

УДК 629.124

М.Ю. Сандаков

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЁТА ЛЕДОВОЙ ХОДКОСТИ СУДОВ С ПОЛНЫМИ ОБВОДАМИ В БИТОМ ЛЬДУ**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Статья затрагивает вопросы движения транспортного судна, имеющего большой коэффициент общей полноты корпуса, в битом льду. В работе предложена новая гипотеза взаимодействия корпуса судна и обломков ледяного покрова. При движении в битом сплочённом льду полные обводы носовой оконечности корпуса судна толкают перед собой массы льда, тем самым достраивая корпус до более обтекаемой формы. Изучена форма достроенной «ледовой наделки» и определены её параметры. Создана и предложена методика расчёта сил ледового сопротивления движению судов с большим коэффициентом общей полноты в сплочённых битых льдах.

*Ключевые слова:* битый лёд, корпус судна с большим коэффициентом полноты, «ледовая наделка», трёхосный эллипсоид, ледовая ходкость, функции геометрии обвод корпуса, силы ледового сопротивления.

Актуальность работ по ледовой ходкости судов остаётся достаточно острой для России, что связано с увеличением добычи углеводородного сырья на Арктическом шельфе, работой промыслового флота в районах Крайнего Севера, транспортировкой редкоземельных металлов с полуострова Таймыр, охраной наших арктических территориальных водных границ. Для решения этих задач исследования ледопроеходимости транспортных судов в условиях битых льдов остаются актуальными и сегодня.

В настоящее время не существует научно обоснованного подхода к проектированию транспортных несамоходных речных судов, приспособленных работать в условиях ледовой навигации. Методы расчёта ледового сопротивления, созданные для транспортных судов многими авторами [5], не всегда могут быть применимы по отношению к данному типу судов из-за особенностей форм носовых оконечностей и соотношений главных размерений  $V/T = (6\sim 8)$ , а также значительных величин коэффициента общей полноты  $\delta = (0,75\sim 0,95)$ . Необходимо учесть, что несамоходные баржи имеют продолжительную цилиндрическую вставку в составе корпуса, около 90% длины конструктивной ватерлинии. Основным фактором невозможности применения ранее разработанных методик расчёта сил ледового сопротивления при движении судов в битых льдах является то, что во многие расчётные формулы очень часто входит тангенс угла притыкания действующей ватерлинии к диаметральной плоскости корпуса судна [5]. Рассматриваемые в исследовании суда имеют значение, упомянутого угла близким к 90 град., что соответствует близким к бесконечным величинам тангенса. Данное обстоятельство даёт в расчётах сил ледового сопротивления сильно завышенные значения, что не соответствует природе наблюдаемого явления движения судна с большим коэффициентом общей полноты в битом льду. Реальные суда обладают низкими качествами ледовой ходкости, но имеют установившееся движение в слое мелкобитого льда.

Наблюдения за работой судна в битых льдах позволяют заметить явление образования «ледовой наделки» в носовой части корпуса судна и определить геометрическую форму этой «наделки». Гипотеза достраивания частицами льда носовой оконечности наблюдаемого судна до четверти эллипсоида не противоречит картине взаимодействия корпуса судна с большим коэффициентом общей полноты и битым многослойным льдом.

Данный эллипсоид имеет все три главные оси различной величины, поэтому не может являться эллипсоидом вращения, как видно из рис. 1. Этот факт позволяет применить математический аппарат для дальнейших исследований аналитически описанной поверхности.

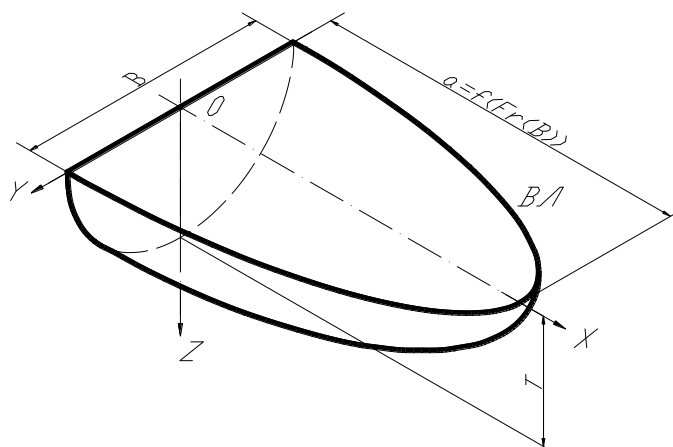


Рис. 1. Геометрия «ледовой наделки» из мелкобитого льда в виде эллипсоида

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (1)$$

где  $a \neq b \neq c$  – полуоси эллипсоида.

