УДК 514.76 + 517.93

В.А. Игошин, А.М. Кузин, М.Н. Баренбойм

О КВАЗИПЛАНИМЕТРИИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Доказано, что размерность алгебры Ли инфинитезимальных движений квазиплоскости: аффинных, геодезических тривиальных – равна двум, в отличие от шестимерных алгебр Ли аффинных и геодезических тривиальных движений собственно евклидовой плоскости; алгебра Ли инфинитезимальных проективных симметрий квазиплоскости восьмимерна, как и для обычной плоскости. Получена топологическая картина пучка «прямых» – геодезических линий квазиплоскости; в частности, доказано, что любой такой пучок идентичен (изоморфен) пучку с центром в начале координат.

Ключевые слова: евклидово пространство, тензор кручения, квазиплоскость, геометризация физики, геодезические, инфинитезимальные аффинные симметрии, проективные симметрии, алгебра Ли, связность.

На протяжении многих веков человек стремился постичь окружающий нас мир, понять, как он устроен. Важную роль в этом сыграла геометрия, изучающая само пространство, его устройство и свойства. Родоначальниками геометрии как систематической науки являются древние греки, перенявшие у египтян ремесло землемерия и измерения объёмов тел и превратившие его в строгую научную дисциплину. При этом античные геометры от набора рецептов перешли к установлению общих закономерностей, составили первые систематические и доказательные труды по геометрии. Центральное место среди них занимают «Начала» Евклида (около 300 лет до н. э.). Этот труд – образец изложения в духе аксиоматического метода: все положения выводятся логическим путём из небольшого числа явно указанных и не доказываемых предположений – аксиом.

Сейчас *евклидова* геометрия представляет собой целую науку, которая продолжает развиваться и называется *собственно евклидовой.* Более 150 лет назад Н.И. Лобачевский открыл одну из первых *неевклидовых* геометрий.

Великим событием стало открытие Декартом в XVII веке *координатного метода* («Рассуждение о методе», 1637), что позволяет изучать отношения между геометрическими объектами методами алгебры. Так появилась *аналитическая геометрия*, изучающая фигуры и геометрические преобразования, которые в координатах задаются алгебраическими уравнениями. Практически одновременно с этим Паскалем и Дезаргом начато исследование свойств плоских фигур, не меняющихся при проектировании с одной плоскости на другую. Этот раздел получил название *проективной геометрии*. Метод координат лежит в основе появившейся несколько позже *дифференциальной геометрии*, где геометрические фигуры и преобразования все ещё задаются в координатах, но уже их геометрические свойства изучаются методами математического анализа. Согласно «Эрлангенской программе» Ф. Клейна, геометрия изучает все те свойства фигур, которые инвариантны относительно преобразований некоторой группы, при этом каждая группа задаёт свою геометрию. Так, изометрии (движения) евклидовых пространств задают евклидову геометрию, группа аффинных преобразований *аффинных пространств – аффинную геометрию*.

Римановым пространствам посвящена масса работ известных математиков, таких как Э. Картан, Софус Ли, Т. Леви-Чивита и другие. Среди русских геометров: В.Ф. Каган, А. С. Солодовников, П. К. Рашевский, Я. Л. Шапиро, В. А. Игошин и многие другие.

Римановы пространства с кручением введены Э. Картаном в 1922 году. Они остаются практически забытыми. В отличие от кривизны, кручение является «вещью в себе» для многих математиков, даже специалистов-геометров.

Недавно геометрия «крученых» пространств применена В.А. Игошиным в классической проблеме геометризации физики. Им были построены геометрические модели:

1) постоянного магнитного поля ([7]);

2) постоянного электрического поля ([9]), постоянного электромагнитного поля ([12]). Геометрическим эквивалентом поля оказался тензор кручения; кривизна же обращается в нуль, в отличие от моделирования А. Эйнштейном гравитационного поля в его общей теории относительности. Эти результаты показывают, что крученые пространства играют существенную роль в проблеме геометризации физики, именно поэтому их исследование приобретает приоритетный характер.

1. Приведем доказательство естественного обобщения классической теоремы Т. Леви-Чивиты.

Теорема 1. *В римановом пространстве* $V_n = (M, g_{ij})$ *можно построить и притом единственным образом аффинную связность* $\Gamma_{ij}^k(x)$, *обладающую следующими двумя свойствами:*

1. $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ *– тензор кручения, является произвольным (наперед заданным; случай равенства его нулю не исключается).*

2. Всякий раз, когда вдоль какого-либо пути одновременно переносятся параллельно два вектора ξ *и* η, *их скалярное произведение не меняется.*

Такую аффинную связность принято называть *римановой связностью с кручением*, или *метрической связностью с кручением*.

