через найденные решения уравнения (1) и подставляя их в граничные условия $E_{\varphi_1}(r = R_0) = E_{\varphi_2}(r = R_0)$; $H_{\theta_1}(r = R_0) = H_{\theta_2}(r = R_0)$, получаем систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов *A* и *B*.

Запись условия нетривиальности решений указанной системы с учетом одинаковой зависимости полей во внутренней и внешней областях от угловой координаты θ приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{1}{\mu_2} J_{\nu+\frac{1}{2}}(k_1 R_0) Q(\nu, k_2 R_0) - \frac{1}{\mu_1} H^{(2)}_{\nu+\frac{1}{2}}(k_2 R_0) P(\nu, k_1 R_0) = 0, \tag{10}$$

где

$$P(\nu, k_1 R_0) = \frac{1}{2} J_{\nu+\frac{1}{2}}(k_1 R_0) + k_1 R_0 J'_{\nu+\frac{1}{2}}(k_1 R_0);$$

$$Q(\nu, k_2 R_0) = \frac{1}{2} H^{(2)}_{\nu+\frac{1}{2}}(k_2 R_0) + k_2 R_0 H^{(2)'}_{\nu+\frac{1}{2}}(k_2 R_0).$$

Вариант 2: диэлектрическая проницаемость внешней среды является функцией радиальной координаты $\varepsilon_2 = \varepsilon\frac{R_0}{r}$. При этом, если $\varepsilon \neq \varepsilon_1$, на границе $r = R_0$ имеет место скачок диэлектрической проницаемости.

Радиальная зависимость поля во внутренней области так же, как и в 1-м варианте, описывается уравнением (7), в котором полагаем $\nu = \nu_1$. Функция $w(r)$, описывающая радиальную зависимость поля во внешней области, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_2}{dr} + \left(\varepsilon\frac{R_0}{r}\mu_2\omega^2 - \frac{4\gamma+1}{4r^2}\right)w_2 = 0, \tag{11}$$

в котором $\gamma = \nu_1(\nu_1 + 1)$.

Полагая $4\gamma + 1 = \nu_2^2$, решение уравнения (11) записываем в виде

$$w_2 = Z_{\nu_2}\left(2\sqrt{\alpha r}\right), \tag{12}$$

где Z_{ν_2} – цилиндрическая функция; $\alpha = \varepsilon_0 R_0 \mu\omega^2$. В этом случае функция, описывающая угловую зависимость поля во внешней области, должна удовлетворять уравнению

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 T}{dx^2} - 2x\frac{dT}{dx} + \frac{\nu_2^2 - 1}{4}T = 0. \tag{13}$$

Чтобы угловая зависимость поля в обеих областях была одинаковой, необходимо совпадение решений уравнений (4) и (13). Только в этом случае поля в обеих областях в направлении θ будут распространяться с одинаковыми скоростями, что обеспечит выполнение условия непрерывности на границе $r = R_0$ их тангенциальных компонент. Решения указанных уравнений будут совпадать при выполнении равенства $\nu_1(\nu_1 + 1) = \frac{\nu_2^2 - 1}{4}$, из которого следует связь постоянной распространения $\nu = \nu_1$ с индексом цилиндрической функции (12), описывающей радиальную зависимость поля во внешней среде: $\nu_2 = \sqrt{4\nu_1(\nu_1 + 1) + 1}$.

Взяв в качестве функции, описывающей радиальную зависимость поля во внутренней области, функцию Бесселя $w_1(r) = AJ_{\nu_1 + \frac{1}{2}}(k_1 r)$, во внешней области – функцию Ханкеля $Z_{\nu_2}\left(2\sqrt{\alpha r}\right) = H_{\nu_2}^{(2)}\left(2\sqrt{\alpha r}\right)$, обеспечивающую при наличии во внешней среде потерь выполнение условия излучения, имеем:

$$\begin{aligned} E_{\varphi_1} &= \frac{A}{\sqrt{r}} J_{\nu_1 + \frac{1}{2}}(k_1 r) T(\cos\theta); \\ E_{\varphi_2} &= \frac{B}{\sqrt{r}} H_{\nu_2}^{(2)}\left(2\sqrt{\alpha r}\right) T(\cos\theta). \end{aligned} \tag{14}$$

Из граничных условий (9)так же, как и в предыдущем варианте, получаем дисперсионное уравнение волн открытого двухслойного сферического волновода:

$$\frac{1}{\mu_2} J_{\nu_1 + \frac{1}{2}}(k_1 R_0) Q(\nu_2, \alpha R_0) - \frac{1}{\mu_1} H_{\nu_2}^{(2)}\left(2\sqrt{\alpha R_0}\right) P(\nu_1, k_1 R_0) = 0,$$

где

$$P(\nu_1, k_1 R_0) = \frac{1}{2} J_{\nu_1 + \frac{1}{2}}(k_1 R_0) + k_1 R_0 J'_{\nu_1 + \frac{1}{2}}(k_1 R_0);$$

$$Q(\nu_2, \alpha R_0) = \frac{1}{2} H_{\nu_2}^{(2)}\left(2\sqrt{\alpha R_0}\right) + \sqrt{\alpha R_0} H_{\nu_2}^{(2)'}\left(2\sqrt{\alpha R_0}\right).$$

Полученные дисперсионные уравнения позволяют исследовать волны двухслойного сферического волновода. Во втором варианте задачи, когда среда полагается неоднородной, направляющая структура может рассматриваться как модель тропосферного волновода. Волновые числа $\nu_{1,2}$ могут быть комплексными величинами и соответствовать различным типам КВ. В первом варианте при действительном k_2 во внешней области образуется поле излучения. Во втором варианте в зависимости от знака мнимой части величины $\sqrt{\alpha}$ могут образовываться поля как собственных, так и несобственных комплексных волн. При $I_m\sqrt{\alpha} > 0$ это поля несобственных КВ, при $I_m\sqrt{\alpha} < 0$ – собственных.

Библиографический список

1. **Веселов, Г.И.** Слоистые метало-диэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М.: Радио и связь, 1988. – 248 с.
2. **Раевский, А.С.** Комплексные волны / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2010. – 223 с.
3. **Наймарк, М.А.** Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
4. **Веселов, Г.И.** Комплексные волны в поперечно-неоднородных направляющих структурах / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский // Радиотехника. 1987. Т. 42. № 8. С. 64–67.
5. **Кузнецов, Д.С.** Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – М.: Высш. шк., 1965. – 423 с.

Дата поступления
в редакцию 06.05.2014

N.A. Novoselova, L.G. Rudoyasova

ON STATEMENT OF THE DISPERSION TASKS LAYERED SPHERICAL WAVEGUIDES

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: Give staging dispersion tasks spherical waves of a two-layer waveguide.
Methodology/approach: Make the dispersion equation for the cases of homogeneous and inhomogeneous external layer.
Findings: The obtained dispersion equation allow us to study the wave of double-layer spherical waveguide. The obtained dispersion equation allow us to study the wave of double-layer spherical waveguide. In the second variant of the task when the environment relies heterogeneous, guiding structure can be considered as a model of the tropospheric waveguide.
Originality/value: Consideration of layered spherical waveguides is of interest in studies of wave processes in the troposphere. In the General case tropospheric waveguide can be regarded as an open, layered spherical waveguide. Boundary value problem, describing the wave of such waveguide is несамосопряженной.

Key words: dispersion task, layered spherical waveguide, complex wave, tropospheric layer.