МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 517.9

С.Н. Алексеенко, С.Н. Нагорных, И.П. Рязанцева

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЗАДАЧ НЬЮТОНОВОЙ ДИНАМИКИ СКАЛЯРНОЙ ПЛОТНОСТИ ДИСЛОКАЦИЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Построены математические модели задач, описывающих динамику скалярной плотности дислокаций, обоснована возможность исследования некоторых классов таких задач методами теории операторов монотонного типа и методом дополнительного аргумента.

Ключевые слова: скалярная плотность дислокаций, теория операторов монотонного типа, метод дополнительного аргумента.

Известно описание ньютоновой динамики дислокаций с помощью тензорной плотности дислокаций [1]. Калибровочно инвариантная динамика дислокаций описывается как тензорной плотностью дислокаций и дисклинаций для янг-милсовских полей [2], так и скалярной плотностью прямолинейных дефектов для теории сверхпроводнивости Гинзбурга-Ландау-Абрикосова [3]. Кроме того, скалярная плотность дислокаций широко известна в описании механических свойств кристаллов и сплошных сред [4]. В частности, в диссипативной механике, определяемой взаимодействием дислокаций и точечных дефектов, скалярная плотность дислокаций применяется для вычисления скорости пластической деформации [5]. Указанное взаимодействие приводит к переползанию краевых и скручиванию винтовых дислокаций, которые во внешних силовых полях могут вызывать разрушения. Это взаимодействие проявляется как основное [4] при облучении, отжиге, закалке, циклическом деформировании вблизи поверхности, при поверхностных реакциях и т.д.

По указанным причинам актуальной является математическая модель для скалярной плотности скользящих дислокаций при движении вперед-назад $\nu_{\mp}$ и скалярной плотности переползающих дислокаций ν, имеющей вид системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\nu}_{\mp} = G_{\mp} - a_{\mp}\nu_{\mp} - b\nu_{\mp}\nu, \qquad (1)$$

$$\dot{\nu} = b\nu_{\delta}\nu - a_M(\nu)\nu + Sdiv[(\nu_{\kappa} - \nu)\nabla\nu], \qquad (2)$$

с некоторыми граничными условиями, где $\nu_{\kappa}, G_{\mp}, a_{\mp}, b, S$ - положительные постоянные, $\nu_{\delta} = \nu_{+} + \nu_{-}$, $a_M(\nu)$ - функция, характеризующая частоту поглощения плотности дислокаций для некоторого стока. Укажем, что ∇ - трехмерный градиент с множителем $(\nu_k - \nu)$ [6] (впервые введен Я.Б. Зельдовичем в [7]) с коэффициентом ν для описания структурного характера температурных полей.

Через ν_{δ} и ν определяются деформация, растяжение и кручение стержней, напряжение материала, а также в точке переключения $\nu_{\delta} = a_M(\nu)b^{-1}$ около однородного решения [8]

© Алексеенко С.Н., Нагорных С.Н., Рязанцева И.П., 2015.

описывается зарождение продольных и поперечных трещин как неустойчивый рост ν до критического значения ν_κ при изолированном массообмене:

$$\frac{\partial\nu}{\partial z}|_{z=0}=\frac{\partial\nu}{\partial z}|_{z=l}=0, \qquad \frac{\partial\nu}{\partial\rho}|_{\rho=R}=0, \tag{3}$$

где l – длина стержня; R – его радиус.

Исследуем возможность расщепления решения системы (1), (2) для стационарного случая в следующей форме

$$\nu(x,y,z)=\tilde{\nu}(x,y)+\bar{\nu}(z) \tag{4}$$

для вычисления крутильной жёсткости (КЖ) стержней. Известно, что КЖ тонких стержней вычисляется как количество вязкой жидкости, протекающей через трубу соответствующего сечения [1]. Роль такой жидкости в твердом поликристаллическом стержне могут играть дислокации – элементарные носители деформации.

Подставив (4) в (1), (2) и исключив ν_δ из (2) для нециклического нагружения (т. е. $\nu_\delta=\nu_+$, $a_\delta=a_+$), получим

$$S\nu_\kappa\Delta(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\Delta(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu})=0. \tag{5}$$

Пусть функция $\tilde{\nu}$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\tilde{\nu}=-1, \tag{6}$$

где $\tilde{\nu}=\text{const}$ на контуре сечения стержня, тогда (5) примет вид

$$-S\nu_\kappa+S\nu_\kappa\Delta\bar{\nu}-S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\Delta\bar{\nu}+S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2+$$
$$+\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu})=0. \tag{7}$$