Согласно натурным исследованиям и результатам модельного эксперимента, длина полуосей эллипсоида определится следующим образом [6; 7]:

$$a = B2,61e^{-7,85Fr_B}, b = \frac{B}{2}, c = T, \quad (2)$$

где  $B$  – ширина судна;  $T$  – осадка судна;  $Fr_B$  – число Фруда, выраженное через ширину судна.

Так как для описания «ледовой наделки» необходима лишь часть эллипсоида – его четверть, – то создадим граничные условия

$$0 \leq x \leq a, -\frac{B}{2} \leq y \leq \frac{B}{2}, 0 \leq z \leq T. \quad (3)$$

В результате исследования граничных условий и данных модельного эксперимента получим уравнение формы поверхности эллипсоида (4)

$$\frac{x^2}{(2,61e^{-7,85Fr_B B})^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{B}{2}\right]^2} + \frac{z^2}{T^2} = 1. \quad (4)$$

Уравнение (4) позволяет в дальнейшем провести аналитическое исследование в определении сил ледового сопротивления движению судна, имеющего большой коэффициент общей полноты корпуса, используя методику расчёта ледовой ходкости в битых льдах [5].

Изучаемый нами объект представляет собой толкаемый состав, состоящий из баржи и толкача. Суммарное значение ледового сопротивления битого льда, очевидно, будет состоять из суммы сил

$$R_{\text{сум}} = R_{\text{тол}} + R_{\text{л.н}}, \quad (5)$$

где  $R_{\text{тол}}$  – ледовое сопротивление толкача;  $R_{\text{л.н}}$  – ледовое сопротивление достроенной обломками льда носовой оконечности баржи, «ледовой наделки». Значением  $R_{\text{тол}}$  можно пренебречь, в виду того, что корпус толкача имеет меньшую осадку, чем баржа (около 70%), и, самое главное, что его ширина корпуса составляет 60-70% от ширины корпуса толкаемого судна. Поэтому толкач (при условии грузовой осадки баржи) движется в «ледовом канале» с битым льдом меньшей сплочённости, а, как известно, битый лёд сплочённостью менее 4 баллов не оказывает значительное сопротивление движению судов [4].

Значение  $R_{\text{л.н}}$  определяется по методу Е.М. Грамузова. Работа, затрачиваемая на преодоление обломков льда, является значительной частью энергетических затрат судна, движущегося в ледяном поле. Как отмечается в [5], сопротивление обломков льда можно представить в виде

$$R_0 = (\rho_B - \rho_L)gh\Omega_L(\Phi_{\text{п}} + f\Phi_{\text{пт}}) + c_{\text{и}}\rho_L hBv^2(\Phi_{\text{и}} + f\Phi_{\text{пт}}) + c_{\text{г}}\Omega_L v^2(\Phi_{\text{г}} + f\Phi_{\text{гт}}) \quad (6)$$

где  $\rho_B$  – плотность воды;  $\rho_L$  – плотность льда;  $g$  – ускорение свободного падения;  $h$  – тол-

щина льда;  $\Omega_{\text{л}}$  – площади смоченной поверхности носовой оконечности;  $f$  – коэффициент трения льда;  $c_{\text{и}}$  – коэффициент инерционных сил;  $c_{\text{г}}$  – коэффициент гидродинамических сил;  $v$  – скорость движения судна;  $\Phi_{\text{п}}$  – функция, обусловленная притапливанием льдин;  $\Phi_{\text{п.т}}$  – функция сопутствующего трения льдин;  $\Phi_{\text{и}}$  – функция импульсного (инерционного) сопротивления;  $\Phi_{\text{и.т}}$  – функция трения импульсного (инерционного) сопротивления, обусловленного потерей кинетической энергии при ударе о льдины;  $\Phi_{\text{г}}$  – функция гидродинамической составляющей пространственного взаимодействия обломков льда;  $\Phi_{\text{г.т}}$  – функция трения гидродинамической составляющей.