Доказательство. Риманова связность ∇ определяется тем, что для нее ковариантная производная метрического тензора обращается в нуль:

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0, \tag{1}$$

так как $\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^s g_{sj} - \Gamma_{kj}^s g_{is}$, то, циклируя (1) по индексам *i*, *j*, *k*, получаем систему трех тождеств:

$$\partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^s g_{sj} - \Gamma_{kj}^s g_{is} = 0, \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^s g_{sk} - \Gamma_{ik}^s g_{js} = 0, \partial_j g_{ki} - \Gamma_{jk}^s g_{si} - \Gamma_{ji}^s g_{ks} = 0.$$

Складывая второе и третье и вычитая первое, приходим к соотношению

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} + g_{is}\left(\Gamma_{kj}^s - \Gamma_{jk}^s\right) + g_{sj}\left(\Gamma_{ki}^s - \Gamma_{ik}^s\right) + g_{ks}\left(\Gamma_{ij}^s - \Gamma_{ji}^s\right) - 2 g_{ks}\Gamma_{ij}^s = 0.$$

Свернем последнее с обратным метрическим тензором, умножив обе части на g^{kl}. В итоге получаем окончательную формулу для нахождения коэффициентов связности Γ_{ij}^l с учетом кручения:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij}^l + g^{kl}\left(g_{is} T_{kj}^s + g_{sj} T_{ki}^s\right)\right), \tag{2}$$

где $T_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ji}^l$, $T_{kj}^s = \Gamma_{kj}^s - \Gamma_{jk}^s$, $T_{ki}^s = \Gamma_{ki}^s - \Gamma_{ik}^s$.

Анализ последнего тождества завершает доказательство теоремы 1.

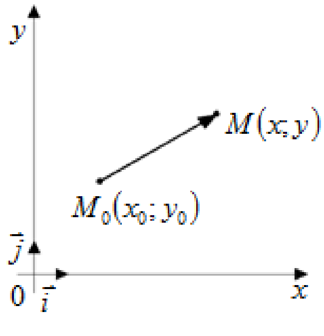

Рис. 1

2. Определение. *В случае, когда* $M = R^n$ *и* $g_{ij} = \delta_{ij}$, *пространство* $\left(M = R^n, g_{ij} = \delta_{ij}, T_{ij}, \Gamma_{ij}^k\right)$ *назовем квазиевклидовы; в частности, при* $n = 2$ *пространство* $\left(R^2, \delta_{ij}, T_{ij}, \Gamma_{ij}^k\right)$ *будем называть квазиевклидовой плоскостью, или просто квазиплоскостью.*

В качестве двумерного многообразия возьмем обычную плоскость с обычной топологией, которую можно отождествить с двумерным арифметическим пространством R^2, точками в котором являются упорядоченные пары вещественных чисел *x, y*. Будем считать плоскость евклидовой, т.е. иными словами, считаем заданным метрический тензор g_{ij}. Далее используется декартова система координат *x*0*y* (рис. 1).

Введем обозначения $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ – координаты бесконечно малого вектора. Квадрат расстояния между точками *M* и *M₀* – первая основная квадратичная форма в этих координатах записывается в виде: $ds^2 = dx^2 + dy^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

Таким образом, коэффициенты (координаты) дважды ковариантного метрического тензора g_{ij} совпадают с символами Кронекера: $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при}\, i = j \\ 0, & \text{при}\, i \neq j \end{cases}$, которые составляют матрицу Грамма $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Обратный дважды контравариантный метрический тензор также задается единичной матрицей: $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. При этом взятая декартова система координат является прямоугольной и базисные векторы на осях это единичные орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Компоненты постоянного тензора кручения в общем случае имеют вид

$$(T_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, (T_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

где *a, b* – произвольные константы.

Формула из теоремы 1 упрощается: $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(T_{ij}^k + g^{ks}\left(g_{im}T_{sj}^m + g_{mj}T_{si}^m\right)\right)$. Но вычисление коэффициентов связности – очень трудоемкая задача. Для упрощения вычислений был разработан программный комплекс *Symmetries*, в результате применения которого получено: $(\Gamma_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, (\Gamma_{ij}^2) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Найдем алгебру Ли векторных полей, являющихся инфинитезимальными аффинными симметриями.