В рамках этого подхода примем, что $\tilde{\nu}<<\bar{\nu}$, $\nabla\tilde{\nu}<<\nabla\bar{\nu}$, поэтому в (7) слагаемыми с $\tilde{\nu}$ можно пренебречь. Следовательно, от (7) придем к равенству

$$-S\nu_\kappa+S\nu_\kappa\Delta\bar{\nu}-S\bar{\nu}\Delta\bar{\nu}+S\bar{\nu}-S(\nabla\bar{\nu})^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b\bar{\nu}}-a_M(\bar{\nu})\right]\bar{\nu}=0. \tag{8}$$

Учитывая, что $\bar{\nu}=\bar{\nu}(z)$, уравнение (8) перепишем в виде

$$(\nu_\kappa-\bar{\nu})\bar{\nu}''_z-(\bar{\nu}'_z)^2+\frac{1}{S}\left[\frac{bG}{a_\delta+b\bar{\nu}}-a_M(\bar{\nu})\right]\bar{\nu}+\bar{\nu}-\nu_k=0. \tag{9}$$

Уравнение (9) можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с бифуркацией Богданова – Такенса и слабодиссипативной динамикой $\bar{\nu}''_z-(\mu_1+\mu_2\bar{\nu})\bar{\nu}'_z+\tilde{A}+\tilde{B}\bar{\nu}+\tilde{C}\bar{\nu}^2=0$, где μ_1, μ_2, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ – некоторые постоянные.

Вычитая из (5) уравнение (7), получаем

$$(\Delta\tilde{\nu}+1)(\nu_\kappa-\nu)=0 \ . \tag{10}$$

Уравнение (10) описывает либо возникновение распределения дислокаций при упругом кручении, либо при вязком течении. Последнее связано с занулением квазилинейной диффузии дислокаций по двум причинам: равенство нулю линейного по ν коэффициента диффузии (вязкости) или лапласиана от ν. Чтобы реально исследовать роли того и другого явления, допустим $\nu\approx\nu_\kappa$. При одном из значений постоянной ν_κ плотность дислокаций имеет критическое значение, при котором материал стержня течет, подобно невязкой жидкости. В [8] исследовалось дислокационное зарождение трещин при циклическом кручении стержня, при этом ν_k имело смысл критической плотности дислокаций, вызывающей безбарьерное зарождение продольных или поперечных трещин в стержне. Отметим, что $\nu_к$ является универсальной величиной во всех диссипативных процессах. Этим и объясняется особый интерес исследователей к квазилинейному дифференциальному уравнению (2).

Выбирая в (5) другой вариант расщепления $\tilde{\nu}(x,y)+\bar{\nu}(z)\approx\nu_к$, придем к уравнению

$$S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2=\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu})=0. \tag{11}$$

Пусть $\tilde{\nu}>>\bar{\nu},\nabla\tilde{\nu}>>\nabla\bar{\nu}$, тогда от (10) придем к уравнению

$$(\nabla\tilde{\nu})^2=f(\tilde{\nu})\tilde{\nu}, \tag{12}$$

где

$$f(\tilde{\nu})=\frac{1}{S}\left[\frac{bG}{a_\delta+b\tilde{\nu}}-a_M(\tilde{\nu})\right].$$

Разложив функцию $f(\tilde{\nu})$ по степеням $\tilde{\nu}-\nu_к$ и отбросив члены более высокого порядка малости, чем $\bar{\nu}$, из (12) выведем уравнение

$$(\bar{\nu}'_z)^2=\Phi_1+\Phi_2\bar{\nu}, \tag{13}$$

где $\Phi_1=f(\nu_к)\nu_к,\Phi_2=-[f(\nu_к)+f'(\nu_к)\nu_к]$. Решение уравнения (13), удовлетворяющее начальному условию $\bar{\nu}(0)=\bar{\nu}_0,\Phi_1+\Phi_2\bar{\nu}_0\geq 0$, определяется равенством

$$\bar{\nu}=\frac{\left(\frac{\Phi_2 z}{2}\mp\sqrt{\Phi_1+\Phi_2\bar{\nu}'_0}\right)^2-\Phi_1}{\Phi_2}.$$

Система уравнений (6), (9) относится к упругому кручению для малой $\tilde{\nu}$ и однородной диссипативной динамикой $\bar{\nu}$ вдоль оси кручения. Уравнения (12), (13) описывают движение большой $\tilde{\nu}$ слабо диссипативной динамики и малой $\bar{\nu}$, квадратично изменяющейся вдоль стержня.