Параметрами формы корпуса, оказывающими влияние на ледовую ходкость в битом льду, служат некоторые функции геометрии ( $\Phi_{\text{п}}$ ,  $\Phi_{\text{п.т}}$ ,  $\Phi_{\text{и}}$ ,  $\Phi_{\text{и.т}}$ ,  $\Phi_{\text{г}}$ ,  $\Phi_{\text{г.т}}$ ) характеризующие обводы корпуса судна (в нашем случае также и формы «ледовой наделки») с точки зрения ледового сопротивления.

В работе [3] предлагается следующий метод расчёта функций геометрии. Направляющие косинусы рассчитываются через частные производные от уравнения судовой поверхности. В нашем случае уравнение судовой поверхности легко выразить через уравнение формы «ледовой наделки». Расчёт производится в следующей последовательности: вычисление частных производных, вычисление подынтегральной функции в узлах сетки и численное интегрирование.

Для функций инерционной силы и инерционной силы трения необходимо рассчитать определённые интегралы:

$$\Phi_{\text{и}} = \frac{2}{B} \int_0^B n_x^2 dy; \quad \Phi_{\text{и.т}} = \frac{2}{B} \int_0^B n_x \sqrt{1 - n_x^2} dy. \quad (7), (8)$$

Для их расчета, средствами Mathcad выразим из уравнения эллипсоида значение  $x$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{T^2} - 1 \text{ solve, } x \rightarrow \left( \frac{a\sqrt{T^2 b^2 - T^2 y^2 - b^2 z^2}}{Tb} - \frac{a\sqrt{T^2 b^2 - T^2 y^2 - b^2 z^2}}{Tb} \right); \quad x = \frac{a\sqrt{T^2 b^2 - T^2 y^2 - b^2 z^2}}{Tb} \quad (9)$$

Найдем через частные производные значение направляющего косинуса  $n_x$  при условии, что  $z = 0$ ,

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dy}x\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}x\right)^2}}; \quad n_x \rightarrow \left[ \frac{T^2 a^2 y^2}{b^2(T^2 b^2 - T^2 y^2)} + 1 \right]^{-1/2}. \quad (10)$$

Вызвав подынтегральные выражения, получим

$$n_x^2 \rightarrow \frac{1}{\frac{T^2 a^2 y^2}{b^2(T^2 b^2 - T^2 y^2)} + 1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{b^2(b^2 - y^2)}{a^2 y^2 + b^4 - b^2 y^2};$$

$$n_x \sqrt{1 - n_x^2} \rightarrow \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\frac{T^2 a^2 y^2}{b^2(T^2 b^2 - T^2 y^2)} + 1}}}{\sqrt{\frac{T^2 a^2 y^2}{b^2(T^2 b^2 - T^2 y^2)} + 1}} \rightarrow \text{ simplify } \rightarrow \frac{\sqrt{a^2 y^2 / a^2 y^2 + b^4 - b^2 y^2}}{\sqrt{a^2 y^2 + b^4 - b^2 y^2 / b^4 - b^2 y^2}}. \quad (11)$$

Поскольку определённые интегралы можно рассчитать аналитически, вычислим их средствами Mathcad

$$\Phi_{\text{и}} = \frac{2}{B} \int_0^B n_x^2 dy = \frac{2}{B} \int_0^B \frac{b^2(b^2 - y^2)}{a^2 y^2 + b^4 - b^2 y^2} dy, \quad (12)$$

$$\Phi_{\text{и.т}} = \frac{2}{B} \int_0^B n_x \sqrt{1 - n_x^2} dy = \frac{2}{B} \int_0^B \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\frac{T^2 a^2 y^2}{b^2(T^2 b^2 - T^2 y^2)} + 1}}}{\sqrt{\frac{T^2 a^2 y^2}{b^2(T^2 b^2 - T^2 y^2)} + 1}} dy, \quad (13)$$

