

УДК 537.86

Е.М. Громов, Т.В. Наседкина, В.В. Тютин

## СОЛИТОНЫ В РАСШИРЕННОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ДИСПЕРСИИ В ВИДЕ ПЕРЕПАДА

Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики

**Цель работы:** В данной работе рассмотрена динамика солитонов в рамках расширенного неоднородного уравнения Шредингера с пространственной неоднородностью дисперсии в виде плавного перепада и при учете псевдо индуцированного рассеяния на затухающих НЧ волнах.

**Научный подход:** Исследование проведено как численно, так и аналитически.

**Результат:** Показана возможность баланса псевдоиндуцированного рассеяния, приводящего к смещению пространственного спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область, и убывающей дисперсии, смещающей спектр солитона в коротковолновую область. В явном виде получено солитонное решение, возникающее в результате этого баланса.

**Новизна:** Результаты исследования новые и могут иметь приложение для разработки новых поколений оптоволоконных линий связи на базе коротких оптических солитонов.

*Ключевые слова:* расширенное нелинейное уравнение Шредингера, солитон, вынужденное рассеяние, неоднородность, дисперсия второго порядка, аналитическое решение, численный эксперимент

### Введение

Интенсивные волновые пакеты довольно большой протяженности способны распространяться в нелинейных средах без изменения формы (солитоны). Для решения многих прикладных задач существует необходимость уменьшения протяженности солитонов до нескольких длин волн. Подобное уменьшение сопровождается, как правило, индуцированным рассеянием на низкочастотных (НЧ) возмущениях среды, разрушающим стабильность распространения солитонов. До настоящего времени довольно подробно изучено индуцированное рассеяние на однородных по пространственной координате временных НЧ модах среды (индуцированное рассеяние Рамана) [1]. Данное рассеяние описывается в расширенном нелинейном уравнении Шредингера (НУШ) дополнительным слагаемым с временным запаздыванием нелинейного керровского отклика. Для солитонов учет данного рассеяния приводит к смещению их частот вниз по спектру [2] и, как следствие, к потере устойчивости и разрушению. Возможность компенсации рамановского сдвига частоты изучена к настоящему времени довольно подробно [3, 4].

Однако для ряда сред распространение коротких солитонов сопровождается возбуждением затухающих НЧ волн. В плазме это ионно-звуковые волны, возбуждаемые электромагнитными или ленгмюровскими солитонами; в стратифицированной жидкости - внутренние волны, возбуждаемые солитонами поверхностных волн. Учет волнового характера возбуждаемых НЧ возмущений существенным образом меняет динамику коротких солитонов высокочастотного (ВЧ) поля в подобных средах. Впервые модель для описания индуцированного рассеяния ВЧ волн на затухающих НЧ волнах, названное как псевдоиндуцированное рассеяние, предложена в работе [5], в которой получено модельное уравнение в виде расширенного НУШ с псевдоиндуцированным рассеянием и показано, что псевдоиндуцированное рассеяние приводит к сдвигу пространственного спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область. До настоящего времени рассмотрены случаи дисперсии, убывающей в пространстве по линейному [5] и экспоненциальному [6,7] законам.

В данной работе динамика солитонов в рамках расширенного НУШ с псевдоиндуцированным рассеянием рассмотрена при пространственной зависимости дисперсии в виде перепада. Показана возможность компенсации псевдоиндуцированного рассеяния.

**Исходное уравнение и интегральные соотношения**

Рассмотрим динамику ВЧ волнового пакета  $U(\xi, t)\exp(i\omega t - ik\xi)$  в расширенном НУШ с псевдоиндуцированным рассеянием и неоднородной дисперсией [5]:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q(\xi) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + 2U|U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} = 0, \tag{1}$$

где  $q(\xi)$  - линейная дисперсия второго порядка;  $\mu$  - коэффициент псевдоиндуцированного рассеяния. Последнее слагаемое в (1) описывает индуцированное рассеяние ВЧ волнового поля на затухающих НЧ волнах и является пространственным аналогом индуцированного рассеяния Рамана в оптике (псевдоиндуцированное рассеяние). Уравнение (1) при нулевых условиях на бесконечности  $U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$  имеет следующие дифференциальные соотношения для интегральных моментов волнового пакета:

$$\frac{dN}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = 0, \tag{2}$$

$$2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} K|U|^2 d\xi = -\mu \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} \right]^2 d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{d\xi} \left[ \left( \frac{\partial|U|}{\partial \xi} \right)^2 + K^2|U|^2 \right] d\xi, \tag{3}$$

$$N \frac{d\bar{\xi}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} qK|U|^2 d\xi, \tag{4}$$