Согласно [1], крутильная жесткость C при модуле сдвига μ определяется равенством

$$C=4\iint_D\mu(\nabla\tilde{\nu})^2dxdy, \tag{14}$$

где D – область пластического деформирования. Учитывая определение вектора Бюргерса

$$|\vec{b}|=\iint_D\tilde{\nu}dxdy$$

в [1], имеем упругую C либо вязкую $\tilde{C}$ крутильную жесткость в линейном по $\tilde{\nu}$ приближении:

$$C=\frac{\mu\pi R^4}{2},\quad \tilde{C}=\frac{bG/a_\delta-a_M}{S}|\vec{b}|.$$

Момент кручения $M=\tau C$ при постоянном τ будет определять упругое либо вязкое кручение. В общем случае крутильная жесткость C из (14) определяется на основе уравнения (12).

Сформулируем итог приведённых выкладок как пространственно-локальный аналог диссипативной теоремы Зельдовича. Если в точке переключения

$\nu_\delta = a_M(\nu)b^{-1}$, $\nu = \overline{\nu} + \tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}|_S \neq 0$, $\overline{\nu}(z_0) \neq 0$, то стационарное трехмерное уравнение квазилинейной диффузии (2) при $\nu \approx \nu_\text{к}$, $\tilde{\nu} >> \overline{\nu}$ сводится к системе из дифференциального уравнения первого порядка в частных производных (12) и из обыкновенного дифференциального уравнения (13), а при $\tilde{\nu} < \overline{\nu} < \nu_\text{к}$ сводится к системе, состоящей из дифференциального уравнения второго порядка (6) в частных производных и обыкновенного дифференциального уравнения (9).

Уравнение (12) имеет левую часть, совпадающую с левой частью известного уравнения эйконала Гамильтона-Якоби, но полученного из диссипативной модели механики дислокаций. По этой причине уравнение (12) можно называть уравнением стационарных диссипативных структур.

Известно, что сильный упругий изгиб ζ плоской пластины и компоненты смещений при растяжении u_x, u_y связаны соотношениями [1]

$$E\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right)^2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \tag{15}$$

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \sigma_{xy}. \tag{16}$$

Если задана внешняя сила P при пренебрежимо малой цилиндрической жесткости ($\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ - компоненты тензора напряжений; σ - коэффициент Пуассона; E - модуль упругости) при

$$\beta\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \tag{17}$$

где β – постоянная, имеем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 = \frac{2P_{xy}(1+\sigma)\sigma_{xx}}{\beta E P_{xx}}, \tag{18}$$

где P_{xy}, P_{xx} – компоненты внешней силы P, рассматриваемой как тензор.

Допустим, что при увеличении упругой деформации выше пороговой начинается пластическая деформация, пропорциональная скалярной плотности дислокаций ν, модулю вектора Бюргерса $|\vec{b}| = b$ и соответствующим длинам скольжения l_1 и l_2 :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \nu b(l_1 + l_2). \tag{19}$$

Прогиб кристалла ζ можно ввести с помощью стенки краевых дислокаций [5] через угол φ разворота соседних кристаллов

$$\frac{b}{2\zeta} = \varphi, \tag{20}$$

где $\zeta = 0{,}5h^*_{\min}$ ($h^*_{\min}$ – минимальное расстояние между дислокациями в стенке на границе соседних кристаллов). Таким образом, кристаллическая пластина толщиной $0{,}5h^*_{\min}$ получает прогиб ζ. В теории слабого изгиба тонких пластин имеется иное приближение $h >> \zeta$ [1].

Также будем считать, что в рамках принятых приближений

$$\frac{\varphi}{bd} = \nu, \tag{21}$$

где d - расстояние между стенками в изогнутом кристалле.

Если следовать приближению $\bar{l} >> \zeta$ [1] ($\bar{l}$ - длина пластины), то для выполнения линейности в определении деформации и упругости должно выполняться соотношение $\bar{l}d >> 1/\nu$. Для диапазона изменения ν в пределах от 10^6 до $10^{12} cm^{-2}$ и $\bar{l}$ в пределах от 10^{-3} до 10 cm реально наблюдается диапазон изменения d в пределах от 10^{-6}до 10 cm.

Так как при диффузионной ползучести наблюдаются дислокационные стенки, то воспользуемся их известным выражением при растяжении из [9]:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \sigma_{xx} \frac{\overline{D}\overline{C}^3}{d^2 kT}, \tag{22}$$

где $\overline{D}, \overline{C}, k, T$ – постоянные величины; $\dot{\varepsilon}_{xx}$- скорость ползучести. Уравнение (22) в совокупности с предположением (17) характеризуют свойство модели, которое назовем одномерным растяжением.