Система уравнений Софуса Ли

$$L_X \Gamma_{ij}^k = \partial_{ij} X^k + \partial_i X^s \Gamma_{sj}^k + \partial_j X^s \Gamma_{is}^k - \partial_s X^k \Gamma_{ij}^s + X^s \partial_s \Gamma_{ij}^k = 0, \tag{3}$$

построенная с помощью программного комплекса выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} L_X \Gamma_{11}^1 = \partial_{11} X^1 + a\partial_1 X^2 + a\partial_2 X^1 = 0, L_X \Gamma_{12}^1 = \partial_{12} X^1 + a\partial_1 X^1 + b\partial_1 X^2 + 2a\partial_2 X^2 = 0, \\ L_X \Gamma_{21}^1 = \partial_{21} X^1 + b\partial_2 X^1 + b\partial_1 X^2 = 0, L_X \Gamma_{22}^1 = \partial_{22} X^1 + a\partial_2 X^1 + 3b\partial_2 X^2 = 0, \\ L_X \Gamma_{11}^2 = \partial_{11} X^2 - 3a\partial_1 X^1 - b\partial_1 X^2 = 0, L_X \Gamma_{12}^2 = \partial_{12} X^2 - a\partial_2 X^1 - a\partial_1 X^2 = 0, \\ L_X \Gamma_{21}^2 = \partial_{21} X^2 - a\partial_2 X^1 - 2b\partial_1 X^1 - b\partial_2 X^2 = 0, L_X \Gamma_{22}^2 = \partial_{22} X^2 - b\partial_2 X^1 - b\partial_1 X^2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему дифференциальных уравнений с помощью программного пакета *Maple*, получаем, что компоненты искомого векторного поля X – общее решение системы (3) – имеют вид

$$X^1 = A = \text{const}, X^2 = B = \text{const}, \tag{4}$$

если хотя бы одна из произвольных констант *a, b* не равна нулю

$$X^1 = Ax_1 + Bx_2 + C, X^2 = Dx_1 + Ex_2 + F, \tag{5}$$

где $x_1 = x$ и $x_2 = y$, если $a = b = 0$; при этом *A, B, C, D, E,* и *F* – const.

В случае (4) легко выделить базисные векторные поля – генераторы алгебры Ли аффинных симметрий квазиплоскости: $X_1 = (1,0), X_2 = (0,1)$. Итак, эта алгебра оказалась двумерной.

В случае (5), т.е. при нулевом тензоре кручения, квазиплоскость превращается в собственно евклидову плоскость. Придавая константам *A, B, C, D, E, F* шесть серий значений так, чтобы составленная из них матрица была единичной, получаем следующие базисные векторные поля – генераторы алгебры Ли аффинных движений обычной евклидовой плоскости: $X_1=(x_1,0)$, $X_2=(x_2,0)$, $X_3=(1,0)$, $X_4=(0,x_1)$, $X_5=(0,x_2)$, $X_6=(0,1)$. Таким образом, данная алгебра – шестимерна, что, впрочем, общеизвестно.

В таких случаях говорят, что евклидова плоскость имеет большую аффинную подвижность по сравнению с квазиплоскостью.

3. Лемма 1. *Коэффициенты любой аффинной связности, в частности, полученные в пункте 2, можно записать в виде:* $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{(ij)}^k+\Gamma_{[ij]}^k$. *При этом первое слагаемое находится симметрированием найденных коэффициентов связности по нижним индексам:* $\Gamma_{(ij)}^k=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k+\Gamma_{ji}^k\right)$, *а второе альтернированием:* $\Gamma_{[ij]}^k=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k\right)=\frac{1}{2}T_{ij}^k$. *Равенства:* $\left(\Gamma_{(ij)}^1\right)=\begin{pmatrix}0 & a/2\\ a/2 & b\end{pmatrix};\left(\Gamma_{(ij)}^2\right)=\begin{pmatrix}-a & -b/2\\ -b/2 & 0\end{pmatrix}$ *определяют компоненты некоторой новой аффинной связности, имеющей те же геодезические линии, что и исходная связность* Γ_{ij}^k.

Система С. Ли уравнений в частных производных для нахождения *геодезических симметрий*, т.е. симметрий, сохраняющих геодезические линии связности вместе с каноническим параметром на каждой из них, имеет вид

$$\begin{cases}\partial_{11}X^1+a\partial_1X^2+a\partial_2X^1=0, \partial_{12}X^1+b\partial_1X^2+\frac{b}{2}\partial_2X^1+\frac{a}{2}\partial_2X^2=0;\\ \partial_{22}X^1-b\partial_1X^1+a\partial_2X^1+2a\partial_2X^2=0, \partial_{11}X^2-2a\partial_1X^1-b\partial_1X^2+a\partial_2X^2=0;\\ \partial_{12}X^2-\frac{b}{2}\partial_1X^1-\frac{a}{2}\partial_1X^2-a\partial_2X^1=0, \partial_{22}X^2-b\partial_1X^2-b\partial_2X^1=0.\end{cases}$$

Общее решение этой системы – $X^1=A=\text{const}, X^2=B=\text{const}$, если хотя бы одна из констант a или b не равна нулю. Следовательно, размерность алгебры Ли геодезических симметрий квазиплоскости равна двум.