где  $U \equiv |U|\exp(i\phi)$ ,  $K \equiv \partial\phi / \partial\xi$  - добавочное волновое число пакета. Масштабы неоднородности дисперсии и волнового числа  $K$  примем много большими масштаба неоднородности огибающей волнового пакета  $D_{q,K} \gg D_{|U|}$ . В этом случае, полагая добавочное волновое число не зависящим от пространственной координаты [5],  $K(\xi, t) = k(t)$ , система (2)-(4) для солитонно подобных волновых пакетов сводится к виду:

$$2N \frac{dk}{dt} = -\mu L_0 / n^3 - q'(\bar{\xi}) Z_0 / n^2 - q'(\bar{\xi}) N k^2, \quad \frac{dn}{dt} = q'(\bar{\xi}) n k, \tag{5}$$

где  $q'(\bar{\xi}) = (dq / d\xi)_{\bar{\xi}}$ ,  $n = q(\bar{\xi}) / q_0$ ,  $q_0 = q(0)$ ;  $L_0 = \int_{-\infty}^{\infty} [\partial(|U(\xi, t=0)|^2) / \partial\xi]^2 d\xi$ ,

$Z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} [\partial|U(\xi, t=0)| / \partial\xi]^2 d\xi$  - начальные интегральные моменты волнового поля. Система

(5) имеет состояние равновесия

$$k = 0, \mu = \mu_* \equiv -q'(\bar{\xi}_0) Z_0 / L_0, \tag{6}$$

при котором псевдоиндуцированное рассеяние компенсируется убывающей дисперсией  $q'(\bar{\xi}_0) < 0$ : при  $\mu = \mu_*$  начальный волновой пакет при  $t > 0$  остается неизменным.

**Солитонное решение**

Рассмотрим решение уравнения (3) в виде стационарной волны  $U(\xi, t) = \psi(\xi)\exp(i\Omega t)$  при пространственном профиле дисперсии в виде перепада  $q(\xi) = q_0[1 - \tanh(\xi / D)]$ :

$$q_0[1 - \tanh(\xi / D)] \frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \frac{q_0}{D \cosh^2(\xi / D)} \frac{d\psi}{d\xi} + 2\psi^3 - 2\Omega\psi + \mu\psi \frac{d(\psi^2)}{d\xi} = 0. \tag{7}$$

Масштаб неоднородности дисперсии примем много большим масштаба неоднородности огибающей волнового пакета  $D \gg L_\psi$ . С учетом малости параметра  $\varepsilon \sim L_\psi / D \sim \mu \ll q_0$  и аппроксимации  $\tanh(\xi / D) \approx \xi / D$ , решение уравнения (7) будем искать в виде  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , где  $\psi_1 \sim \varepsilon \psi_0 \ll \psi_0$ . Удерживая члены порядка  $\varepsilon$ , имеем

$$q_0 \frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + 2\psi_0^3 - 2\Omega \psi_0 = 0, \tag{8}$$

$$q_0 \frac{d^2 \psi_1}{d\xi^2} + (6\alpha \psi_0^2 - 2\Omega) \psi_1 = \frac{q_0}{D} \frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} \xi - \frac{2}{3} \mu \frac{d(\psi_0^3)}{d\xi} + \frac{q_0}{D} \frac{d\psi_0}{d\xi}. \tag{9}$$

Уравнение (8) имеет классическое солитонное решение  $\psi_0 = A_0 / \cosh(\xi / \Delta)$ , где  $\Delta = \sqrt{q_0} / A_0$ ,  $\Omega = A_0^2 / 2$ . Уравнение (9) после замены  $\eta = \xi / \Delta$  и  $\Psi = \psi_1 D / (A_0 \Delta)$  примет вид

$$\frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} + \left( \frac{6}{\cosh^2 \eta} - 1 \right) \Psi = 2 \frac{\eta}{\cosh^3 \eta} - \frac{\eta}{\cosh \eta} + \frac{5}{4} \frac{\mu}{\mu_*} \frac{\sinh \eta}{\cosh^4 \eta} + \frac{\sinh \eta}{\cosh^2 \eta}, \tag{10}$$

