УДК 681.3.513

Е. А. Никулин

СИНТЕЗ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ МЕТОДОМ ПЕРЕКРЫТИЯ ПАРАБОЛ

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Тема работы: Разработка алгоритма построения кубических сплайнов методом перекрытия парабол.
Цель работы: Развитие матричных алгоритмов синтеза полиномиальных линий и поверхностей.
Метод решения: Линейная интерполяция параболических линий на интервале их перекрытия.
Оригинальность: Разработан способ реализации краевых условий.
Выводы: Получен алгоритм синтеза кубических перекрывающихся сплайнов с разными краевыми условиями.

Ключевые слова: сплайн, сегмент, полином, краевые условия.

Статья посвящена разработке нового типа сплайна с конечным носителем, в основе которого лежит интерполяция перекрывающихся параболических кривых [1, 2], дополненная краевыми условиями, присущими кубическим сплайнам [1, 3]. В результате концевые сегменты составной линии становятся кубическими, тогда как все внутренние сегменты получаются кубическими благодаря линейной интерполяции линий второго порядка.

Пусть $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_n$ — полилиния в двух- или трехмерном пространстве, вершины которой являются узлами интерполяции, а $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$, где $i\in[1,n]$ — отрезок, на котором строится i-й сегмент составной линии $\mathbf{p}_i(t)$, гладко сопряженный с соседними сегментами. Полиномиальная модель m-й степени имеет вид параметрической векторной функции

$$\mathbf{p}(t)=\mathbf{s}_0+\mathbf{s}_1t+\ldots+\mathbf{s}_mt^m=\mathbf{S}\mathbf{T}_m(t),$$

где $\mathbf{S}=[\mathbf{s}_0\ \mathbf{s}_1\ \ldots\ \mathbf{s}_m]$ — строчный вектор полиномиальных коэффициентов (ВПК), а $\mathbf{T}_m(t)=[1\ t\ t^2\ \ldots\ t^m]^{\text{т}}$ — столбцовый вектор базисных функций. В дальнейшем нам понадобятся векторы его первой $\mathbf{T}'_m(t)=[0\ 1\ 2t\ \ldots\ mt^{m-1}]^{\text{т}}$ и второй $\mathbf{T}''_m(t)=[0\ 0\ 2\ \ldots\ m(m-1)t^{m-2}]^{\text{т}}$ производных.

Поставим задачу синтеза модели i-го сегмента сплайна $\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{S}_i\mathbf{T}_3(t)$, т. е. вычисления ее ВПК $\mathbf{S}_i$ посредством линейной интерполяции параболических линий, перекрывающихся на i-м интервале и исследования путей реализации краевых условий в точках $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_n$.

Сначала используем метод локальной нормализованной параметризации, в котором отсчет параметра $t\in[0,1]$ на всех интервалах начинается с нуля и длины всех интервалов равны единице. Составим кубический полином i-го сегмента как линейную интерполяцию

$$\mathbf{p}_i(t)=(1-t)\mathbf{l}_i(t)+t\mathbf{r}_i(t)\ \ \forall t\in[0,1],\ i=\overline{1,n}, \tag{1а}$$

левого и правого параболических сегментов

$$\mathbf{l}_i(t)=\mathbf{L}_i\mathbf{T}_2(t),\ \ \mathbf{r}_i(t)=\mathbf{R}_i\mathbf{T}_2(t). \tag{1б}$$

На тех интервалах, где эти сегменты не зависят от краевых условий (рис. 1, *а*), их ВПК находятся решением уравнений трехузловой интерполяции:

$$\mathbf{L}_i=[\mathbf{P}_{i-2}\;\;\mathbf{P}_{i-1}\;\;\mathbf{P}_i][\mathbf{T}_2(-1)\;\;\mathbf{T}_2(0)\;\;\mathbf{T}_2(1)]^{-1}=[\mathbf{P}_{i-2}\;\;\mathbf{P}_{i-1}\;\;\mathbf{P}_i]\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=$$
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-\mathbf{P}_{i-2}+\mathbf{P}_i}{2} & \dfrac{\mathbf{P}_{i-2}-2\mathbf{P}_{i-1}+\mathbf{P}_i}{2}\end{bmatrix}\;\forall i=\overline{2,n},$$
$$\mathbf{R}_i=[\mathbf{P}_{i-1}\;\;\mathbf{P}_i\;\;\mathbf{P}_{i+1}][\mathbf{T}_2(0)\;\;\mathbf{T}_2(1)\;\;\mathbf{T}_2(2)]^{-1}=[\mathbf{P}_{i-1}\;\;\mathbf{P}_i\;\;\mathbf{P}_{i+1}]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&4\end{bmatrix}^{-1}=$$
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-3\mathbf{P}_{i-1}+4\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i+1}}{2} & \dfrac{\mathbf{P}_{i-1}-2\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_{i+1}}{2}\end{bmatrix}\;\forall i=\overline{1,n-1}. \qquad (1в)$$

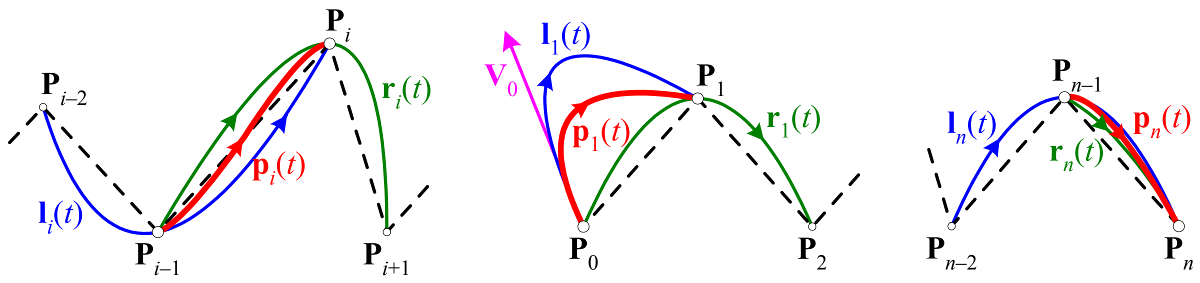
Тогда из (1а, б) следует узловая модель ***внутреннего*** сегмента

$$\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{L}_i(1-t)\mathbf{T}_2(t)+\mathbf{R}_i t\mathbf{T}_2(t)=$$
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-\mathbf{P}_{i-2}+\mathbf{P}_i}{2} & \dfrac{\mathbf{P}_{i-2}-2\mathbf{P}_{i-1}+\mathbf{P}_i}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-t\\t-t^2\\t^2-t^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-3\mathbf{P}_{i-1}+4\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i+1}}{2} & \dfrac{\mathbf{P}_{i-1}-2\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_{i+1}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}= \qquad (1г)$$
$$=\mathbf{P}_{i-1}+\frac{-\mathbf{P}_{i-2}+\mathbf{P}_i}{2}t+\frac{2\mathbf{P}_{i-2}-5\mathbf{P}_{i-1}+4\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i+1}}{2}t^2+\frac{-\mathbf{P}_{i-2}+3\mathbf{P}_{i-1}-3\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_{i+1}}{2}t^3\;\forall i=\overline{2,n-1},$$

удовлетворяющая условиям интерполяции $\mathbf{p}_i(0)=\mathbf{P}_{i-1}$, $\mathbf{p}_i(1)=\mathbf{P}_i$.

Точно такие же коэффициенты кубического полинома $\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{S}_i\mathbf{T}_3(t)$ при степенях параметра t получим с помощью операций расширения ВПК парабол нулевыми элементами $\mathbf{O}$, повышающими степени полиномов со второй до третьей:

$$\mathbf{S}_i=[\mathbf{L}_i\;\;\mathbf{O}]-[\mathbf{O}\;\;\mathbf{L}_i]+[\mathbf{O}\;\;\mathbf{R}_i]=$$
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-\mathbf{P}_{i-2}+\mathbf{P}_i}{2} & \dfrac{\mathbf{P}_{i-2}-2\mathbf{P}_{i-1}+\mathbf{P}_i}{2} & \mathbf{O}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-\mathbf{P}_{i-2}+\mathbf{P}_i}{2} & \dfrac{\mathbf{P}_{i-2}-2\mathbf{P}_{i-1}+\mathbf{P}_i}{2}\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-3\mathbf{P}_{i-1}+4\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i+1}}{2} & \dfrac{\mathbf{P}_{i-1}-2\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_{i+1}}{2}\end{bmatrix}= \qquad (1д)$$
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1} & \dfrac{-\mathbf{P}_{i-2}+\mathbf{P}_i}{2} & \dfrac{2\mathbf{P}_{i-2}-5\mathbf{P}_{i-1}+4\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i+1}}{2} & \dfrac{-\mathbf{P}_{i-2}+3\mathbf{P}_{i-1}-3\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_{i+1}}{2}\end{bmatrix}.$$



а) *б)* *в)*

Рис. 1. Интерполяция параболических сегментов

В отличие от (1в, г) модели параболических $\mathbf{l}_1(t)$, $\mathbf{r}_n(t)$ и кубических $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_n(t)$ сегментов зависят от краевых условий в точках $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_n$. Например, для ***первого*** сегмента с начальным направлением $\mathbf{V}_0$ (рис. 1,*б*) ВПК левой и правой парабол имеют следующий вид:

$$\mathbf{L}_1=[\mathbf{V}_0\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1][\mathbf{T}_2'(0)\ \mathbf{T}_2(0)\ \mathbf{T}_2(1)]^{-1}=[\mathbf{V}_0\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1]\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=[\mathbf{P}_0\ \ \mathbf{V}_0\ \ -\mathbf{V}_0-\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1],$$

$$\mathbf{R}_1=[\mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1\ \ \mathbf{P}_2][\mathbf{T}_2(0)\ \mathbf{T}_2(1)\ \mathbf{T}_2(2)]^{-1}=[\mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1\ \ \mathbf{P}_2]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&4\end{bmatrix}^{-1}= \tag{2а}$$

$$=\left[\mathbf{P}_{01}\ \ \frac{-3\mathbf{P}_0+4\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{2}\ \ \frac{\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{2}\right].$$

Тогда из (1а, б) следует узловая эрмитова модель первого сегмента, удовлетворяющая условиям $\mathbf{p}_1(0)=\mathbf{P}_0$, $\mathbf{p}_1(1)=\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{p}_1'(0)=\mathbf{V}_0$:

$$\mathbf{p}_1(t)=\mathbf{L}_1(1-t)\mathbf{T}_2(t)+\mathbf{R}_1 t\mathbf{T}_2(t)=$$

$$=[\mathbf{P}_0\ \ \mathbf{V}_0\ \ -\mathbf{V}_0-\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1]\begin{bmatrix}1-t\\t-t^2\\t^2-t^3\end{bmatrix}+\left[\mathbf{P}_0\ \ \frac{-3\mathbf{P}_0+4\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{2}\ \ \frac{\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{2}\right]\begin{bmatrix}t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}= \tag{2б}$$

$$=\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_0 t+\frac{-4\mathbf{P}_0-5\mathbf{P}_0+6\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{2}t^2+\frac{2\mathbf{P}_0+3\mathbf{P}_0-4\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{2}t^3.$$

Что до краевого условия $\mathbf{p}_1''(0)=\mathbf{A}_0$, то оно, вопреки ожиданиям, не реализуется вычислением вектора $\mathbf{L}_1$ по образу (2а) как

$$\mathbf{L}_1=[\mathbf{A}_0\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1][\mathbf{T}_2''(0)\ \mathbf{T}_2(0)\ \mathbf{T}_2(1)]^{-1}=[\mathbf{A}_0\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1]\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\2&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\left[\mathbf{P}_0\ \ -\frac{\mathbf{A}_0}{2}-\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1\ \ \frac{\mathbf{A}_0}{2}\right].$$

