

## МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 551.46

О.И. Диденкулов<sup>1</sup>, И.И. Диденкулова<sup>1,2</sup>, Е.Н. Пелиновский<sup>1,3</sup>

### ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАКАТА ОДИНОЧНЫХ ВОЛН В БУХТЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева<sup>1</sup>,  
Институт кибернетики, Таллинский технологический университет, Таллин, Эстония<sup>2</sup>,  
Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород<sup>3</sup>

Исследован накат колоколообразных импульсов различной формы в линейно-наклоненной бухте параболического сечения. Рассчитаны следующие параметры: максимальная высота наката волн на берег, максимальная скорость движения уреза, а также параметр обрушения волн. Показано, что данные параметры наката для различных импульсов с одинаковой высотой и длиной с приемлемой точностью совпадают. Это позволяет определять экстремальные характеристики наката волн без учета формы подходящей к берегу волны, зная лишь ее амплитуду и характерную длину.

*Ключевые слова:* нелинейная теория мелкой воды, накат волн на берег, бухты параболического сечения.

#### Введение

Анализ процесса наката морских волн на берег представляет собой одну из наиболее важных практических проблем океанологии. Расчеты наката морских волн на берег необходимы для оценки зоны затопления побережья и воздействия на портовые и береговые сооружения. Особенно разрушительными оказываются длинные волны, проникающие далеко на побережье, такие как цунами и штормовые нагоны.

В теоретическом плане хорошо изучен накат длинных необрушенных волн на плоский откос. Еще в 1958 г. Кэрриер и Гринспан [1] получили аналитическое решение нелинейных уравнений мелкой воды для случая откоса постоянного уклона, что позволило исследовать накат на берег длинных необрушенных волн различной формы. В то же время форма волны, подходящей к берегу, как правило, неизвестна. Иногда о ней можно судить по регистрациям в открытом океане с помощью буев системы ДАРТ или по заранее рассчитанным сценариям цунами, но эта информация не является полной. Поэтому крайне важно иметь экспресс-оценки, способные по первичным данным о приближающейся волне цунами, таким как ее высота и период, дать достоверную оценку дальности затопления и скорости водного потока.

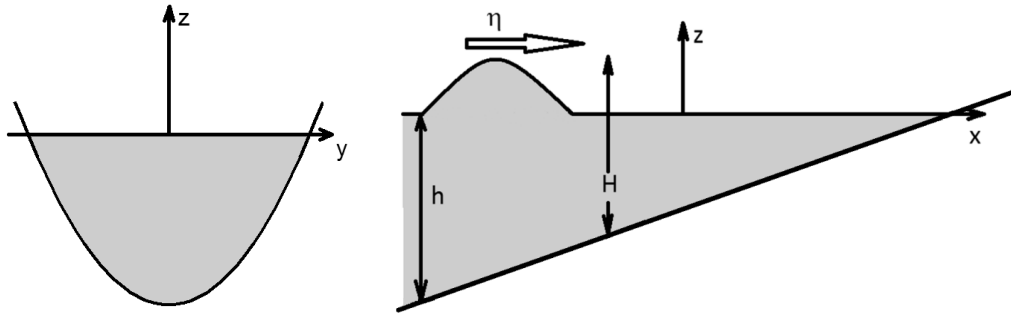
Следуя этой идее, в работах [2, 3] было исследовано влияние формы падающей на плоский откос волны на характеристики наката на берегу (максимальную высоту, скорость и параметр обрушения). В частности, показано, что разница в форме для всех симметричных импульсов колокообразной формы (синусоидальный импульс, солитон, Лоренцев импульс и др.) незначительна для характеристик наката и может быть параметризована.