В случае обычной плоскости, т.е. при $a=b=0$ – $X^1=Ax_1+Bx_2+C, X^2=Dx_1+Ex_2+F$, если $a=b=0$, что означает тот факт, что размерность алгебры ли геодезических симметрий евклидовой плоскости равна шести.

Найдем *инфинитезимальные проективные симметрии*, т.е. произвольные геодезические симметрии, которые могут не сохранять аффинный параметр. Для этого вычислим *проективные параметры Томаса – коэффициенты проективной связности квазиплоскости* по следующей формуле $\Pi_{ij}^k=\Gamma_{(ij)}^k-\frac{1}{n+1}\left(\delta_i^k\Gamma_{(sj)}^s+\delta_j^k\Gamma_{(si)}^s\right)$.

В матричной записи: $\left(\Pi_{ij}^1\right)=\begin{pmatrix}b/3 & a/3\\ a/3 & b\end{pmatrix};\left(\Pi_{ij}^2\right)=\begin{pmatrix}-a & -b/3\\ -b/3 & -a/3\end{pmatrix}$.

Система уравнений С. Ли в данном случае имеет вид

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\partial_{11}X^1-\frac{2}{3}\partial_{12}X^2+\frac{b}{3}\partial_1X^1+\frac{2a}{3}\partial_1X^2+a\partial_2X^1=0, \frac{2}{3}\partial_{12}X^1-\frac{1}{3}\partial_{22}X^2+b\partial_1X^2+\frac{2b}{3}\partial_2X^1+\frac{a}{3}\partial_2X^2=0\\ \partial_{22}X^1+a\partial_2X^1+2b\partial_2X^2-b\partial_1X^1=0, \partial_{11}X^2-2a\partial_1X^1-b\partial_1X^2+a\partial_2X^2=0\end{cases}$$

Общее решение данной системы в случае квазиплоскости можно разделить на четыре случая в зависимости от значения констант a и b:

$$X^1 = -\left[\left(-C_4 \sin bx_2 + C_3 \cos bx_2\right)\cos ax_1 - \sin ax_1\left(C_3 \sin bx_2 + C_4 \cos bx_2\right)\right]e^{bx_1 - ax_2} - \left[\left(-C_2 \sin bx_2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + C_1 \cos bx_2\right)\cos ax_1 - \sin ax_1\left(C_1 \sin bx_2 + C_2 \cos bx_2\right)\right]e^{ax_2 - bx_1} + \left(C_6 \sin 2bx_2 - C_5 \cos 2bx_2\right)\cos 2ax_1 \quad ,$$
$$+ C_7 + C_5 \sin 2bx_2 \sin 2ax_1 + C_6 \cos 2bx_2 \sin 2ax_1,$$
$$X^2 = \frac{1}{b}\int\left[-2b^2C_5 \cos\left(2bx_2 + 2ax_1\right) + 2b^2C_6 \sin\left(2bx_2 + 2ax_1\right) + a\left(\left(aC_1 - bC_2\right)\cos\left(ax_1 + bx_2\right)\right.\right.$$
$$\left. - \sin\left(ax_1 + bx_2\right)\left(aC_2 + bC_1\right)\right)e^{ax_2 - bx_1} + \left(\left(aC_4 - bC_3\right)\cos\left(ax_1 + bx_2\right) + \sin\left(ax_1 + bx_2\right)\left(aC_3 + bC_4\right)\right)\cdot$$
$$\left.\cdot be^{bx_1 - ax_2}\right]dy + \frac{1}{b}\int\left[-\left\{\int\left(4b^2C_6 \cos\left(2bx_2 + 2ax_1\right)a + 4b^2C_5 \sin\left(2bx_2 + 2ax_1\right)a - a\left(\left(-b^2C_2 + 2abC_1 + \right.\right.\right.\right.\right.$$
$$\left. + a^2C_2\right)\cos\left(ax_1 + bx_2\right) + \sin\left(ax_1 + bx_2\right)\left(-2abC_2 - b^2C_1 + a^2C_1\right)\Big)e^{ax_2 - bx_1} + \left(\left(2abC_4 + a^2C_3 - b^2C_3\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left.\cdot \cos\left(ax_1 + bx_2\right) - \sin\left(ax_1 + bx_2\right)\left(b^2C_4 - 2abC_3 - b^2C_4\right)\right)be^{bx_1 - ax_2}\Big)dy\right\} - 2bC_5 a \cos\left(2bx_2 + 2ax_1\right) +$$
$$+ 2bC_6 a \sin\left(2bx_2 + 2ax_1\right) + \left(\left(-abC_1 - a^2C_2\right)\cos\left(ax_1 + bx_2\right) + \left(abC_2 - a^2C_1\right)\sin\left(ax_1 + bx_2\right)\right)e^{ax_2 - bx_1} +$$
$$\left. + \left(\left(-abC_3 - b^2C_4\right)\cos\left(ax_1 + bx_2\right) + \left(abC_4 - b^2C_3\right)\sin\left(ax_1 + bx_2\right)\right)e^{bx_1 - ax_2}\right]dx + C_8,$$