Подставив его в (2б) вместе с вектором $\mathbf{R}_1$ из (2а), получим

$$\mathbf{p}_1(t)=\mathbf{L}_1(1-t)\mathbf{T}_2(t)+\mathbf{R}_1 t\mathbf{T}_2(t)=$$

$$=\left[\mathbf{P}_0\ \ -\frac{\mathbf{A}_0}{2}-\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1\ \ \frac{\mathbf{P}_0}{2}\right]\begin{bmatrix}1-t\\t-t^2\\t^2-t^3\end{bmatrix}+\left[\mathbf{P}_0\ \ \frac{-3\mathbf{P}_0+4\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{2}\ \ \frac{\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{2}\right]\begin{bmatrix}t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}=$$

$$=\mathbf{P}_0+\frac{-\mathbf{A}_0-2\mathbf{P}_0+2\mathbf{P}_1}{2}t+\frac{2\mathbf{A}_0-\mathbf{P}_0+2\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{2}t^2+\frac{-2\mathbf{A}_0+\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{2}t^3$$

и ускорение $\mathbf{p}_1''(0)=2\mathbf{A}_0-\mathbf{P}_0+2\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$. Причина его несовпадения с $\mathbf{A}_0$ в том, что в отличие от (1а) вторая производная $\mathbf{p}_i''(t)$ не является линейной интерполяцией $(1-t)\mathbf{l}_i''(t)+t\mathbf{r}_i''(t)$, отсюда $\mathbf{p}_i''(0)\neq\mathbf{l}_i''(0)$! Для достижения успеха нужно создать векторы

$$\mathbf{A}=(\mathbf{A}_0+\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)/2,$$

$$\mathbf{L}_1=[\mathbf{A}\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1]\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\2&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\left[\mathbf{P}_0\ \ -\frac{\mathbf{A}}{2}-\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1\ \ \frac{\mathbf{A}}{2}\right]=\left[\mathbf{P}_0\ \ \frac{-\mathbf{A}_0-5\mathbf{P}_0+6\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{4}\ \ \frac{\mathbf{A}_0+\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{4}\right]. \tag{2в}$$

Тогда вместе с вектором $\mathbf{R}_1$ из (2а), аналогично (2б), получим

$$\mathbf{p}_1(t)=\left[\mathbf{P}_0\ \ \frac{-\mathbf{A}_0-5\mathbf{P}_0+6\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{4}\ \ \frac{A_0+\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{4}\right]\begin{bmatrix}1-t\\t-t^2\\t^2-t^3\end{bmatrix}+$$

$$+\left[\mathbf{P}_0\ \ \frac{-3\mathbf{P}_0+4\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{2}\ \ \frac{\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{2}\right]\begin{bmatrix}t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}= \tag{2г}$$

$$=\mathbf{P}_0+\frac{-\mathbf{A}_0-5\mathbf{P}_0+6\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2}{4}t+\frac{\mathbf{A}_0}{2}t^2+\frac{-\mathbf{A}_0+\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2}{4}t^3.$$

Проверяем: $\mathbf{p}_1(0)=\mathbf{P}_0$, $\mathbf{p}_1(1)=\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{p}_1''(0)=\mathbf{A}_0$ — все правильно! При желании создать в начале сплайна свободный конец задается нулевой вектор $\mathbf{A}_0=\mathbf{O}$.

Для ***последнего*** сегмента $\mathbf{p}_n(t)$ с конечным направлением $\mathbf{V}_n$ ВПК левой и правой парабол имеют следующий вид:

$$\mathbf{L}_n=[\mathbf{P}_{n-2}\ \ \mathbf{P}_{n-1}\ \ \mathbf{P}_n]\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \frac{-\mathbf{P}_{n-2}+\mathbf{P}_n}{2}\ \ \frac{\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_n}{2}\right],$$

$$\mathbf{R}_n=[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \mathbf{P}_n\ \ \mathbf{V}_n][\mathbf{T}_2(0)\ \mathbf{T}_2(1)\ \mathbf{T}_2'(1)]^{-1}=[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \mathbf{P}_n\ \ \mathbf{V}_n]\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}= \tag{3а}$$

$$=[\mathbf{P}_{n-1}\ \ -2\mathbf{P}_{n-1}+2\mathbf{P}_n-\mathbf{V}_n\ \ \mathbf{P}_{n-1}-\mathbf{P}_n+\mathbf{V}_n].$$