Для расчета гидродинамических функций и функций притапливания необходимо рассчитать поверхностные интегралы:

$$\Phi_{\text{п}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} n_x n_z d\Omega; \quad \Phi_{\text{п.т}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} n_z \sqrt{1 - n_x^2} d\Omega, \quad (14), (15)$$

$$\Phi_{\text{г}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} n_x^3 d\Omega; \quad \Phi_{\text{г.т}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} n_x^2 \sqrt{1 - n_x^2} d\Omega. \quad (16), (17)$$

Интегрирование по поверхности заменяется интегрированием на плоскости:

$$d\Omega = n_z dx dy. \quad (18)$$

Таким образом, функции геометрии примут вид

$$\Phi_{\Pi} = \frac{1}{\Omega} \int_0^a \int_0^b n_x n_z n_z dy dx; \Phi_{\Pi T} = \frac{1}{\Omega} \int_0^a \int_0^b n_z \sqrt{1 - n_x^2} n_z dy dx, \quad (19), (20)$$

$$\Phi_{\Gamma} = \frac{1}{\Omega} \int_0^a \int_0^b n_x^3 n_z dy dx; \Phi_{\Gamma T} = \frac{1}{\Omega} \int_0^a \int_0^b n_x^2 \sqrt{1 - n_x^2} n_z dy dx. \quad (21), (22)$$

Не все интегральные выражения могут быть определены аналитически. Для вычисления функций  $\Phi_{\Pi}$ ,  $\Phi_{\Pi T}$ ,  $\Phi_{\Gamma}$ ,  $\Phi_{\Gamma T}$  применим метод численного интегрирования, используя программу Mathcad. При выполнении численного интегрирования необходимо разбить поверхность эллипсоида на мелкие интервалы. Количество шагов деления  $hx$  и  $hy$  (вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно), влияющих на точность вычислений, можно задать самостоятельно, при этом изменение точности расчета с трудоемкостью не связано, поскольку все вычисления автоматизированы и объем ручной работы остается постоянным, изменяется только продолжительность вычислительных процессов.

Вычисления будут производиться для правой половины четверти эллипсоида, а в последующем найденные величины интегралов будут удвоены.

Средствами Mathcad вычислено  $z$  при всех значениях

$$x \in \left\{0, \frac{a}{hx}, \frac{2a}{hx} \dots a\right\} \text{ и } y \in \left\{0, \frac{a}{hy}, \frac{2a}{hy} \dots b\right\}.$$

Таким образом, поверхность эллипсоида, а значит, и поверхность «ледовой наделки», можно задать в виде табл. 1.

Таблица 1

Координатная сетка поверхности эллипсоида

|                                  |               |                      |     |                              |     |                                  |
|----------------------------------|---------------|----------------------|-----|------------------------------|-----|----------------------------------|
|                                  | $x_0 = 0$     | $x_1 = \frac{a}{hx}$ | ... | $x_i = \frac{i \cdot a}{hx}$ | ... | $x_m = \frac{m \cdot a}{hx} = a$ |
| $y_0 = 0$                        | $z(x_0, y_0)$ | $z(x_1, y_0)$        | ... | $z(x_i, y_0)$                | ... | $z(x_m, y_0)$                    |
| $y_1 = \frac{b}{hy}$             | $z(x_0, y_1)$ | $z(x_1, y_1)$        | ... | $z(x_i, y_1)$                | ... | $z(x_m, y_1)$                    |
| ...                              | ...           | ...                  | ... | ...                          | ... | ...                              |
| $y_j = \frac{j \cdot b}{hy}$     | $z(x_0, y_j)$ | $z(x_m, y_j)$        | ... | $z(x_i, y_j)$                | ... | $z(x_m, y_j)$                    |
| ...                              | ...           | ...                  | ... | ...                          | ... | ...                              |
| $y_n = \frac{n \cdot b}{hy} = b$ | $z(x_0, y_n)$ | $z(x_1, y_n)$        | ... | $z(x_i, y_n)$                | ... | $z(x_m, y_n)$                    |