Однако оценки, сделанные для плоского откоса, не всегда являются оптимальными. Так, во время цунами 2009 г. на Самоа и Японского цунами 2011 г. цунами распространялось в бухтах U-образной формы, и наблюдаемая высота наката волн в этих бухтах существенно

превысила оценки, сделанные по формулам для плоского откоса [4]. В то же время в работе [5] показано, что оценки, сделанные с учетом поперечного сечения бухты Паго-Паго, находятся в хорошем совпадении с наблюдениями цунами 2009 г. на Самоа. Отсюда следует необходимость отдельного рассмотрения цунами в таких бухтах и разработке для них соответствующих экспресс-оценок, что и сделано в данной работе для случая линейно наклоненной бухты параболического сечения.

**Динамика длинных волн в бухте параболического сечения**

Рассмотрим линейно наклоненную бухту параболического сечения (рис. 1).



**Рис. 1. Поперечное сечение и продольная проекция бухты**

Геометрия задачи, показанная на рис. 1, описывается следующей формулой:

$$z(x, y) = -h(x) + \frac{y^2}{y_0} = -\alpha x + \frac{y^2}{y_0}, \tag{1}$$

где  $h(x)$  – это невозмущенная глубина вдоль центральной оси канала;  $\alpha$  – угол склона вдоль основной оси канала;  $g$  – гравитационная постоянная. Ось  $x$  направлена от берега, а  $y_0$  – эффективная ширина канала.

Отметим, что выбор формы бухты неслучаен. Такая форма бухт достаточно часто встречается в природе как для фьордов, так и для подводных каньонов.

Уравнения теории мелкой для условий бухты параболического сечения в приближении узости бухты имеют вид [6]

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{2H}{3} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g\alpha, \tag{2}$$

где  $H(x,t) = \eta(x,t) + h(x)$  – полная глубина бассейна вдоль центральной оси канала;  $\eta(x,t)$  – смещение водной поверхности;  $u(x,t)$  – усредненная по поперечному сечению скорость водного потока.

Уравнения (2) отличаются от классических одномерных уравнений мелкой воды [7, 8] только наличием дополнительного коэффициента  $2/3$  в первой уравнении, обусловленного параболической формой поперечного сечения канала.

Система нелинейных гиперболических уравнений (2) с помощью римановых инвариантов, имеющих следующую форму для волн в параболическом канале:

$$I_{\pm} = u \pm \sqrt{6gH} - g\alpha, \tag{3}$$

и преобразования годографа может быть сведена к линейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{2}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0, \tag{4}$$

где все искомые переменные могут быть выражены через функцию  $\Phi$  :

$$u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \eta = -\frac{1}{g} \left( \frac{u^2}{2} - \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right), \tag{5}$$

$$x = \frac{1}{g\alpha} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{\sigma^2}{6} - \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right), \quad t = \frac{u - \lambda}{g\alpha}. \quad (6)$$

Вывод уравнений (5), (6) подробно изложен в [6]. Из (5), (6) также становится понятен смысл величины  $\sigma$ , которая всегда положительна и напрямую связана с полной глубиной вдоль центральной оси канала  $\sigma = \sqrt{6gH}$ . Таким образом, уравнение (4) должно решаться на полуоси  $\sigma \geq 0$ .

Напомним, что уравнения (4)–(6) описывают динамику волн в канале для величин, усредненных по поперечному сечению канала. В то же время пространственное распределение водной поверхности можно найти из (1):

$$y(x, t) = \pm \sqrt{y_0 H(x, t)}. \quad (7)$$

Естественные граничные условия для описания наката волн на берег - это ограниченность скорости и смещения водной поверхности на бесконечности и на берегу. Начальные условия для функции  $\Phi$  зависят от начальных условий для скорости и смещения. Если скорость в начальный момент времени равна нулю  $u(x, t=0) = 0$ , то в начальный момент времени  $t = 0$  соответствует  $\lambda = 0$  и начальные условия для функции  $\Phi$

$$\Phi|_{\lambda=0} = 0, \quad (8)$$

$$\partial \Phi / \partial \lambda|_{\lambda=0} = -3g\eta[x(\sigma, 0)] = \sigma^2 / 2 - 3g\alpha x(\sigma)|_{\lambda=0}, \quad (9)$$

где  $x(\sigma)|_{\lambda=0}$  - это начальное состояние водной поверхности, которую можно найти, зная полную глубину в начальный момент времени  $H(x, 0)$  и пользуясь  $\sigma = \sqrt{6gH}$ .