В силу (19) естественно записать $\varepsilon_{xx} = \nu b l_3,$ где l_3 - длина пути скольжения дислокации при растяжении вдоль оси OX. Тогда скорость деформации вдоль оси OX примет вид

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\nu} b l_3 + \nu b \nu_x, \tag{23}$$

где ν_x считаем известной постоянной величиной. При более детальном анализе ν_x может быть неизвестной функцией, определяемой из некоторого уравнения.

Подставляя в (18) выражения (20), (21) и (23), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{a_1}{\nu^4}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + f(\nu) = 0, \tag{24}$$

где $f(\nu) = a_2 \nu$, a_1 и a_2 – положительные постоянные.

Диссипативный характер (24) следует из диссипативного выражения (22), причем в постоянные a_1 и a_2 входят температурные множители D/kT. При сильном растяжении внешними растягивающими силами тонкую пластинку обычно называют мембраной. Если пренебречь дополнительным продольным растяжением при сильном изгибе, то уравнение равновесия мембраны имеет вид [1]

$$h\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + P = 0, \tag{25}$$

где h – толщина пластинки, $\sigma_{\alpha\beta}$ - тензор напряжения. В нелинейной постановке изгиб мембраны ζ при $h\sigma_{\alpha\beta} = 1$ описывается уравнением, подобным (25), следующего вида:

$$-\frac{\partial}{\partial x} a_1(x, y, \zeta, \zeta'_x) - \frac{\partial}{\partial y} a_2(x, y, \zeta, \zeta'_y) = -P(x, y, \zeta) - q(x, y), \tag{26}$$

$$\zeta(x, y)|_\Gamma = 0, \tag{27}$$

где $q(x, y)$ – реакция препятствия; $(x, y) \in G \subset R^2$, G - ограниченная измеримая область.

Из изложенного следует, что множество математических моделей, возникающих в классической механике дислокаций, весьма многообразно, поэтому универсального метода для изучения всего множества этих задач не существует. В данной работе приводятся два метода исследования отдельных классов задач механики дислокаций.

Метод операторов монотонного типа

Пусть X - рефлексивное банахово пространство, X^* - его сопряженное, причем X и X^* - считаем строго выпуклыми пространствами, $\langle y, x \rangle$ при $y \in X^*, x \in X$ есть отношение двойственности между пространствами X и X^*. Если $X = H$ - гильбертово пространство, то $\langle y,x\rangle=(y,x)$, где (y,x) – скалярное произведение элементов y и x из H. В наших условиях на X определен однозначный оператор $J^s : X \to X^*$ с $s>1$ такой, что

$$\left\|J^s x\right\|=\|x\|^{s-1},\ \langle J^s x,x\rangle=\|x\|^s \quad \forall x\in X. \tag{28}$$

Оператор J^s называется дуальным отображением с масштабной функцией $\mu(t)=t^{s-1}$. При $s=2$ для J^s используют обозначение J и называют его дуальным отображением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $A: X\to X^*$ называется монотонным, если

$$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\ge 0 \quad \forall x\in X,\quad \forall y\in X. \tag{29}$$

Если равенство в (29) имеет место только при $x=y$, то оператор A называется строго монотонным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $A: X\to X^*$ называется равномерно монотонным, если

$$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\ge \varphi(\|x-y\|) \quad \forall x\in X,\quad \forall y\in X,$$

где $\varphi(0)=0,\ \varphi(s)$ - возрастающая функция при $s\ge 0.$

Если $\varphi(s)=cs^2$ с постоянной $c>0,$ то A называется сильно монотонным оператором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор $A: X\to X$ называется аккретивным, если

$$\langle J(x-y),Ax-Ay\rangle\ge 0 \quad \forall x\in X,\quad \forall y\in X. \tag{30}$$

Подобно монотонному случаю вводятся понятия строго, равномерно и сильно аккретивных операторов.

При исследовании сходимости приближенных методов решения уравнений с монотонными и аккретивными операторами различные авторы пришли к необходимости введения следующих понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор $A: H\to H$ называется обратным сильно монотонным, если

$$(Ax-Ay,x-y)\ge M\|Ax-Ay\|^2,\quad M>0 \quad \forall x\in X,\quad \forall y\in X. \tag{31}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Оператор $A: X\to X$ называется обратным сильно псевдоаккретивным, если при $s>1$

$$\langle J^s(x-y),Ax-Ay\rangle\ge M^{s-1}\|Ax-Ay\|^s,\quad M>0 \quad \forall x\in X,\quad \forall y\in X. \tag{32}$$

Существование и единственность решений нелинейных уравнений с монотонными и аккретивными операторами, а также некоторые приближённые методы решения таких уравнений, включая методы регуляризации, изучались, например, в [10 - 13].