если a и b не равны нулю;

$$X^1 = \frac{1}{b}\left[b\left(C_1 \cos\left(bx_2\right)e^{bx_1} - C_2 \sin\left(bx_2\right)e^{bx_1} + C_4 \cos\left(2bx_2\right) - C_5 \sin\left(2bx_2\right) + C_6\right) + \left(-C_8 \cos\left(bx_2\right) - \right.\right. ,$$
$$\left.\left. - C_7 \sin\left(bx_2\right)\right)e^{-bx_1}\right],\ X^2 = \left(C_1 \sin\left(bx_2\right) + C_2 \cos\left(bx_2\right)\right)e^{bx_1} + C_3 + C_4 \sin\left(2bx_2\right) + C_5 \cos\left(2bx_2\right)$$

если $a = 0, b \neq 0$;

$$X^1 = \left(C_1 \sin\left(ax_1\right) + C_2 \cos\left(ax_1\right)\right)e^{-ax_2} + C_3 + C_4 \sin\left(2ax_1\right) + C_5 \cos\left(2ax_1\right),\ X^2 = \frac{1}{a}\left[-a\left(C_1 \cos\left(ax_1\right) - \right.\right. ,$$
$$\left. - C_2 \sin\left(ax_2\right)\right)e^{-ax_2} + a\left(-C_4 \cos\left(2ax_1\right) + C_5 \sin\left(2ax_1\right) + C_6\right) + C_7 \sin\left(ax_1\right)e^{ax_2} + C_8 \cos\left(ax_1\right)e^{ax_2}\Big]$$

если $a \neq 0, b = 0$;

$$X^1 = C_1x_1^2 + \frac{1}{2}C_3x_1x_2 + C_6x_2 + C_7x_1 + C_8,\ X^2 = C_1x_1x_2 + C_2x_1 + \frac{1}{2}C_3x_2^2 + C_4x_2 + C_5,$$

если $a = b = 0$; $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8 - \text{const}$.

Во всех четырех случаях размерность алгебры Ли равна восьми.

4. Найдем теперь геодезические линии квазиевклидовой плоскости. *Геодезические линии* в пространстве аффинной связности играют приблизительно такую же роль, как прямые линии в аффинном пространстве. Именно, они обладают тем же основным свойством – *постоянством направления.* Для прямых линий это свойство выражается в том, что вектор, направленный по данной прямой линии в какой-нибудь ее точке, будет направлен по ней и в любой другой ее точке после параллельного переноса его вдоль этой линии в указанную точку.

Геодезические линии находятся из следующей системы обыкновенных дифференциальных второго уравнений:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}.$$

Коэффициенты аффинной связности Γ_{ij}^k были найдены ранее:

$$\left(\Gamma_{ij}^1\right) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix};\left(\Gamma_{ij}^2\right) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

С учетом найденных коэффициентов и приняв замену $x^1 = x, x^2 = y$, система уравнений геодезических линий примет вид

$$\ddot{x} = -\dot{y}\left(a\dot{x} + b\dot{y}\right),\ \ddot{y} = \dot{x}\left(a\dot{x} + b\dot{y}\right). \qquad (6)$$

Теорема 2. *Дифференциальные уравнения геодезических линий квазиплоскости, или, что то же самое, аффинной (метрической) связности* Γ_{ij}^{k} *имеют вид* $\ddot{x} = -\left(a\dot{x} + b\dot{y}\right)\dot{y},\ \ddot{y} = \left(a\dot{x} + b\dot{y}\right)\dot{x}.$

Решим далее полученные дифференциальные уравнения и найдем геодезические линии.

Возможны два случая.

1. $a\dot{x} + b\dot{y} \equiv 0$ в каждой точке t.

а) $\dot{x} \equiv \dot{y} \equiv 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 = 0$.

Геодезические линии вырождаются в точки – положения равновесия: $x = x_0,\ y = y_0$.

б) $\vec{v} \neq 0 \qquad a\dot{x} + b\dot{y} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{(a,b)} \perp \vec{v}$

Геодезические линии – прямые $x = \dot{x}_0 t + x_0,\ y = \dot{y}_0 t + y_0$, перпендикулярные вектору $\overrightarrow{(a,b)}$.

2. $a\dot{x} + b\dot{y} \neq 0$

Лемма 2. *Система уравнений геодезических допускает интеграл (энергии):* $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2,\ r^2 = \mathrm{const}$.

