

УДК 523.42-852

К.Г. Петров,<sup>1</sup> О.Н. Савина<sup>2</sup>**АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ СО СКАЧКОМ ТЕМПЕРАТУРЫ**Нижегородский государственный университет им. Р.Е. Алексеева<sup>1</sup>,  
НИУ Высшая школа экономики, Н. Новгород<sup>2</sup>

Получено характеристическое уравнение для акустико-гравитационных волн в атмосфере со скачком температуры. Определены горизонтальные масштабы и частоты собственных мод в атмосферном волноводе, между жесткой нижней границей и свободной верхней границей. Проанализирован аджастмент эффект, обусловленный наличием в атмосфере резкого скачка температуры. В рамках численного счета конкретизированы параметры собственных колебаний для модели солнечной атмосферы.

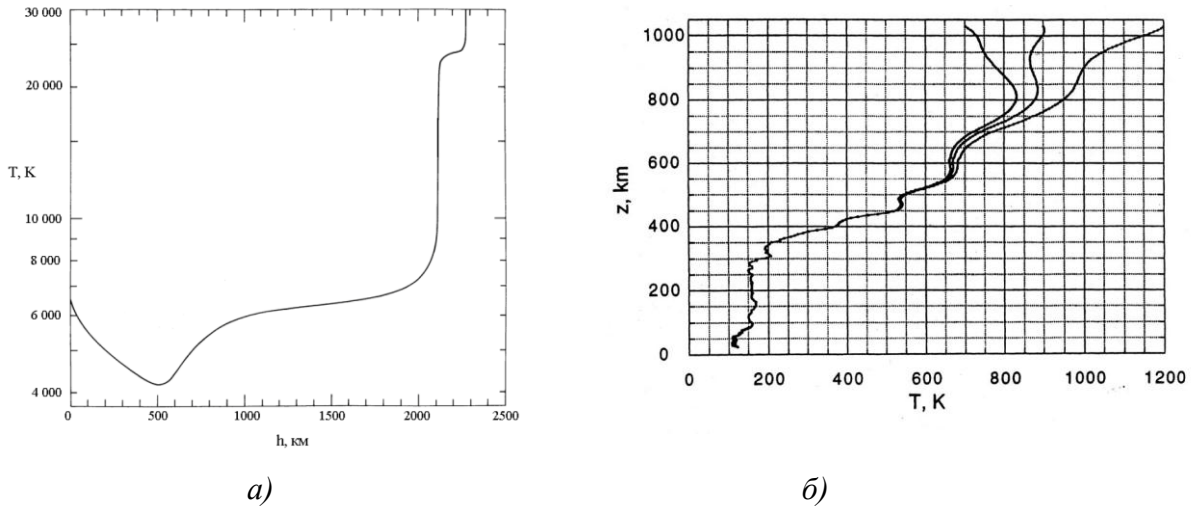
*Ключевые слова:* атмосфера, неизотермичность, волновые процессы, собственные колебания.

**Введение**

Задача о распространении акустико-гравитационных волн в атмосфере с реалистичским профилем температуры обычно решается с помощью нескольких взаимодополняющих методов. В настоящее время много работ посвящено обсуждению результатов продвинутых численных расчетов, авторы которых уделяют большое внимание как можно более полному учету различных атмосферных обстоятельств путем включения их в решаемые уравнения (см., например, [1, 2]). Такой подход, с одной стороны, весьма эффективен, так как дает возможность получить некие картины волновых полей. Однако, с другой стороны, требуется кропотливая работа по морфологии полученных результатов численных расчетов, а для придания результатам доказательной убедительности нужны какие-то дополнительные тесты. Аналитический подход к решению рассматриваемых задач разрабатывался многими авторами с середины прошлого века [3]. Весьма эффективным оказался подход, основанный на использовании различных модельных высотных профилей температуры (см., например, [4, 5]). Простые аналитические модели профилей температуры позволяют получить точные решения для полей акустико-гравитационных волн в атмосфере и провести их последующий анализ [6]. Еще одна модель была применена авторами работы [7], в которой аналитически было показано существование поверхностных волн на скачке температуры в переходной области солнечной атмосферы.