Решение волнового уравнения для соответствующих начальных и граничных условий может быть представлено в следующем виде:

$$\Phi(\sigma, \lambda) = \frac{[\Theta(\lambda + \sigma) - \Theta(\lambda - \sigma)]1(\lambda - \sigma) + [\Theta(\lambda + \sigma) - \Theta(\sigma - \lambda)]1(\sigma - \lambda)}{\sigma}, \quad (10)$$

где  $1(\dots)$  - это функция Хевисайда, а

$$\Theta(\zeta) = \frac{\zeta^4}{16} - \frac{3}{2} g\alpha \int_0^{\zeta} \sigma x(\sigma)|_{\lambda=0} d\sigma. \quad (11)$$

Формулы (10), (11) позволяют описать нелинейную динамику подвижного уреза в явном виде. Главное отличие от случая плоского откоса, описанного в работах [1, 2, 7–9], состоит в том, что при распространении волн вдоль наклоненного канала параболического сечения они не испытывают распределенного отражения от донного профиля, т.е. все отражение происходит только непосредственно от берега (уреза).

Таким образом, все изменения, включая трансформацию формы волны и ее свойств, происходят в непосредственной близости уреза. Это свойство типично для всех безотражательных геометрий, подробно рассмотренных в работах [9–11], и приводит к значительному усилению волн на берегу.

### Накат волн в бухте параболического сечения

Накат волн в бухте параболического сечения в линейной постановке задачи описывается простой формулой, зависящей от производной по времени от падающей на откос волны  $\eta_{in}$  [6]:

$$R = 4 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{L}{\sqrt{gh_0}} \frac{d\eta_{in}}{dt}, \quad (12)$$

где  $L$  – расстояние, которое проходит волна до берега;  $h_0$  – глубина бассейна на расстоянии  $L$  до берега.

Горизонтальная скорость воды на урзе  $U(t)$  может быть найдена по формуле

$$U(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dR}{dt}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{h_0}{L}. \quad (13)$$

Отметим, что хотя формулы (12), (13) описывают высоту волн на берегу в линейной задаче, они являются базовыми для расчета характеристик наката в нелинейной задаче [6]. Важно подчеркнуть, что, как показано в данной работе, максимумы высот и скоростей наката волн в линейном и нелинейном приближении совпадают. Поскольку здесь мы будем интересоваться исключительно максимальными значениями характеристик наката, то будет достаточно найти максимумы функций (12), (13).

Одним из важнейших параметров, характеризующих накат длинных волн на берег, является параметр обрушения  $Br$ , который  $< 1$  для необрушенных волн и  $\geq 1$  для обрушенных и выражается через производную по времени от скорости волны на урзе в линейном приближении:

$$Br = \frac{1}{g\alpha} \max \left[ \frac{dU}{dt} \right]. \quad (14)$$

### Параметризация формул для характеристик наката

В качестве падающих на берег волн было рассмотрено несколько семейств колоколообразных импульсов солитоноподобной

$$\eta_{in}(t) = A \operatorname{sech}^n(t/T), \quad n = 1, 2, \dots, 20, \quad (15)$$

синусоидальной

$$\eta_{in}(t) = A \cos^n\left(\frac{\pi t}{T}\right), \quad n = 3, 4, \dots, 20, \quad (16)$$

а также лоренцевой формы

$$\eta_{in}(t) = \frac{A}{(1 + (t/T)^2)^n}, \quad n = 1, 2, \dots, 20. \quad (17)$$