Тогда из (1а, б) следует узловая эрмитова модель конечного сегмента

$$\mathbf{p}_n(t)=\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \frac{-\mathbf{P}_{n-2}+\mathbf{P}_n}{2}\ \ \frac{\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_n}{2}\right]\begin{bmatrix}1-t\\t-t^2\\t^2-t^3\end{bmatrix}+$$

$$+[\mathbf{P}_{n-1}\ \ -2\mathbf{P}_{n-1}+2\mathbf{P}_n-\mathbf{V}_n\ \ \mathbf{P}_{n-1}-\mathbf{P}_n+\mathbf{V}_n]\begin{bmatrix}t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}= \tag{3б}$$

$$=\mathbf{P}_{n-1}+\frac{-\mathbf{P}_{n-2}+\mathbf{P}_n}{2}t+(\mathbf{P}_{n-2}-3\mathbf{P}_{n-1}+2\mathbf{P}_n-\mathbf{V}_n)t^2+\frac{-\mathbf{P}_{n-2}+4\mathbf{P}_{n-1}-3\mathbf{P}_n+2\mathbf{V}_n}{2}t^3.$$

Сами убедитесь, что $\mathbf{p}_n(0)=\mathbf{P}_{n-1}$, $\mathbf{p}_n(1)=\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{p}_n(1)=\mathbf{V}_n$.

И, наконец, для реализации краевого условия $\mathbf{p}_n''(1)=\mathbf{A}_n$ создадим векторы

$$\mathbf{A}=(\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_n+\mathbf{A}_n)/2,$$

$$\mathbf{R}_n=[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \mathbf{P}_n\ \ \mathbf{A}_n][\mathbf{T}_2(0)\ \mathbf{T}_2(1)\ \mathbf{T}_2'(1)]^{-1}=[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \mathbf{P}_n\ \ \mathbf{A}]\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}= \tag{3в}$$

$$=\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ -\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_n-\frac{\mathbf{A}}{2}\ \ \frac{\mathbf{A}}{2}\right]=\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \frac{-\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+3\mathbf{P}_n-\mathbf{A}_n}{4}\ \ \frac{\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_n+\mathbf{A}_n}{4}\right].$$

Тогда вместе с вектором $\mathbf{L}_n$ из (3а) аналогично (3б) получим

$$\mathbf{p}_n(t)=\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \frac{-\mathbf{P}_{n-2}+\mathbf{P}_n}{2}\ \ \frac{\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_n}{2}\right]\begin{bmatrix}1-t\\t-t^2\\t^2-t^3\end{bmatrix}+$$

$$+\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \frac{-\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+3\mathbf{P}_n-\mathbf{A}_n}{4}\ \ \frac{\mathbf{P}_{n-2}-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_n+\mathbf{A}_n}{4}\right]\begin{bmatrix}t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}= \tag{3г}$$

$$=\mathbf{P}_{n-1}+\frac{-\mathbf{P}_{n-2}+\mathbf{P}_n}{2}t+\frac{3\mathbf{P}_{n-2}-6\mathbf{P}_{n-1}+3\mathbf{P}_n-\mathbf{A}_n}{4}t^2+\frac{-\mathbf{P}_{n-2}+2\mathbf{P}_{n-1}-\mathbf{P}_n+\mathbf{A}_n}{4}t^3.$$

Проверка $\mathbf{p}_n(0)=\mathbf{P}_{n-1}$, $\mathbf{p}_n(1)=\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{p}_n''(1)=\mathbf{A}_n$ подтверждает правильность полученной модели последнего сегмента. При желании создать сплайн со свободным правым концом задается нулевой вектор $\mathbf{A}_n=\mathrm{O}$ (рис. 1,*в*).

Полный нормализованный сплайн, фрагменты которого приведены на рис. 1, построен на рис. 2. Там же пунктирными линиями показано, что изменения узловой точки и краевых векторов распространяются на конечное число сегментов, а точки более дальних сегментов остаются неподвижными.