Лемма 3. *Если* $\psi = a\dot{x} + b\dot{y} = 0$ $(\psi \neq 0)$ *в некоторой точке* $t = t_0$, *то* $\psi \equiv 0$ $(\psi \neq 0)$ *в каждой точке* $t \in (-\infty, +\infty)$.

Найдем уравнения геодезических линий для случая $a = 0,\ b = 1$. Сделаем замену, с учетом того, что $r = \mathrm{const}$ (согласно лемме 1): $\dot{x} = r\cos\varphi, \dot{y} = r\sin\varphi.\quad \ddot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi, \ddot{y} = r\dot{\varphi}\cos\varphi.$

Исходная система принимает вид:

$$-r\dot{\varphi}\sin\varphi = -r\sin\varphi(ar\cos\varphi + br\sin\varphi),\ r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi(ar\cos\varphi + br\sin\varphi).$$

Отсюда следует, что $\dot{\varphi} = ar\cos\varphi + br\sin\varphi$.

Подставив $a = 0, b = 1$, получаем, что система представляется в виде

$$d\varphi/dt = r\sin\varphi.$$

Без нарушения общности можно предположить, что $r = 1$.

Решая, приходим к системе вида

$$\dot{x} = -th(t + C), \dot{y} = \frac{2e^{t+C}}{1 + e^{2(t+C)}}.$$

Решив ее, получаем, что уравнения геодезических выглядят следующим образом:

$$x(t) = -\ln|ch(t + C)| + C_1, y(t) = 2\mathrm{arctg}\left(e^{t+C}\right) + C_2.$$

Возьмем следующие начальные условия: $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Начальные условия второго рода оставим варьируемыми.

$\dot{x} = r\cos\varphi, \dot{y} = r\sin\varphi. \Rightarrow \dot{y}/\dot{x} = \mathrm{tg}\varphi \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}(\dot{y}/\dot{x})$

$\varphi_0 = \mathrm{arctg}(\dot{y}(0)/\dot{x}(0)), \varphi(0) = 2\mathrm{arctg}\left(e^{C}\right) \Rightarrow C = \ln(\mathrm{tg}(\varphi_0/2))$

$x(0) = -\ln|ch(\ln(tg(\varphi_0/2)))| + C_1 = 0 \quad C_1 = \ln|ch(\ln(tg(\varphi_0/2)))| = \ln|1/\sin\varphi_0|$

$y(0) = 2\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\varphi_0/2)) + C_2 = 0 \qquad C_2 = -2\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\varphi_0/2))$

В итоге получаем

$$x(t) = x_0 - \ln ch(\ln(\mathrm{tg}(\varphi_0/2)) - t) + \ln(1/\sin\varphi_0), y(t) = y_0 + 2\mathrm{arctg}\left(e^{-t}\mathrm{tg}(\varphi_0/2)\right) - \varphi_0. \qquad \varphi_0 \in (0;\pi)$$

Символом $l(x_0, y_0, \varphi_0)$ обозначим геодезическую, проходящую при $t = 0$ через точку $(x_0; y_0)$ под углом φ_0 между вектором начальной скорости $\overrightarrow{v_0} = (\dot{x}_0; \dot{y}_0)$ и осью абсцисс Ox. Считаем также что длина $|\vec{v}_0| = 1$.

Теорема 3. *Если* $\psi \equiv 0$, то геодезические либо:

а) вырождаются в отдельные точки – положения равновесия;

б) являются прямыми, перпендикулярными вектору $\bar{K}=(a,b)$*. Если же* $\psi\neq 0$*, то параметрические уравнения геодезических линий* $l(x_0,y_{0,}\varphi_0)$ *квазиплоскости приводятся к виду*

$$x=x(t)=x_0-\ln ch\left(t+\ln\left(tg\left(\varphi_0/2\right)\right)\right)-\ln\left(1/\sin\varphi_0\right), y=y(t)=y_0+2arctg\left(e^{-t}tg\left(\varphi_0/2\right)\right)-\varphi_0, \varphi_0\in\left(0;\pi\right)$$

Замечание. *При фиксированной точке* $(x_0;y_0)$ *получаем целый пучок геодезических линий с центром в заданной точке* $(x_0;y_0)$ *квазиевклидовой плоскости. Совокупность геодезических* $l(x_0,y_{0,}\varphi_0)$ *исчерпывает семейство всевозможных геодезических нашей плоскости, если иметь в виду, что* $\varphi_0\in(0,\pi)$*, а точка* $(x_0;y_0)$ *– центр пучка – пробегает всю квазиплоскость.*

Теорема 4. *Пучок геодезических квазиплоскости с центром в произвольной точке* $(x_0;y_0)$ *получается сдвигом пучка с центром в точке* $(0;0)$ *на вектор* (x_0,y_0)*.*

Теорема 5. *Всевозможные сдвиги квазиплоскости на любой постоянный вектор образуют двумерную группу Ли ее движений (симметрий), сохраняющую ее метрику* g_{ij}*, связность* $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *и геодезические линии.*

Общая топологическая картина поведения геодезических любого фиксированного пучка представлена (рис. 2) на примере пучка с центром в точке (0;0).