Высотный профиль температуры солнечной атмосферы представлен на рис. 1, а. Современные экспериментальные исследования свойств атмосфер планет с помощью космических аппаратов показали наличие температурного скачка в атмосфере Юпитера. На рис. 1, б представлены характерные профили температуры атмосферы Юпитера, которые для масштабов, превосходящих размеры переходного слоя, можно аппроксимировать, используя модель из двух слоев с постоянной температурой без разрыва плотности на границе.

В данной работе рассматривается модель атмосферы со скачком температуры. Анализируются общие свойства полей акустико-гравитационных волн, следующие из выведенного характеристического уравнения. Основное внимание уделяется рассмотрению собственных колебаний атмосферы. Показано, что в выбранной модели собственные колебания с параметрами, зависящими только от вертикальной координаты, отсутствуют. Ранее это утверждение было получено для модели с разрывом плотности [3] и при анализе свойств поверхностных волн в задаче с разрывом плотности при анализе свойств поверхностных волн [5].



**Рис. 1. Высотный профиль температуры:**  
*a* – солнечной атмосферы [8]; *б* – в атмосфере Юпитера [9]

**Характеристическое уравнение для модельной задачи о волновых процессах со скачком температуры**

2

Возьмем за основу модельный профиль атмосферной температуры, состоящий из двух изотермических слоев с различными, меняющимися скачком значениями температуры с жесткой нижней границей (рис. 2). Тогда решение для вертикальной скорости среды  $w_1$  в нижнем слое (индекс 1) можно представить в виде  $w_1 = (A \cdot e^{-ik_{z1}z} + B e^{ik_{z1}z}) e^{-i\omega t + ik_x x + z/2H_1}$ , а в верхней области (индекс 2) в виде  $w_2 = D e^{ik_{z2}z} e^{-i\omega t + ik_x x + z/2H_2}$ . Здесь  $A, B, D$  - постоянные, значения которых определяются граничными условиями;  $\omega$  - частота волны;  $k_x, k_z$  - горизонтальная и вертикальная компоненты волнового вектора соответственно;  $H$  - высота однородной атмосферы. Ось  $z$  направлена вертикально вверх, координата  $z$  отсчитывается от области перепада температуры.

Воспользовавшись известным дисперсионным соотношением для акустико-гравитационных волн в изотермической атмосфере, запишем выражение для  $k_z$  для изотермического слоя

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_A^2}{c^2} - \frac{(\omega^2 - \omega_g^2)k_x^2}{\omega^2}}. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу о нахождении собственных частот колебаний для выбранной модели атмосферы. В этом случае поля возмущений должны соответствовать нулевому среднему вертикальному потоку энергии. Поэтому в верхней среде решение представляет собой прижатую к верхней границе волну, т.е. должно быть выполнено условие  $k_{z2} = -ik_2$ , ( $k_2$  - действительны). Запишем характеристическое уравнение для акустико-гравитационных волн в атмосфере со скачком температуры. Для этого мы воспользуемся граничными условиями: потребуем равенство нулю вертикальной скорости на жесткой нижней границе и ее непрерывность на границе между двумя температурными областями.

Условие на нижней границе при  $z = -l$  дает

$$B = -A e^{2ik_z l}. \tag{2}$$

На границе  $z = 0$  выполняется условие непрерывности вертикальной скорости:

$$w_1 = w_2. \tag{3}$$

Граничное условие (3) позволяет определить связь между коэффициентами  $D$  и  $A$

$$D = A(1 - e^{2ik_z l}). \tag{4}$$

Воспользовавшись условием равенства давлений на границе  $z = 0$ , мы получаем

$$p_1 = p_2 + g(\rho_{01} - \rho_{02}) \frac{iw_2}{\omega}. \quad (5)$$

Примем во внимание известное соотношение, связывающее возмущение давления  $p$  и вертикальной компоненты скорости  $w$ :

$$p = \frac{\omega \rho_0}{i(\omega^2 - c^2 k_x^2)} \left( c^2 \frac{\partial w}{\partial z} - gw \right). \quad (6)$$