Для анализа возможности параметризация характеристик наката этих импульсов были введены численные коэффициенты  $\mu_R$ ,  $\mu_{U\pm}$  и  $\mu_{Br}$ , зависящие от формы волны, и формулы (12) - (14) для экстремальных характеристик наката волн были соответственно преобразованы в

$$R_{\max} = \mu_R R_0, \quad R_0 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{AL}{\sqrt{gh_0 T_{eff}}}, \quad (18)$$

$$U_{\max} = \mu_{U+} U_0, \quad U_{\min} = \mu_{U-} U_0, \quad U_0 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{AL}{\alpha \sqrt{gh_0 T_{eff}^2}}, \quad (19)$$

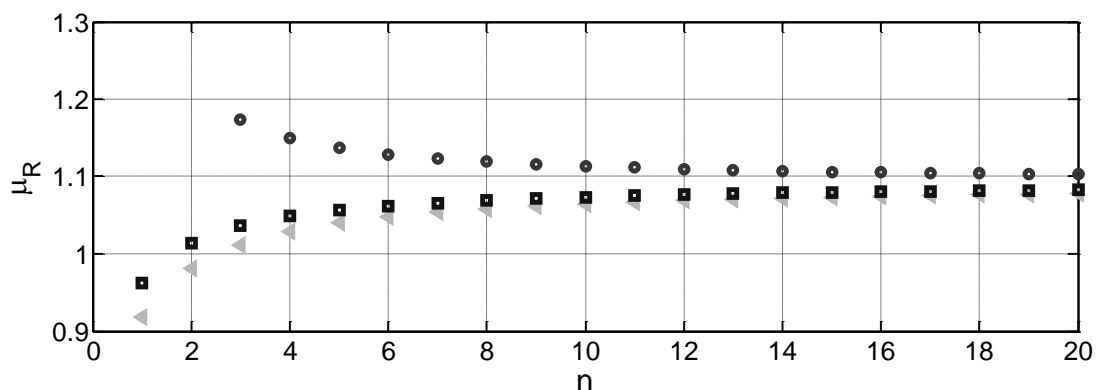
$$Br = \mu_{Br} Br_0, \quad Br_0 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{AL}{g\alpha^2 \sqrt{gh_0 T_{eff}^3}}, \quad (20)$$

где  $T_{eff}$  – это эффективная длительность импульса, определяемая по уровню 2/3 от максимальной высоты падающего импульса, что соответствует философии "значительной волны" в океанографии;  $R_{\max}$  - максимальная высота наката;  $U_{\max}$ ,  $U_{\min}$  – максимальные скорости наката и отката соответственно. Отметим, что максимальная глубина отката в рассматриваемой U-образной бухте совпадает по модулю с  $R_{\max}$ , поэтому отдельно ее не обсуждаем.

Таким образом, все влияние формы подходящих к берегу волн оказалось сосредоточено в параметрах  $\mu_R$ ,  $\mu_{U\pm}$  и  $\mu_{Br}$ . Расчет этих параметров для соответствующих семейств колоколообразных импульсов (15)–(17) приведен на последующих рис. 2 – рис. 4.

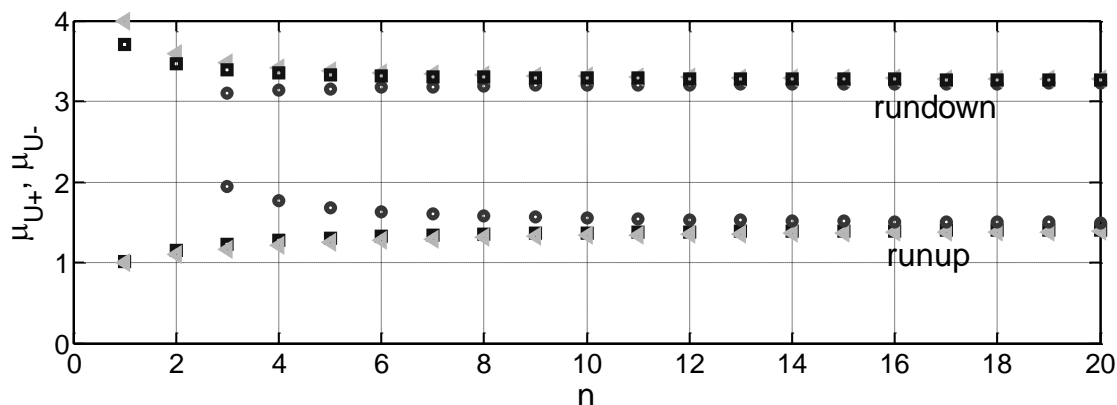
Из рис. 2 видно, что параметр  $\mu_R$  для максимальной высоты наката волн на берег с увеличением  $n$  стремится к общему для всех типов импульсов значению  $\approx 1.1$ , и максимальный разброс не превышает 15%. При этом максимальные отличия наблюдаются