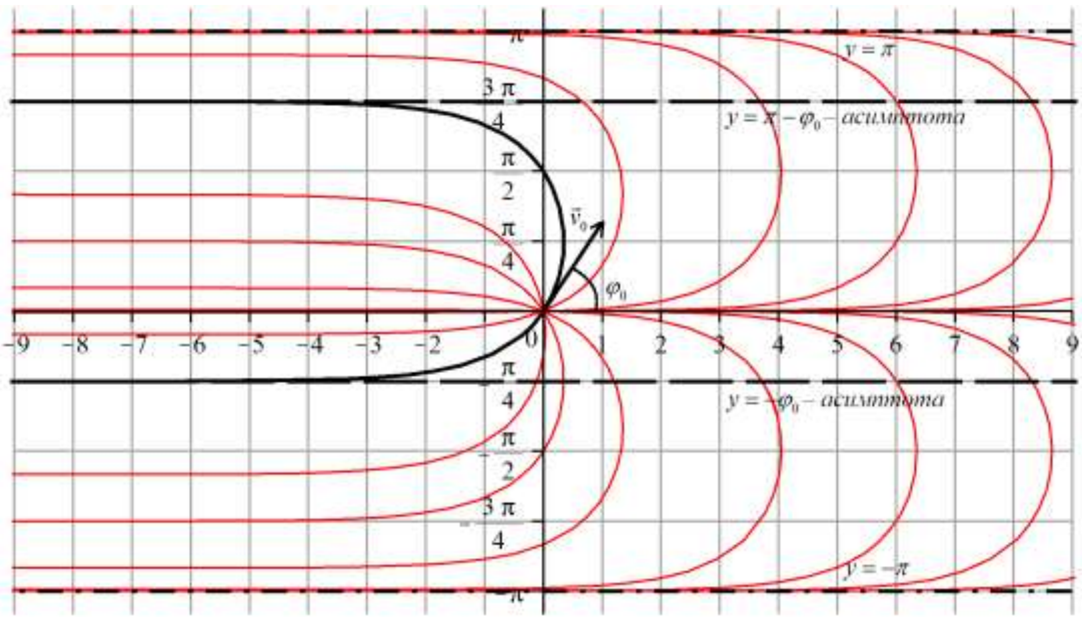

Рис. 2. Пучок геодезических линий с центром в начале координат

Теорема 6. 1. $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)=-\infty;\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t)=\begin{cases}\pi-\varphi_0 \text{ при } t\to+\infty,\\ -\varphi_0\ .\ t\to-\infty.\end{cases}$ *Следовательно, прямые* $y=\pi-\varphi_0$ *и* $y=-\varphi_0$ *– горизонтальные асимптоты при* $t\to-\infty$ *и, соответственно,* $t\to-\infty$ *геодезической пучка с центром в начале координат и начальным углом* φ_0. 2. *Геодезические пучка с центром* $(0;0)$ *заполняют горизонтальную открытую полосу* $-\infty<x<+\infty, -\pi<y<\pi.$

Замечание. *Рис. 2 без ограничения общности иллюстрирует теорему 5.*

Теорема 7. *Если взята произвольная прямая (геодезическая на квазиплоскости)* $l(x_0,y_{0,}\varphi_0)$ *и точка* $(x_0;y_0)$ *вне этой линии, но между ее асимптотами (*$-\varphi_0\leq y_0\leq\pi-\varphi_0$*), то через эту точку проходит только одна прямая, параллельная данной.*

5. Приложение *Symmetries*. Расчет компонент связности Γ_{ij}^{k} и построение алгебры Ли – это трудоемкая задача даже для двумерного случая с постоянными метрическим тензором и тензором кручения. В связи с этим, было решено сделать программу для автоматизации данного процесса.

Программа написана на языке C++ с использованием кроссплатформенной системы сборки CMake, библиотеки Boost и кроссплатформенного инструментария разработки графического интерфейса пользователя – *Qt*.

Изначально были заданы некоторые условия на реализацию. Среди них можно выделить:

- возможность подстановки любых выражений в качестве компонент тензора;
- возможность расчета связности для *n*-мерного пространства;
- расчет всевозможных связностей (аффинной, геодезической и проективной);
- предусмотреть возможность расширения функциональности, в том числе добавление построения графиков.