где  $\mu_* \equiv -5q_0 / (8A_0^2 D)$  - величина псевдоиндуцированного рассеяния, отвечающая состоянию равновесия системы (5). При  $\Psi(0) = 0$  уравнение (10) имеет точное решение

$$\Psi(\eta) = \left( \Psi'(0) \eta - \frac{\eta^2}{4} \tanh \eta + \frac{\mu}{4\mu_*} (\tanh \eta) \ln(\cosh \eta) \right) \operatorname{sech} \eta + \frac{1}{12} \left( \frac{\mu}{\mu_*} - 1 \right) (\tanh^2 \eta) \sinh \eta. \tag{11}$$

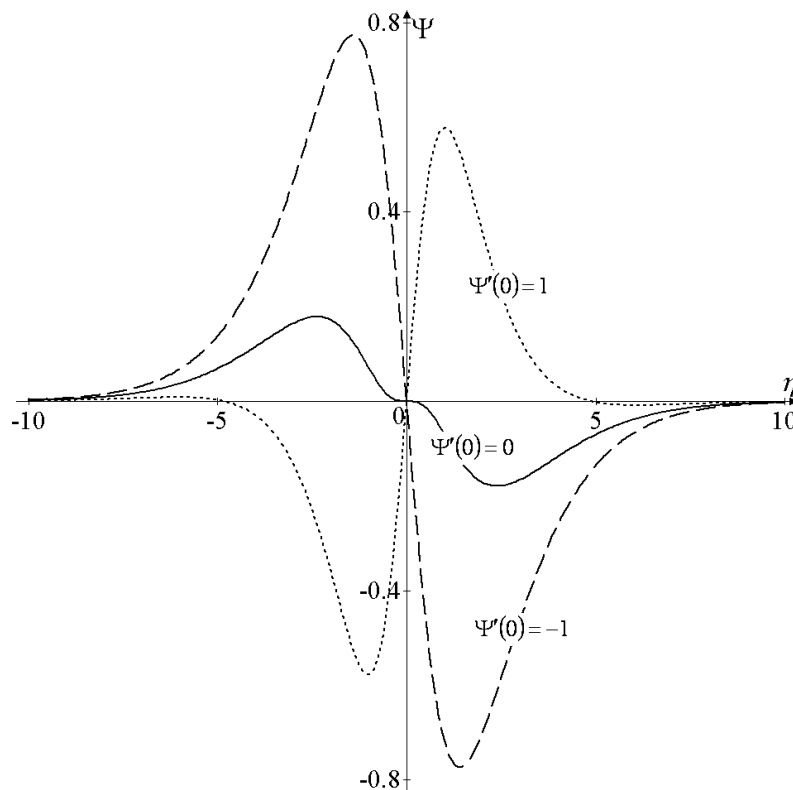


Рис. 1. Распределение  $\Psi(\eta)$  при  $\mu = \mu_*$  и различных  $\Psi'(0)$

При  $\mu = \mu_*$ , отвечающем балансу псевдоиндуцированного рассеяния и убывающей дисперсии, решение (11) локализовано. Асимптотика (11) в этом случае на больших значениях аргумента следующая:  $\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty) \approx \pm\eta^2 \exp(-|\eta|)$ . На рис. 1 показано распределение волнового поля  $\Psi(\eta)$  при  $\mu = \mu_*$  и различных значений  $\Psi'(0)$ .

Решение  $\Psi(\eta)$  антисимметрично. Солитоны с антисимметричными «хвостами» возникают и в хорошо известной системе линейно связанных НУШ.

При  $\mu \neq \mu_*$  решение (11) не локализовано  $|\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty)| \rightarrow \infty$ . На рис. 2 приведено распределение функции  $\Psi(\eta)$  при начальных условиях  $\Psi'(0) = 0$  и различных значениях  $\mu$ .