Значения  $z$  в правом нижнем углу таблицы являются комплексными числами. Это связано с тем, что данные точки (где  $z(x, y) \in \mathbb{C}$ ) не принадлежат поверхности эллипсоида и находятся снаружи по отношению к нему. Чтобы не учитывать эти точки, во всех дальнейших расчетах воспользуемся условием: если в данной ячейке при заданных  $x$  и  $y$  значение  $z(x, y) \in \mathbb{C}$ , то значение числа в ячейке равно нулю. Таким образом, будут учитываться только те точки, которые принадлежат поверхности эллипсоида.

Далее вычисляются значения подынтегральных выражений при  $x \in \left\{0, \frac{a}{hx}, \frac{2a}{hx} \dots a\right\}$  и  $y \in \left\{0, \frac{a}{hy}, \frac{2a}{hy} \dots b\right\}$  с учетом условия  $z(x, y) \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{C}$  – множество вещественных чисел).

Затем необходимо суммировать значения вычисленных подынтегральных выражений во всех заданных точках поверхности эллипсоида, а найденные суммы удвоить и умножить на  $dxdy = \frac{a}{hx} \frac{b}{hy}$ . Выражения для гидродинамических функций и функций притапливания примут следующий вид:

$$\Phi_{\Pi} = \frac{2}{\Omega} \sum (n_x n_z^2(x, y)) \frac{a}{hx} \frac{b}{hy}, \quad (23)$$

$$\Phi_{\Pi T} = \frac{2}{\Omega} \sum (n_z \sqrt{1 - n_x^2} n_z(x, y)) \frac{a}{hx} \frac{b}{hy}, \quad (24)$$

$$\Phi_{\Gamma} = \frac{2}{\Omega} \sum (n_x^3 n_z(x, y)) \frac{a}{hx} \frac{b}{hy}, \quad (25)$$

$$\Phi_{\Gamma\Gamma} = \frac{2}{\Omega} \sum \left( n_x^2 \sqrt{1 - n_x^2} n_z(x, y) \right) \frac{a}{h_x} \frac{b}{h_y}. \quad (26)$$

В выражениях функции геометрии неизвестной осталась величина площади смоченной поверхности  $\Omega$ . Площадь поверхности эллипсоида можно вычислить приближённо по формуле [8]

$$\Omega_{\text{эллипсоида}} = 4\pi \cdot \left[ \frac{a^p b^p + b^p c^p + c^p a^p}{3} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (26)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  - полуоси эллипсоида. Если взять  $p = 1,6075$ , то максимальная относительная ошибка будет равна 1.061%.

Таким образом площадь смоченной поверхности  $\Omega$ , равную четверти площади поверхности эллипсоида ( $\Omega = \Omega_{\text{эллипсоида}}/4$ ), можно рассчитать по формуле

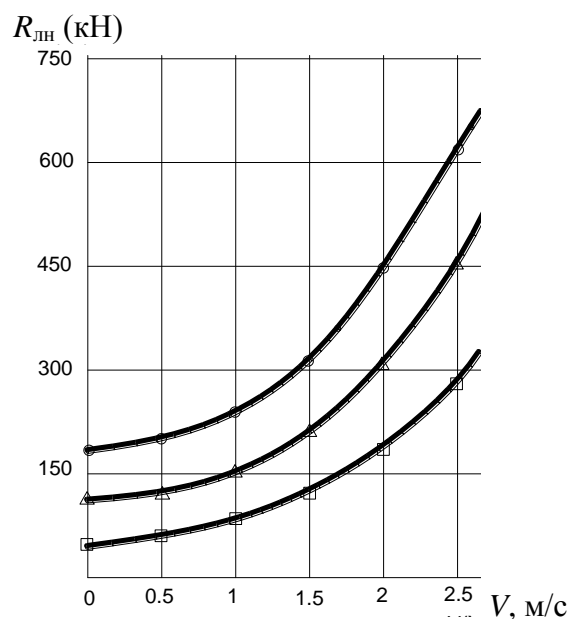
$$\Omega = \pi \left[ \frac{a^p \cdot b^p + b^p \cdot c^p + c^p \cdot a^p}{3} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (27)$$

Используя указанную методику, рассчитаем сопротивление обломков льда движению баржи проекта Р-167 при различных скоростях движения и различной толщине льда. Исходными данными будут:  $L = 111$  м;  $B = 21$  м;  $T = 3,5$  м.