В приведённых уравнениях динамики скалярной плотности дислокации использован нелинейный оператор (см., например, (9))

$$Au=\begin{cases}\dfrac{u(x)}{b_1+b_2u(x)}, & u(x)\ge 0,\\ 0, & u(x)<0,\end{cases} \tag{33}$$

где $b_1,\ b_2$ - положительные постоянные; $u(x)$ - функция переменной $x,\ x\in[a,b].$ Поскольку $|Au(x)|\le|u(x)|$ при всех $u(x)\ge 0,\ x\in[a,b],$ то $A: X\to X,$ причем X может быть как банаховым пространством $L^p[a,b],\ p>1,$ так и гильбертовым $H=L^2[a,b]$ (см., например, [14, 10]). Так как в $L^2[a,b]$ $(u,v)=\int_a^b u(x)v(x)dx,$ то в силу неубывания Au по u делаем вывод о монотонности оператора $A: L^2[a,b]\to L^2[a,b]$ (см. примеры в [11]).

Пусть теперь $X=L^p[a,b]$ и $p>1,$ тогда A действует из X в X. Покажем справедливость свойства (32) для оператора A, определяемого формулой (33), при $s = p$. Для этого достаточно установить неравенство

$$\|Au - Av\|^p = \langle J^p(Au - Av), Au - Av\rangle \le \frac{1}{M^{p-1}} \langle J^p(u - v), Au - Av\rangle \tag{34}$$

при некотором $M > 0$. Отметим, что $J^p u = |u(x)|^{p-2} u(x)$ (см. [12, 13]). Если $u(x) \le 0, v(x) \le 0$ при всех $x \in [a,b]$, то (34), очевидно, верно при любом $M > 0$. Пусть теперь $u(x) \ge 0, v(x) \le 0$, тогда

$$\|Au - Av\|^p = \|Au\|^p = \langle J^p(Au), Au\rangle =$$

$$= \int_a^b \left|\frac{u(x)}{b_1 + b_2 u(x)}\right|^{p-2} \left(\frac{u(x)}{b_1 + b_2 u(x)}\right)^2 dx \le \frac{1}{b_1^{p-1}} \int_a^b u^{p-2}(x) \frac{u^2(x)}{b_1 + b_2 u(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{b_1^{p-1}} \langle J^p u, Au\rangle \le \frac{1}{b_1^{p-1}} \langle J^p(u - v), Au - Av\rangle,$$

т.е. неравенство (34) верно при $M = b_1$. Если $u(x) \ge 0, v(x) \ge 0$, то

$$|Au(x) - Av(x)| = \frac{b_1 |u(x) - v(x)|}{[b_1 + b_2 u(x)][b_1 + b_2 v(x)]} \le \frac{|u(x) - v(x)|}{b_1},$$

$$|Au(x) - Av(x)|^2 \le \frac{1}{b_1} [u(x) - v(x)][Au(x) - Av(x)].$$

Следовательно,

$$\langle J^p(Au - Av), Au - Av\rangle = \int_a^b |Au(x) - Av(x)|^{p-2} (Au(x) - Av(x))^2 dx \le$$

$$\le \frac{1}{b_1^{p-1}} \int_a^b |u(x) - v(x)|^{p-2} [u(x) - v(x)][Au(x) - Av(x)] dx = \frac{1}{b_1^{p-1}} \langle J^p(u - v), Au - Av\rangle.$$

Таким образом, свойство (32) при $c = b_1$ имеет место для рассматриваемого оператора A.

Заметим, что из (32) вытекает аккретивность оператора A, но, как нетрудно видеть, свойством равномерной аккретивности оператор A не обладает.

Обратимся к задаче (26), (27). Покажем, что при определённых условиях на функции $a_1(x, y, \chi)$, $a_2(x, y, \chi)$ и $P(x, y, \chi)$ она входит в класс задач с монотонными операторами.

Пусть функции $a_i(x, y, \chi)$, $i = 1,2$, $P(x, y, \chi)$ измеримы по $(x, y) \in G$ при всех $\chi \in R^1$, непрерывны и не убывают по χ при почти всех $(x, y) \in G$, причем

$$|a_i(x, y, \chi)| \le c_i \left[g_i(x, y) + |\chi|^{p-1}\right], \ i = 1,2, \quad |P(x, y, \chi| \le c_3 \left[g_3(x, y) + |\chi|^{p-1}\right], \tag{35}$$

где $c_i > 0$, $g_i(x, y) \in L^q(G)$, $q = p/(p-1)$, $p > 1$, $i = \overline{1,3}$.