при малых  $n$ , когда различие в форме максимально. Это хорошо проиллюстрировано на рис. 5, где показано, как различаются по форме импульсы при  $n = 3$  и 20.



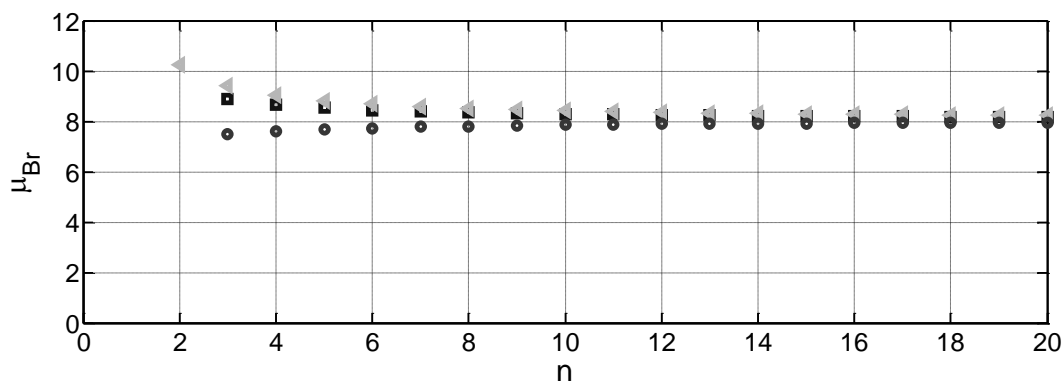
**Рис. 2. Параметр формы для максимальной высоты наката:**

кружками показаны значения для импульсов синусоидальной формы; серыми треугольниками - для импульсов лоренцеобразной формы; квадратами - для импульсов солитоноподобной формы



**Рис. 3. Параметр формы для максимальных скоростей наката и отката:**

кружками показаны значения для импульсов синусоидальной формы; серыми треугольниками - для импульсов лоренцеобразной формы; квадратами - для импульсов солитоноподобной формы