Скорость будет изменяться в пределах от 0 до 2,5 м/с, что сопоставимо с реальными скоростями движения барж в битых льдах.

Толщину льда будем принимать из интервала от 0,1 м до 0,5 м с шагом 0,2 м, что часто наблюдается при работе судна в ледовых условиях.

По результатам расчёта построим кривые зависимости ледового сопротивления носовой оконечности судна от скорости при различных толщинах льда (рис. 2).



**Рис. 2. Кривые зависимости ледового сопротивления носовой оконечности судна от скорости при различных толщинах льда:**  
 (□ — 0,1 м; △ — 0,3 м; ○ — 0,5 м)

Данная математическая модель расчёта сил ледового сопротивления судна с большим коэффициентом общей полноты в битых льдах позволяет провести расчёты ледовой ходкости для плавающих сооружений с нестандартными обводами корпуса и предоставляет попытку рассчитать буксировочные кривые для ледовых составов и караванов судов, движущихся в битом льду.

## Библиографический список

1. **Зуев, В.А.** Динамические расчеты ледоколов / В.А. Зуев, М.Е. Рабинович, М.С. Яковлев. – Горький: ГПИ, 1979. – 67 с.
2. **Алексеев, Ю.Н.** Метод расчета сопротивления льда движению судов / Ю.Н. Алексеев, К.Е. Сазонов // Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов. 1984. Вып. 41. С. 28–36.
3. **Грамузов, Е.М.** Прогнозирование сопротивления сплошного льда при проектировании формы корпуса речного ледокола: дисс. ... канд. техн. наук / Е.М. Грамузов. – Горький, 1988.
4. **Зуев, В.А.** Средства продления навигации на внутренних водных путях / В.А. Зуев. – Л.: Судостроение, 1986. – 207 с.
5. **Ионов, Б.П.** Ледовая ходкость судов: монография / Б.П. Ионов, Е.М. Грамузов. – СПб.: Судостроение, 2001. – 512 с.
6. **Сандаков, М.Ю.** Проведение натурных испытаний нефтеналивной баржи пр. 167 в ледовых условиях совместно с разными толкачами и ледоколами // Современные технологии в кораблестроительном образовании, науке и производстве: материалы конф. – Н.Новгород, 2006. С. 151–152.
7. **Сандаков, М.Ю.** Модельные исследования ледовой ходкости судов с большим коэффициентом полноты в битом льду / М.Ю. Сандаков, Е.А. Гуцин // Будущее технической науки: материалы конф.; НГТУ. Н. Новгород, 2010. С. 237–238.

*Дата поступления  
в редакцию: 29.04.2014*

**M.Y. Sandakov**

**MATHEMATICAL MODEL OF CALCULATION OF ICE MOVEMENT  
OF VESSELS WITH LARGE COEFFICIENT OF FULLNESS IN BROKEN ICE**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

**Subject:** The article touches upon the issues of movement of transport ship with great fullness coefficient corps, in broken ice, and determination of the forces of the resistance of the broken ice at movement of the ship

**Design/methodology/approach:** The paper proposed a new hypothesis of interaction between ship hull and fragments of ice cover. On movement in broken cohesive ice full contours bow of the hull of a vessel being pushed in front of a mass of ice. The shape of the hull is changed to a more streamlined

**Results:** The completed form of ice accumulation and defined its parameters was studied. There was created and proposed a method of calculation of strength of ice resistance movement of vessels with great fullness coefficient in dense broken ice.

*Key words:* the broken ice, the vessel's hull with a large coefficient of fullness, ice accumulation, triaxial ellipsoid, ice propulsion, the geometry of the hull, ice resistance force.