Запишем теперь характеристическое уравнение. Для этого, используя соотношения (2) и (4), подставим выражение (6) для каждого из изотермических слоев в соотношение (5):

$$\begin{aligned} & \frac{\omega \rho_{01}}{i(\omega^2 - c_1^2 k_x^2)} \left\{ \left[ c_1^2 \left( -ik_{z1} + \frac{1}{2H_1} \right) - g \right] A + \left[ c_1^2 \left( ik_{z1} + \frac{1}{2H_1} \right) - g \right] B \right\} = \\ & = \frac{\omega \rho_{02}}{i(\omega^2 - c_2^2 k_x^2)} \left[ c_2^2 \left( ik_{z2} + \frac{1}{2H_2} \right) - g \right] D + g(\rho_{01} - \rho_{02}) \frac{iD}{\omega}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\rho_0$  - равновесная плотность среды;  $g$  - ускорение силы тяжести;  $c$  - скорость звука; индексы  $1, 2$  относятся к нижней и верхней среде соответственно. После подстановки в (7) постоянных  $B, D$  получаем характеристическое уравнение для акустико-гравитационных волн в атмосфере со скачком температуры

$$\frac{k_{z1} \gamma H_1 \operatorname{ctg}(k_{z1} l) + \frac{\gamma}{2} - 1}{(\omega^2 - c_1^2 k_x^2)} = \frac{R \left( ik_{z2} \gamma H_2 + \frac{\gamma}{2} - 1 \right)}{(\omega^2 - c_2^2 k_x^2)} + \frac{1 - R}{\omega^2}, \quad (8)$$

где  $R = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$ . Если воспользоваться соотношением (1), то формулу (8) можно записать в более удобном виде

$$\frac{K_1}{\rho_{01} c_1^2 (\omega_{g1}^2 - \omega^2)} \left( 1 + \frac{g^2 \Delta \rho \gamma K_2}{\rho_{02} c_2^2 (\omega_{g2}^2 - \omega^2)} \right) = \frac{K_2 \left( \frac{2 - \gamma}{2\gamma} - k_{z1} H_1 \operatorname{ctg}(k_{z1} l) \right)}{\rho_{02} c_2^2 (\omega_{g2}^2 - \omega^2) \left( \frac{2 - \gamma}{2\gamma} - ik_{z1} H_1 \right)}, \quad (9)$$

где  $K_1 = \frac{2 - \gamma}{2\gamma} + ik_{z1} H_1$ ,  $K_2 = \frac{2 - \gamma}{2\gamma} + ik_{z2} H_2$ .

Характеристическое уравнение (9) при  $l \rightarrow \infty$  и комплексных значениях  $k_{z1}$  переходит в уравнение, полученное в работе [7] и описывающее поверхностные волны на скачке температуры.

Для упрощения дальнейшего анализа введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\omega}{\omega_{g1}}, \omega_{g1}^2 = \frac{(\gamma - 1)g}{\gamma H_1}, \omega_{a1}^2 = \frac{\gamma g}{4H_1}, K = k_x H_1, X_1 = \kappa_1 H_1, X_2 = \kappa_2 H_2 \\ \beta &= \frac{H_2}{H_1}, \alpha = \frac{\omega_{a1}^2}{\omega_{g1}^2} = \frac{\gamma^2}{4(\gamma - 1)}, \xi = \frac{l}{H_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$X_1 = \sqrt{\frac{\alpha - \Omega^2}{4\alpha} - \frac{K^2(1 - \Omega^2)}{\Omega^2}}, \quad X_2 = \sqrt{\frac{\alpha - \beta\Omega^2}{4\alpha} - \frac{\beta K^2(1 - \beta\Omega^2)}{\Omega^2}}.$$

Тогда характеристическое уравнение переписывается в виде

$$\frac{-X_1 \operatorname{cth}(X_1 \xi) + \frac{2-\gamma}{2\gamma}}{(\Omega^2 - 4\alpha K^2)} = \frac{R \cdot (\frac{2-\gamma}{2\gamma} + X_2)}{(\Omega^2 - 4\alpha\beta K^2)} - \frac{1-R}{\gamma\Omega^2}. \quad (11)$$

Уравнение (11) по-прежнему имеет довольно сложно для общего анализа, но упрощается в приближении непрерывности плотности на уровне скачка температуры.