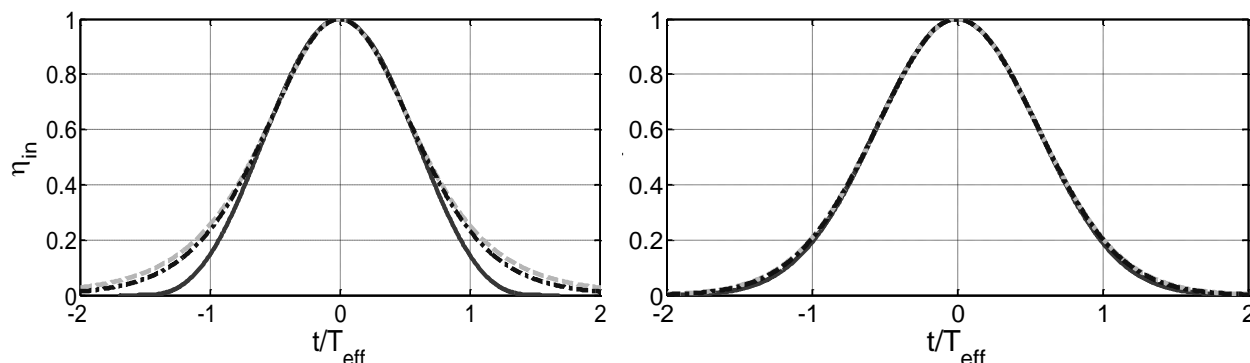


**Рис. 4. Параметр формы для параметра обрушения  $Br$ :**

кружками показаны значения для импульсов синусоидальной формы; серыми треугольниками - для импульсов лоренцеобразной формы; квадратами - для импульсов солитоноподобной формы

Параметры  $\mu_{U\pm}$  для максимальных скоростей наката и отката волн также стремятся к одним и тем же значениям для всех типов импульсов, которые равны  $\approx 1.4$  и  $\approx 3.2$  соответственно (рис. 3). При этом скорость отката более чем в два раза превышает скорость наката, при этом яв-

ляясь более устойчивой характеристикой. Так, разброс значений параметра  $\mu_{U-}$  для скорости отката не превышает 12%, в то время как соответствующий разброс для скорости наката – 56%, что свидетельствует о том, что даже небольшие отличия в форме подходящей к берегу волны могут сильно повлиять на величину скорости наката воды на берег.



**Рис. 5.** Форма подходящих к берегу импульсов для значения  $n = 3$  (слева) и  $n = 20$  (справа): сплошной линией показаны импульсы синусоидальной формы; серой штриховой - импульсы лоренцеобразной формы; штрих-пунктирной - импульсы солитоноподобной формы

И, наконец,  $\mu_{Br}$  для параметра обрушения, как и ожидалось, также выходит на постоянное значение  $\approx 8.1$  с максимальным разбросом 24% (рис. 4). Как известно, первое обрушение волн на берегу всегда происходит на стадии отката волн [8], поэтому логично, что параметр обрушения ведет себя схоже с параметром  $\mu_{U-}$  для максимальной скорости отката волн.

### Заключение

Таким образом, в работе исследован накат колоколообразных импульсов различной формы в линейно-наклоненной бухте параболического сечения. Показано, что характеристики наката волн на берег (максимальная высота наката, максимальная скорость наката и отката волн, а также параметр обрушения волн) для различных импульсов с приемлемой точностью совпадают. Особенно это проявляется для высоты наката и скорости отката, где изменения не превышают 15% и 12% соответственно. Таким образом, определение длительности волны по уровню 2/3 от амплитуды волны (аналог значительной волны в океанологии) является оптимальным, и в этом случае универсальные формулы для характеристик наката длинных волн в U-образных бухтах могут быть записаны в форме (18) - (20) со следующими значениями численных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 R_{\max} &= 5.4 \frac{AL}{\sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}}}, & U_{\max} &= 6.8 \frac{AL}{\alpha \sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}^2}}, \\
 U_{\min} &= 15.7 \frac{AL}{\alpha \sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}^2}}, & Br &= 39.7 \frac{AL}{g \alpha^2 \sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}^3}}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Для сравнения воспроизведем ниже соответствующие параметризованные формулы для плоского откоса [3]:

$$\begin{aligned}
 R_{\max} &= 3.5A \sqrt{\frac{L}{\sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}}}}, & R_{\min} &= 1.5A \sqrt{\frac{L}{\sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}}}}, & Br &= 13 \frac{H_0 L}{\alpha gh_0 T_{\text{eff}}^2} \sqrt{\frac{L}{\sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}}}}, \\
 U_{\max} &= 4.5 \frac{AL}{T_{\text{eff}}} \sqrt{\frac{1}{\alpha h_0 \sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}}}}, & U_{\min} &= 7 \frac{AL}{T_{\text{eff}}} \sqrt{\frac{1}{\alpha h_0 \sqrt{gh_0 T_{\text{eff}}}}}.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Данная работа выполнена в рамках выполнения базовой части государственного задания № 2014/133. Для ИД и ОД работа также была частично поддержана грантами РФФИ (14-02-00983, 13-05-97037, 14-05-00092), Президента РФ (МК-1146.2014.5) и грантами (SF0140007s11 и ETF8870).