Введем пространство $X = \{\chi \mid \chi = \chi(x, y) \in W_1^p(G),\ (x, y) \in G,\ \chi(x, y)|_\Gamma = 0\}$

с нормой $\|\chi\| = \left(\iint_G \left[|\chi'_x(x, y)|^p + |\chi'_x(x, y)|^p \right] dxdy \right)^{1/p}$ и определим оператор A:

$$\langle A\chi,\eta\rangle = \iint\limits_G \left[a_1(x,y,\chi'_x)\eta'_x + a_2(x,y,\chi'_y)\eta'_y + P(x,y,\chi)\eta\right]dxdy \quad \forall\chi,\eta\in X.$$

Из условий (35) вытекает, что однозначный оператор A действует из X в X^* (см. [1, 5]), неубывание функций $a_1(x,y,\chi)$, $a_2(x,y,\chi)$ и $P(x,y,\chi)$ по χ обеспечивает монотонность оператора A (см. [11]). Таким образом, задача (26), (27) может быть изучена с помощью теории монотонных операторов.

Метод дополнительного аргумента

Разработано несколько разных методов для исследования разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Например, всем известный классический метод характеристик, метод Галеркина, метод потоков. Как и любой метод, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Нельзя выделить какой-либо метод, позволяющий решать любые дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Каждый из известных методов хорошо применим только к определенному классу уравнений. Если, например, обратиться к тому же самому методу характеристик, то оказывается, что он с успехом применяется лишь в случае, когда коэффициенты перед производными не содержат неизвестных функций. А для систем квазилинейных дифференциальных уравнений реально его применять довольно сложно. В первую очередь, это связано с тем, что при применении метода характеристик для таких уравнений в соответствующем интегральном уравнении появляется суперпозиция неизвестных функций. Далее, в методе характеристик условием разрешимости исходной задачи является условие существования обратной функции для решения характеристического уравнения. Нахождение обратной функции является очень не простой задачей.

Рассмотрим, для примера, задачу Коши

$$\partial_t u(t,x) + a(t,x,u(t,x))\partial_x u(t,x) = f(t,x,u(t,x)),\ x\in(-\infty,\infty),\ t\in[0,T_*],\ T_*=\text{const}, \tag{34}$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty. \tag{35}$$

Применяя метод характеристик, мы приходим к следующий системе уравнений

$$\frac{d\eta(s)}{ds} = a(s,\eta(s),u(s,\eta(s))), \tag{36}$$

$$\frac{du(s,\eta(s))}{ds} = f(s,\eta(s),u(s,\eta(s))). \tag{37}$$

В рамках классического метода характеристик исследование системы (36), (37) сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где всегда реально присутствует суперпозиция неизвестных функций, не всегда, правда, явно выписываемая. И найдя решение в характеристических переменных, для получения решения исходной задачи (1), (2) требуется перейти от характеристических переменных к переменным *(t,x)*. Последняя задача во многих случаях бывает настолько сложной, что её не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия.

Для преодоления отмеченных трудностей рассмотрим для задачи (34), (35), вместо характеристической системы (36), (37), «расширенную» характеристическую систему вида

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = a(s,\eta(s,t,x),w(s,t,x)), \tag{38}$$

$$\frac{dw(s,t,x)}{ds} = f(s,\eta(s,t,x),w(s,t,x)), \tag{39}$$

с дополнительными условиями

$$\eta(t,t,x) = x, \tag{40}$$

$$w(0,t,w) = \varphi(\eta(0,t,x)),\ -\infty < x < \infty. \tag{41}$$

Таким образом, решение уравнений (38), (39) с условиями (40), (41) будет зависеть от s, t, и x, где t и x - это исходные независимые переменные, а s – дополнительный аргумент.

Отличительной особенностью задачи (38) – (41), которая составляет основу метода дополнительного аргумента, является то, что функция $u(t,x) = w(t,t,x)$ на интервале своего существования представляет собой решение задачи (1), (2) в исходных переменных.

Для доказательства этого факта перейдем от задачи (38) – (41) к соответствующей системе интегральных уравнений

$$\eta(s,t,x) = x - \int_s^t a(\nu, \eta(\nu,t,x), w(\nu,t,x))d\nu, \tag{42}$$

$$w(s,t,x)) = \varphi(x - \int_0^t a(\nu, \eta(\nu,t,x), w(\nu,t,x))d\nu) + \int_0^s f(\tau, \eta(\tau,t,x), w(\tau,t,x))d\tau. \tag{43}$$