**Исследование характеристического уравнения в атмосфере со скачком температуры, но без скачка плотности**

Как было отмечено ранее, собственные колебания для рассматриваемой модели атмосферы возможны только, если  $X_2$  действительная величина. Последнее накладывает условия на частоту и горизонтальные масштабы рассматриваемых возмущений.

Следуя работе [7], для упрощения анализа будем полагать  $\rho_{01} = \rho_{02}$ . Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\frac{-X_1 \operatorname{cth}(X_1 \xi) + \frac{2-\gamma}{2\gamma}}{(\Omega^2 - 4\alpha K^2)} = \frac{\frac{2-\gamma}{2\gamma} + X_2}{(\Omega^2 - 4\alpha\beta K^2)}. \quad (12)$$

Если выполнено условие  $X_1 \xi \gg 1$ , то уравнение (12) переходит в уравнение для поверхностных волн на скачке температуры без учета нижней границы. В этом предельном случае уравнение имеет точное аналитическое решение

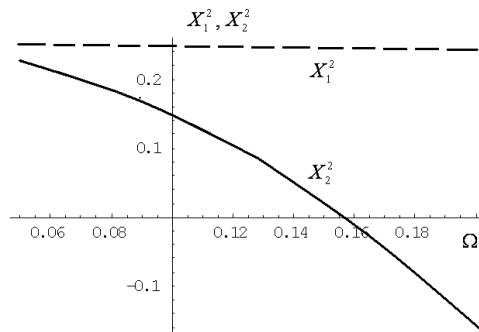
$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (13)$$

Свойства этого решения обсуждались в работе [6].

Рассмотрим частный случай вертикального распространения волн. В уравнении (12) будем считать  $K = 0$ . Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\sqrt{\alpha - \Omega^2} \cdot \operatorname{cth} \left( \xi \sqrt{\frac{\alpha - \Omega^2}{4\alpha}} \right) = -\sqrt{\alpha - \Omega^2} \beta. \quad (14)$$

Поскольку мы ищем собственные моды колебаний, в верхней среде волна должна быть прижата к границе  $z = 0$ , тогда энергия колебаний будет локализована в ограниченной области. В этом случае подкоренное выражение в правой части уравнения (14) должно быть неотрицательным, т.е.  $\Omega < \sqrt{\alpha/\beta}$ . В реальных условиях солнечной атмосферы  $\beta \gg 1$ , заведомо выполнено условие  $\Omega < \sqrt{\alpha}$ . Котангенс гиперболический при положительном аргументе имеет только положительные значения, поэтому уравнение (14) не имеет решения, и собственные решения в атмосфере с температурным профилем со скачком температуры не существуют для колебаний с  $K = 0$ .



**Рис. 2. График зависимости  $X_{1,2}^2(\Omega)$ , показывающий возможность собственных колебаний при  $X_2^2(\Omega) > 0$**

Графики на рис. 2 построены для значений  $\xi = 5$  и  $\beta = 50$ , что соответствует условиям солнечной атмосферы. Как видно из рис. 2, можно было бы ожидать собственные колебания на частоте ниже частоты  $\omega_A$  в верхней среде. В реальности свойства среды таковы, что уравнение (13) не имеет решения. Однако из этого не следует делать вывод об отсутствии собственных колебаний, возможно, в этой ситуации используемая нами модель требует уточнения.

### Собственные колебания атмосферы со скачком температуры

Рассмотрим собственные колебания атмосферы в модели со скачком температуры и без разрыва плотности. Остановимся на характеристическом уравнении (11). В приближении безграничной атмосферы это уравнение имеет точное решение (13). Как было показано в работе [7], это решение соответствует прижатой к области перепада температуры поверхностной волне, но существует она только при определенных горизонтальных масштабах возмущений  $\frac{1}{2H_2} < k_\lambda < \frac{1}{2H_1}$ . Таким образом, решение при  $k_\lambda = 0$  в приближении безграничной атмосферы не существует. Аналогичная ситуация была установлена при введении в рассмотрение нижней границы.