#### Библиографический список

1. Carrier, G.F., Greenspan, H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 97–109.
2. Диденкулова, И.И. Накат одиночных волн различной формы на берег / И.И. Диденкулова, Куркин, А.А., Е.Н. Пелиновский // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43. № 3. С. 419–425.
3. Диденкулова, И.И. Накат длинных волн на берег: влияние формы подходящей волны / И.И. Диденкулова, Е.Н. Пелиновский // Океанология. 2008. Т. 48. № 1. С. 5–10.
4. Okal, E.A., Fritz, H.M., Synolakis, C.E., Borrero, J.C., Weiss, R., Lynett, P.J., Titov, V.V., Foteinis, S., Jaffe, B.E., Liu, P.L.-F., Chan, I.-Ch. Field survey of the Samoa tsunami of 29 September 2009 // Seismolog. Res. Lett. 2010. V. 81. Iss. 4. P. 577–591.
5. Didenkulova, I. Tsunami runup in narrow bays: the case of Samoa 2009 tsunami // Nat. Hazards. 2013. V. 65. Iss. 3. P. 1629–1636.
6. Didenkulova, I., Pelinovsky, E. Nonlinear wave evolution and runup in an inclined channel of a parabolic cross-section // Phys. Fluids. 2011. V. 23. Iss. 8. Article №: 086602.
7. Диденкулова, И.И. Накат нелинейно деформированных волн на берег / И.И. Диденкулова, Н. Заибо, А.А. Куркин, Б.В. Левин, Е.Н. Пелиновский, Т. Соомере // Доклады Академии Наук. 2006. Т. 410. № 5. С. 676–678.
8. Пелиновский, Е.Н. Гидродинамика волн цунами / Е.Н. Пелиновский. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 276 с.
9. Диденкулова, И.И. Отражение длинных волн от «безотражательного» донного профиля / И.И. Диденкулова, Н. Заибо, Е.Н. Пелиновский // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 4. С. 102–108.
10. Didenkulova, I., Pelinovsky, E., Soomere, T. Long surface wave dynamics along a convex bottom // J. Geophys. Res. – Oceans. 2009. V. 114. Article №: C07006.
11. Didenkulova, I., Pelinovsky, E. Runup of tsunami waves in U-shaped bays // Pure Appl. Geophys. 2011. V. 168. Iss. 6–7. P. 1239–1249.

Дата поступления  
в редакцию 06.07.2014

O.I. Didenkulov<sup>1</sup>, I.I. Didenkulova<sup>1,2</sup>, E.N. Pelinovsky<sup>1,3</sup>

#### PARAMETERIZATION OF RUN-UP CHARACTERISTICS OF SOLITARY WAVES IN THE BAY OF PARABOLIC CROSS-SECTION

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev<sup>1</sup>,  
Institute of Cybernetics at Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia<sup>2</sup>,  
Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, N. Novgorod<sup>3</sup>

**Purpose:** In this paper we study the run-up of bell-shaped pulses described by different mathematical functions in an inclined bay of parabolic cross-section.

**Method:** In this study we use classical methods of mathematical physics, such as Riemann invariants and hodograph transformation and apply them to the hyperbolic system of the nonlinear shallow water equations.

**Results:** It is shown characteristic parameters of wave run-up for different pulses normalized by their height and wave length (duration), have close values and can be parameterized. The details of the form of the individual symmetric bell-shape pulse does not influence much run-up characteristics and can be neglected.

**Application domain:** The results of this work can be used for express estimates of tsunami run-up height.

*Key words:* nonlinear shallow water theory, wave run-up on a beach, bays of parabolic cross-section.