Продифференцировав уравнения (42), (43) по t и x и, составив систему уравнений относительно выражений $\frac{\partial\eta(s,t,x)}{\partial t} + a(t,x,w(t,t,x))\frac{\partial\eta(s,t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial w(s,t,x)}{\partial t} + a(t,x,w(t,t,x))\frac{\partial w(s,t,x)}{\partial x}$, получим, что на интервале существования решения задачи (38) – (41) эти выражения должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial\eta(s,t,x)}{\partial t} + a(t,x,w(t,t,x))\frac{\partial\eta(s,t,x)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(s,t,x)}{\partial t} + a(t,x,w(t,t,x))\frac{\partial w(s,t,x)}{\partial x} = 0.$$

С учетом этих равенств и уравнения (39) для $u(t,x) = w(t,t,x)$ тогда будем иметь

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial w(s,t,x)}{\partial s}\Big/_{s=t} + \frac{\partial w(s,t,x)}{\partial t}\Big/_{s=t} + a(t,x,w(t,t,x))\frac{\partial w(s,t,x)}{\partial x}\Big/_{s=t} = f(t,x,w(t,t,x)).$$

Равенство (35) следует из (43) при $s = t = 0$.

Система интегральных уравнений (42), (43) достаточно удобна для исследований. В частности, с помощью метода последовательных приближений для неё можно доказать существование локального ограниченного на всей оси решения, выяснить условия существования глобального решения или установить другие свойства решений. Также систему уравнений (42), (43) можно использовать для нахождения численного решения исходной задачи, в частности, на основе метода последовательных приближений.

Основы метода дополнительного аргумента были заложены в работах [15–19]. С тех пор с его помощью исследованы многие задачи для уравнений с частными производными первого порядка. Например, в работе [20] с помощью метода дополнительного установлены условия нелокальной разрешимости для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени, а в работе [21] найдены условия нелокальной разрешимости нелинейного уравнения с частными производными первого порядка.

Применим метод дополнительного аргумента для исследования разрешимости нелинейного уравнения (24). Так как для уравнений первого порядка определение условий, при которых его решение не выходит из заданного интервала, составляет отдельную задачу, примем, что $x \in R^1$. Соответственно зададим для уравнения (24) начальное условие на всей оси

$$\nu(0,x) = \varphi(x), \quad x \in R^1. \tag{44}$$

В соответствии с изложенной в [21] схемой вначале преобразуем (24), (44) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (24) по x и, введя новую неизвестную функцию $p(t,x) = \partial_x \nu(t,x)$, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{2\delta}{\nu^4}p\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{4\delta}{\nu^5}p^3-Ap. \qquad (45)$$

Из (44) естественным образом следует начальное условие для p:

$$p(0,x)=\varphi'(x), \quad x\in R^1. \qquad (46)$$

Из (24) «сконструируем» ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором

$$\frac{\partial \nu}{\partial t}-\frac{2\delta}{\nu^4}p\frac{\partial \nu}{\partial x}=-\frac{\delta}{\nu^4}p^2-A\nu. \qquad (47)$$

Составим для задачи (44) – (47) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds}=-\frac{2\delta}{w_0^4(s,t,x)}w_1(s,t,x), \qquad \eta(t,t,x)=x, \qquad (48)$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds}=-\frac{4\delta}{w_0^5(s,t,x)}w_1^3(s,t,x)-Aw_1(s,t,x), \qquad w_1(0,t,x)=\varphi'(\eta(0,t,x)), \qquad (49)$$

$$\frac{dw_0}{ds}=-Aw_0(s,t,x)-\frac{\delta}{w_0^4(s,t,x)}w_1^2(s,t,x), \qquad w_0(0,t,x)=\varphi(\eta(0,t,x)). \qquad (50)$$

Принципиальной особенностью задачи Коши (48)–(50) является то, что функции $p(t,x)=w_1(t,t,x)$ и $\nu(t,x)=w_0(t,t,x)$ будут удовлетворять соответственно уравнениям (45), (47), а также начальным условиям (44), (46). Тем самым функция $\nu(t,x)=w_0(t,t,x)$ даст решение исходной задачи Коши (24), (44) в исходных координатах.

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, выведем уравнение для $v(s,t,x)=\dfrac{w_1(s,t,x)}{w_0^4(s,t,x)}$:

В результате приходим к задаче Коши:

$$\frac{dv}{ds}=3Av, \qquad v(0,t,x)=\varphi_0(\eta(0,t,x))=\frac{\varphi'(\eta(0,t,x))}{\varphi^4(\eta(0,t,x))}. \qquad (51)$$

Задача Коши (50) перепишется в виде

$$\frac{dw_0}{ds}=-Aw_0-\delta v^2 w_0^4, \qquad w_0(0,t,x)=\varphi(\eta(0,t,x)), \qquad (52)$$

а решение задачи Коши (48) будет определяться формулой

$$\eta(s,t,x)=x+2\delta\int_0^t v(\tau,t,x)d\tau, \qquad (53)$$

Для нахождения функции $v(s,t,x)$ получим уравнение

$$v(s,t,x)=\varphi_0(x+2\delta\int_0^t v(\tau,t,x)d\tau)e^{3As}. \qquad (54)$$

Таким образом, задача нахождения решения расширенной характеристической системы (48), (49), (50) свелась к последовательному решению нелинейного интегрального уравнения (54) и задачи Коши (52), которая также сводится к нелинейному интегральному уравнению.