Наличие нижней границы приводит к существованию собственных решений в виде захваченных в образующийся между нижней жесткой границей и верхней свободной границей. Анализ выражений для  $X_1$  и  $X_2$  позволяет найти область частот и горизонтальных компонент волновых векторов, для которых одновременно выполняются условия

$$X_2^2(\Omega) > 0, X_1^2(\Omega) < 0. \quad (15)$$

Напомним, что случай, когда  $X_{1,2}^2(\Omega) > 0$  соответствует прижатой к верхней границе поверхностной волне (если одновременно выполняются условия  $X_2^2(\Omega) < 0, X_1^2(\Omega) < 0$ , то энергия в волновод не захвачена). Если справедливо условие (15), то численный анализ позволяет найти набор частот, захваченных в волновод возмущений (рис. 3).

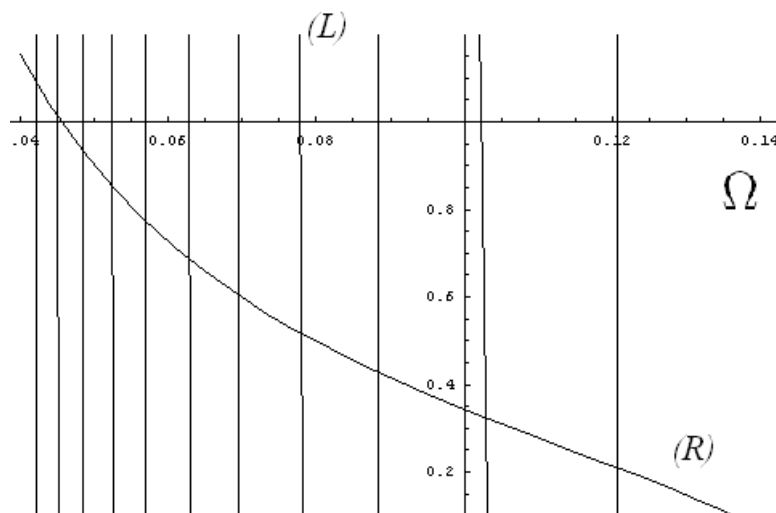


Рис. 3. Зависимость левой (L) и правой (R) части уравнения (12) от  $\Omega$

Решениям уравнения (12) соответствуют точки пересечения графиков. На рис. 3 зависимости построены при значениях  $\xi = 5$  и  $\beta = 50$ ,  $K = 0.2$ , когда выполнено условие (15). Решение уравнения (12) для тех же значений параметров  $\xi$  и  $\beta$  в области справедливости (15) представлено на рис. 4.

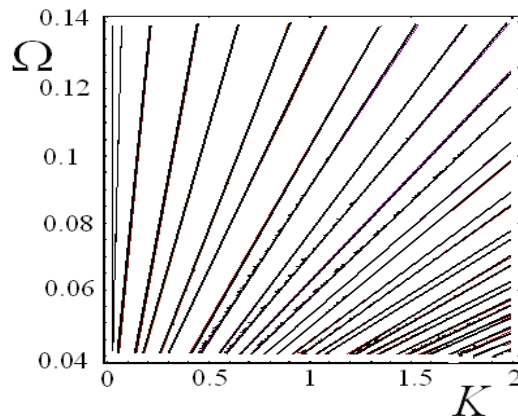


Рис. 4. Характеристические кривые для собственных мод колебаний

### Заключение

Для солнечной атмосферы большое значение представляют так называемые пятиминутные колебания, наблюдаемые как на Земле, так и с помощью космических аппаратов [10]. Важно разобраться, как локализована энергия этих колебаний, какая часть энергии выходит за пределы атмосферы. Для Солнца эти вопросы сопряжены с проблемой коронального нагрева [11].

Согласно проведенному анализу, основанному на применении аппроксимации атмосферной температуры скачком на высотах переходного слоя, параметры собственных колебаний зависят от величины перепада температур и мало зависят от расположения нижней границы (для Солнца она расположена на высоте фотосферы, значение  $l \approx 2000$  км). Частота собственных мод, бегущих горизонтально, определяется температурой сверху, и их период больше, чем на порядок, ниже 5 мин.