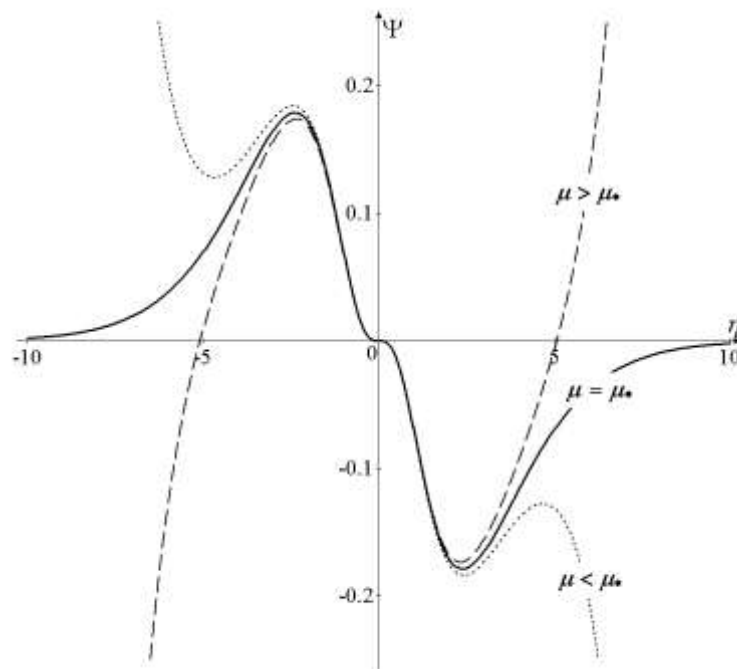


Рис. 2. Распределение  $\Psi(\eta)$  при  $\Psi'(0) = 0$  и различных  $\mu$

### Численное моделирование

Рассмотрим численно начальную задачу динамики пакета  $U(\xi, t = 0) = \text{sech}\xi$  в рамках (1) при  $q(\xi) = 1 - \tanh(\xi/10)$  и различных значениях  $\mu$ . Величина равновесного значения псевдоиндуцированного рассеяния для выбранного профиля неоднородности дисперсии и данного начального импульса из аналитического соотношения (6) составляет  $\mu_* = 1/16$ . На рис.3 приведены численные результаты пространственно-временного распределения  $|U|$  при различных  $\mu$ . При  $\mu = 1/16 \equiv \mu_*$  (рис. 3, а) исходный волновой пакет не меняется во времени, что соответствует состоянию равновесия псевдо индуцированного рассеяния и неоднородной дисперсии. Отклонение параметра  $\mu$  от равновесного значения  $\mu_*$  приводит к изменению параметров солитона (волновое число, амплитуда) во времени. На рис. 3, б показано пространственно-временное распределение модуля огибающей  $|U|$  при  $\mu = 1/32 \equiv \mu_*/2$ .

На рис. 4 приведена динамика во времени локального волнового числа в точке максимума модуля огибающей волнового пакета при различных значениях  $\mu$ . Непрерывные кривые отвечают результатам численного счета, пунктирные - аналитическое решение системы (5).

Результаты численного счета близки к аналитическим. Небольшое различие связано с

малыми полями излучения из ядра солитона, приводящими к уменьшению эффективного параметра псевдо индуцированного рассеяния.

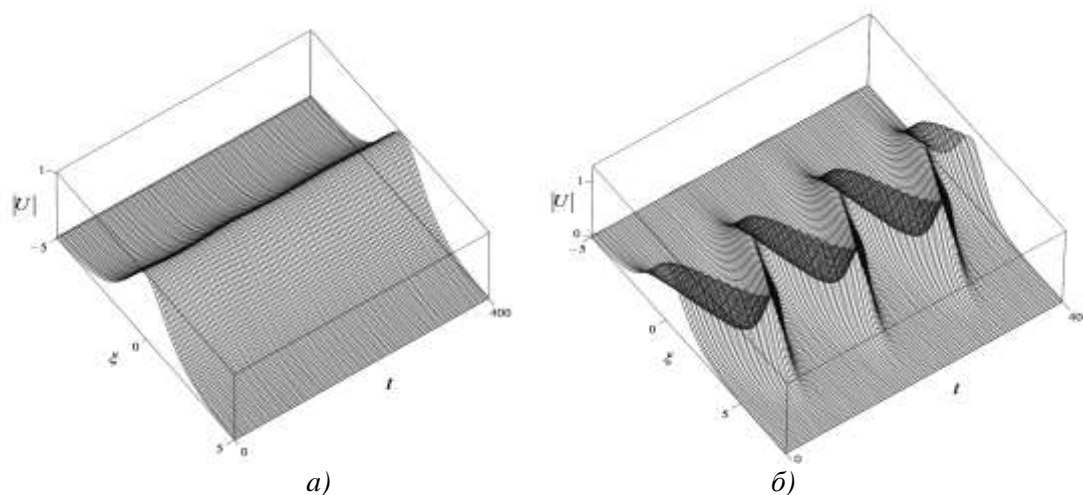


Рис. 3. Численные результаты пространственно-временного распределения  $|U|$  при различных  $\mu$ :  $\mu = 1/16 \equiv \mu_*$  (а);  $-\mu = 1/32 \equiv \mu_*/2$  (б)