Существование достаточно гладких решений соответствующих интегральных уравнений может быть доказано с помощью метода последовательных приближений. Функция $w_1 = \nu w_0^4$ будет удовлетворять задаче Коши (49). Также с помощью метода последовательных приближений могут быть найдены приближенные решения построенных интегральных уравнений и, следовательно, построено решение исходной задачи.

Не углубляясь дальше в подробности, резюмируем, что решение задачи Коши (24), (44) может быть получено с помощью метода дополнительного аргумента. Заключаем, что метод монотонных операторов и метод дополнительного аргумента представляют собой эффективный аппарат для исследования некоторых задач динамики скалярной плотности дислокаций.

Библиографический список

1. **Ландау, Л.Д.** Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука. 1987. – 245 с.
2. **Кадич, А.** Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций / А. Кадич, Д. Эделен. – М.: Мир, 1987. – 168 с.
3. **Олемской, А.И.** Перестройка конденсированного состояния атомов в условиях интенсивного внешнего воздействия / А.И. Олемской, В.А.Петрунин // Изв. вузов. Сер. Физика. 1987. № 1. С. 82–121.
4. **Фридель Ж.** Дислокации / Ж. Фридель. – М.: Мир. 1967. – 643 с.
5. **Косевич, Д.М**. Основы механики кристаллической решетки / Д.М. Косевич. – М.: Наука. 1972. – 200 с.
6. **Зельдович, Я.Б.** Предельный закон теплопередачи во внутренней задаче при малых скоростях // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. Вып. 12. С. 1466–1468.
7. **Таланов, В.И**. Стимулированная диффузия и кооперативные эффекты в распределенных кинетических системах // Нелинейные волны: сб. ст. – М.: Наука. 1983. С. 47–56.
8. Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении / П.Л. Крупкин [и др.] // ФММ. 1988. Т. 66. Вып. 5. С. 978– 84.
9. Физическое металловедение / под ред. Р.Кана. – 3-е изд. – М.: Мир. 1968. – 484 с.
10. **Вайнберг, М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
11. **Гаевский, Х.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К.Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
12. **Alber, Ya.** Nonlinear ill-posed problems of monotone type / Ya.Alber, I. Ryazantseva. – Dortrecht: Springer, 2006. – 410 p.
13. **Рязанцева, И.П.** Избранные главы теории операторов монотонного типа / И.П. Рязанцева. – Нижний Новгород: НГТУ, 2008. – 273 с.
14. **Вайнберг, М.М.** Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М.М. Вайнберг. – М.: Гостехиздат, 1956. – 345 с.
15. **Иманалиев, М.И.** К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. АН. 1992. Т. 323. №3. С. 410–414.
16. **Иманалиев, М.И.** К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. АН. 1992. Т. 325. №6. С. 1111–1115.
17. **Иманалиев, М.И.** К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. АН. 1993. Т.329. №5. С. 543–546.
18. **Иманалиев, М.И.** К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. РАН. 2001. Т. 379. №1. С. 16–21.
19. **Иманалиев, М.И.** Метод дополнительного аргумента / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, С.Н. Алексеенко // Вестник Казахского нац. университета. Сер. Матем., механика, информ. 2006. № 1. С. 60–64.
20. **Алексеенко, С.Н.** Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокаль-

ной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени / С.Н. Алексеенко, Е.А. Елькина // Труды НГТУ им. Р.Е.Алексеева. 2011. № 2(87). С. 320–329.
21. **Алексеенко, С.Н.** Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур / С.Н. Алексеенко, С.Н. Нагорных, Е.А. Елькина // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2012. №1. Ч. 1. С. 122–128.

Дата поступления
в редакцию 11.12.2014

S.N. Alekseenko, S.N. Nagornikh, I.P. Ryazantseva

ON THE MATHEMATICAL MODELS OF THE NEWTONIAN DYNAMICS FOR THE SCALAR DENSITY OF DISLOCATIONS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

This paper presents some mathematical models, describing the dynamics of the scalar density of dislocations, also there is substantiated the possibility of the study of some classes of such problems by the methods of the monotone type operators and by the method of an additional argument.

Key words: scalar density of dislocations, theory of operators of monotone type, method of an additional argument.