Вынужденные колебания (например, колебания, вызываемые конвективными движениями фотосферы), не захвачены в волновод и высвечиваются из солнечной атмосферы, если их частоты превосходят частоту  $\omega_A$  - нижнюю частоту быстрой моды акустико-гравитационных волн в хромосфере. Отметим, что резкий скачок температуры в солнечной атмосфере приводит к так называемому аджастмент эффекту, соответствующему приспособлению собственных возмущений атмосферы к внешним условиям.

*Данная работа поддержана РФФИ по проекту № 14-05-00565 а и Научным фондом НИУ ВШЭ по проекту 14-09-0170.*

### Библиографический список

1. **Gavrilov, N.M.** Three-dimensional numerical simulation of nonlinear acoustic-gravity wave propagation from the troposphere to the thermosphere / N.M. Gavrilov, S.P. Kshevetskii // *Earth, Planets and Space*, 2014. V. 66 (DOI: 10.1186/1880-5981-66-88).
2. **Lound, T.S.** Numerical simulation of gravity wave breaking in the lower thermosphere / T.S. Lound, D.C. Fritts // *J. Geophys. Res.* 2013. V.117, N D21, 105 (DOI:10.1029/2012JD017536).
3. **Госсард, Э.** Волны в атмосфере / Э. Госсард, У. Хук. – М.: Мир, 1978. – 532 с.
4. **Петрухин, Н.С.** Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Земли / Н.С. Петрухин, Е.Н. Пелиновский, Е.К. Бацина // *Письма в ЖЭТФ*. 2011. Т. 93. Вып. 10. С. 625–628.
5. **Савина, О.Н.** Поверхностные волны на перепаде атмосферной температуры // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1997. Т. 33. № 1. С. 48–52.
6. **Григорьев, Г.И.** Акустико-гравитационные волны в атмосфере с кусочно-линейным температурным профилем / Г.И. Григорьев, О.Н. Савина // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2002. Т. 45. № 8. С. 664–670.
7. **Беспалов, П.А.** Акустико-гравитационные волны вблизи скачка температуры Солнечной ат-

- мосферы / П.А. Беспалов, О.Н. Савина // Письма в астрономический журнал. 1998. Т. 24. № 1. С. 58–62.
8. **Vernazza, J.E.** Structure of the solar chromosphere.III. Models of the EUV brightness components of the quiet-sun / J.E. Vernazza, E.H. Avrett, R. Loeser // *Astrophys. J. Suppl.* 1981. V. 45. N 4. P. 635–725 (DOI:10.1086/190731).
9. Thermal structure of Jupiter’s upper atmosphere derived from the Galileo probe / A. Seiff [et al.] // *Science*. 1997. V. 276. Iss. 5309. P. 102–104.
10. **Гиббсон, Э.** Спокойное солнце / Э. Гиббсон. – М.: Мир, 1977. – 408 с.
11. **Каплан, С.А.** Физика плазмы солнечной атмосферы / С.А. Каплан, С.Б. Пикельнер, В.Н. Цытович. – М.: Наука, 1977. – 225 с.

*Дата поступления  
в редакцию 05.02.2015*

K.G. Petrov,<sup>1</sup>O.N. Savina<sup>2</sup>

## **ANALYSIS OF CHARACTERISTIC EQUATIONS FOR ACOUSTIC GRAVITY WAVES IN THE ATMOSPHERE WITH TEMPERATURE JUMP**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev<sup>1</sup>,  
National research university Higher school of economics, N. Novgorod<sup>2</sup>

**Purpose:** In this paper we study low frequency oscillation of atmosphere with temperature jump using derivation and analyze of the characteristic equation for acoustic-gravity waves.

**Method:** In this study we use methods of mathematical physics standard methods of numerical simulation.

**Results:** A characteristic equation for acoustics - gravity waves in the atmosphere with the temperature jump is obtained. Horizontal scales and frequencies of characteristic modes in atmospheric duct, between the hard bottom and the free upper boundary are shown. The adjustment effect, connected with the presence in the atmosphere of sharp temperature jump is examined. The parameters of natural oscillations for the model of solar atmosphere are numerically analyzed.

**Application domain:** The results of this work can be used for interpretation experimental data of solar atmosphere oscillation.

*Key words:* the atmosphere, nonisothermicity, wave processes, natural oscillations.