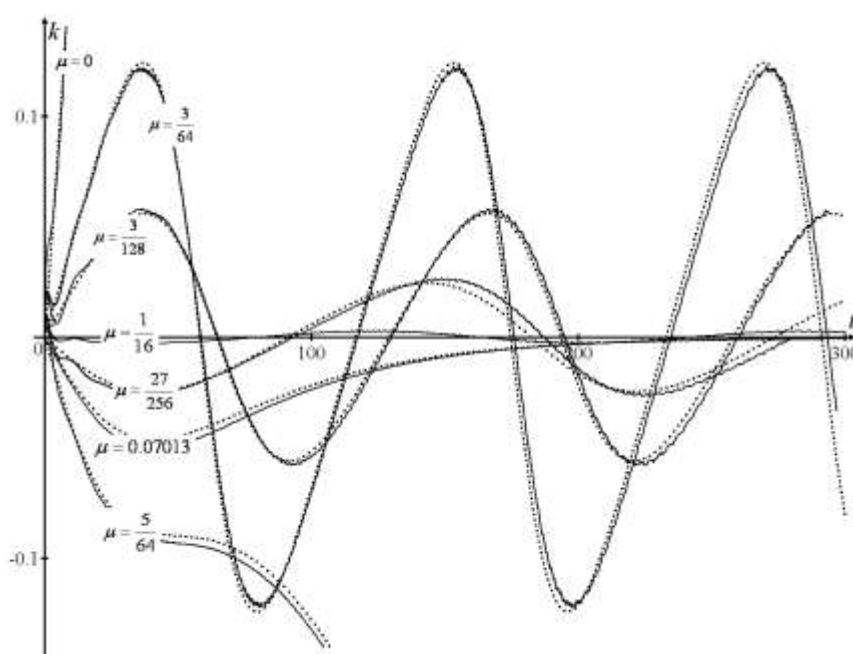


Рис. 4. Численные и аналитические результаты (сплошные и пунктирные кривые) для локального волнового числа в точке максимума огибающей волнового пакета в зависимости от времени  $t$  при различных значениях  $\mu$

### Заключение

В данной работе рассмотрена динамика солитонов в рамках расширенного НУШ с псевдоиндуцированным рассеянием и пространственно неоднородной дисперсией в виде перепада. Показана возможность баланса псевдоиндуцированного рассеяния, приводящего к смещению спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область, и убывающей в пространстве дисперсии, смещающей спектр солитона в коротковолновую область.

Данное научное исследование (№ проекта 14-01-0023) выполнено при поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг.

## Библиографический список

1. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agraval // Academic, San Diego, 2003.
2. **Gordon, J.P.** Theory of the soliton self-frequency shift // Optics Letters 11 (1986) 662-664.
3. **Malomed, B.A.** Soliton Management in Periodic Systems / B.A. Malomed. Springer, New York, 2006.
4. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. Springer, New York, 2001.
5. **Gromov, E.M.** Soliton dynamics in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial counterpart of the stimulated Raman scattering / E.M. Gromov, B.A. Malomed // J. Plasma Physics 79 (2013) 1057-1062.
6. **Gromov, E.M.** Damped solitons in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial stimulated Raman scattering and decreasing dispersion / E.M. Gromov, B.A. Malomed // Opt. Comm. 320 (2014) 88-93.
7. **Aseeva, N.V.** The short envelope soliton dynamics in inhomogeneous dispersive media with allowance for stimulated scattering by damped low-frequency waves / N.V. Aseeva, E.M. Gromov, V.V. Tyutin // Radiophysics and Quantum Electronics 56 (2013) 157-166.

*Дата поступления  
в редакцию 22.04.2014*

**E.M. Gromov, T.V. Nasedkina, V.V. Tyutin**

**SOLITONS IN AN EXTENDED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION  
WITH A SPATIAL KINK-TYPE DISPERSION DISTRIBUTION**

National Investigate University Higher School of Economics

**Purpose:** Dynamics of solitons is considered in the framework of the extended nonlinear Schrödinger equation including a pseudo-stimulated-Raman-scattering term, i.e., a spatial-domain counterpart of the stimulated-Raman-scattering term, which is a known ingredient of the temporal-domain nonlinear Schrödinger equation in optics. Also included is inhomogeneity of the spatial second-order dispersion in kink-type form.

**Approach:** Soliton's dynamic investigated as analytically as numerically.

**Findings:** An analytical soliton solution with a permanent shape is found in an approximate form.

**Originality:** The obtained results is original and can be important for optical fibers application.

*Key words:* Extended Nonlinear Schrödinger Equation, Soliton Solution, Stimulated Scattering, Inhomogeneity, Second-Order Dispersion, Analytical Solutions, Numerical Simulation