Исходя из этих условий, код изначально писался с возможностью расширения. На данный момент программа обладает следующими функциями:

- поддержка любой размерности пространства;
- поддержка любых тензоров кручения и константных метрических тензоров;
- расчет компонент аффинной связности Γ_{ij}^{k};
- построение системы уравнений ли для аффинной связности;
- возможность задавать входные данные в тексте программы и через текстовые файлы;
- программа имеет графический интерфейс пользователя с возможностью задания метрического тензора и тензора кручения.

Исходный код программы опубликован под лицензией *GPLv3* на сайте *GitHub*и [14].

Формат входных файлов

Входные файлы представляет собой обыкновенные текстовые файлы. Пользователь имеет возможность самостоятельно выбрать файл с носителя данных (жесткого диска, флэш-накопителя).

В файлах на данный момент можно задать метрический тензор и тензор кручения в следующем формате:

- если тензор задается одной компонентой (одна матрица размерностью *n*), то файл должен иметь следующий формат:

$$[n, n]((a, b), (c, d)),$$

т.е. в круглых скобках задается размерность матрицы, далее, в круглых, сама матрица построчно, причем каждая строка заключена в свои круглые скобки, через запятую. В написании матрицы можно, если это необходимо, добавлять пробелы и другие разделительные символы для повышения удобства: все они будут игнорироваться при чтении файла приложением.

Если тензор имеет несколько компонент (например тензор кручения), то он задается в виде набора матриц в таком же формате, начиная с первой строки файла. Каждая матрица записывается на отдельной строке и между ними должна присутствовать хотя бы одна пустая строка – разделитель.

Библиографический список

1. Yano Kentaro. The theory of Lie derivatives and its applications, Bibliotheca Mathematica. A Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics Volume III, North-Holland Publishing Co. – Amsterdam, P. Noordhoff Ltd. – Groningen, 1955–19-22, 51-54, 85-157p.
2. **Картан, Э.** Геометрия римановых пространств / Э. Картан. – М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.

3. **Рашевский, П.К.** Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967.
4. **Игошин, В. А.** Инфинитезимальные симметрии квазигеодезических потоков 2-й степени относительно скорости // Доклады РАН, Т. 354. 1997. № 1. С. 14–17.
5. **Игошин, В. А.** Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. №3. С. 531–535.
6. **Игошин, В. А.** Геометрическое моделирование динамических систем // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2011 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2011.
7. **Игошин, В. А.** О геометрическом моделировании постоянного магнитного поля // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2012 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2012.
8. **Игошин, В. А.** О евклидовой плоскости с кручением / В. А. Игошин, А. М. Кузин, М. Н. Баренбойм // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2013 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2013.
9. **Игошин, В. А.** Геометрическая модель постоянного электрического поля на плоскости / В. А. Игошин, М. А. Банин // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2013 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2013.
10. **Игошин, В. А** Начала планиметрии квазиевклидовой плоскости / В. А. Игошин, А. М. Кузин, М. Н. Баренбойм // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2014 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2014.
11. **Игошин, В. А.** Инфинитезимальные симметрии квазиевклидовой плоскости / В. А. Игошин, А. М. Кузин // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2014 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2014.
12. **Игошин, В. А.** Уравнения геодезических линий квазиевклидовой плоскости / В. А. Игошин, М. Н. Баренбойм // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2014 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2014.
13. **Игошин, В. А.** Геометрическая модель постоянного электромагнитного поля на плоскости // Тезисы докладов международной научно-технической конференции ИСТ – 2014 / НГТУ. – Нижний Новгород, 2014.
14. https://github.com/Leviathan941/symmetries.

Дата поступления
в редакцию 06.07.2014

V.A. Igoshin, A.M. Kuzin, M.N. Barenboim

ABOUT QUASIPLANIMETRY

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Quasieuclidean plane geometry, i.e. ordinary Euclidean plane, which has affine connection with nonzero constant torsion tensor, we call quasiplanimetry. It is also assumed that the parallel transport of vectors on the basis of this connection keeps their scalar product. Quasiplane refers to the metric connection spaces with torsion, which was introduced by Cartan about a hundred years ago. It was proved, that the dimension of the Lie algebra’s infinitesimal motions of quasiplane – affine, trivial geodetic – is two unlike six for Lie algebras as affine and geodesic trivial motions of the proper Euclidean plane; the dimension of the projective Lie algebra’s infinitesimal motions of quasiplane and Euclidean plane is equal to eight. Topological picture of the beam of “lines” was built. In particular, it is proved that any such beam is identical (isomorphic) to beam that centered at the origin of the coordinate system.

Key words: Euclidean space, torsion tensor, quasiplane, geometrization of physics, geodetic, infinitesimal affine symmetries, projective symmetries, Lie algebra, connection.