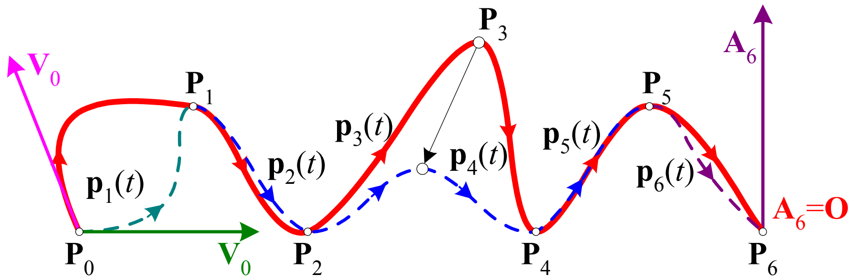


Рис. 2. Конечные свойства сплайна

Составим из узловых точек $\mathbf{P}_0 \div \mathbf{P}_n$ и краевых векторов $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{A}_n$ вектор из $n+3$-х возмущающих факторов $\mathbf{F}=[\mathbf{P}_0\ \mathbf{P}_1\ \dots\ \mathbf{P}_n\ \mathbf{V}_0\ \mathbf{A}_n]$. На рис. 2 хорошо видно, что смещение какой-либо узловой точки $\mathbf{P}_k$ с номером $k\in[0,n]$ влияет на форму не более чем двух примыкающих к ней как слева, так и справа сегментов, а изменения факторов $\mathbf{F}_{n+1}\equiv\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{F}_{n+2}\equiv\mathbf{A}_n$ воздействуют только на крайние сегменты:

- согласно соотношению (2б), на ***первом*** $(i=1)$ интервале $t\in[0,1)$ активны возмущающие факторы $\mathbf{F}_0 \div \mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_{n+1}$, оттуда же получаем интервальные весовые функции (ВФ)

$$\underset{k=\overline{0,n+2}}{l_1^{\langle k\rangle}(t)}=\begin{cases}1-2.5t^2+1.5t^3 \text{ при } k=0;\\ 3t^2-2t^3 \text{ при } k=1;\\ -0.5t^2+0.5t^3 \text{ при } k=2;\\ t-2t^2+t^3 \text{ при } k=n+1;\\ 0 \text{ при остальных } k;\end{cases} \tag{4а}$$

- распределив зависимость (1г) по узловым точкам, сформируем интервальные ВФ влияния k-х возмущающих факторов на точки ***внутренних*** i-х сегментов, используя нормализованные сквозной $t\in[i-1,i)$ и локальный $\tau=t-i+1\in[0,1)$ параметры:

$$\underset{\substack{i=\overline{2,n-1}\\ k=\overline{0,n+2}}}{l_i^{\langle k\rangle}(t)}=\begin{cases}-0.5\tau+\tau^2-0.5\tau^3 \text{ при } k=i-2;\\ 1-2.5\tau^2+1.5\tau^3 \text{ при } k=i-1;\\ 0.5\tau+2\tau^2-1.5\tau^3 \text{ при } k=i;\\ -0.5\tau^2+0.5\tau^3 \text{ при } k=i+1;\\ 0 \text{ при остальных } k;\end{cases} \tag{4б}$$

- наконец, на ***последнем*** $(i=n)$ интервале $t\in[n-1,n]$ с локальным параметром $\tau=t-n+1\in[0,1]$, судя по (3б), активны факторы $\mathbf{F}_{n-2}\div\mathbf{F}_n$ и $\mathbf{F}_{n+2}$ с интервальными ВФ

$$\underset{k=\overline{0,n+2}}{l_n^{\langle k\rangle}(t)}=\begin{cases}-0.5\tau+\tau^2-0.5\tau^3 \text{ при } k=n-2;\\ 1-3\tau^2+2\tau^3 \text{ при } k=n-1;\\ 0.5\tau+2\tau^2-1.5\tau^3 \text{ при } k=n;\\ -\tau^2+\tau^3 \text{ при } k=n+2;\\ 0 \text{ при остальных } k.\end{cases} \tag{4в}$$

С помощью ВФ (4) представление i-го сегмента выглядит взвешенной смесью

$$\mathbf{p}_i(t)=\sum_k l_i^{\langle k\rangle}(t)\mathbf{F}_k \quad \forall t\in[i-1,i],\ i\in\overline{1,n}. \tag{5а}$$

Интервальные ВФ с одинаковым значением k сшиваются в факторные ВФ

$$l_k(t)=\sum_{i=1}^{n} l_i^{\langle k\rangle} \quad \forall k=\overline{0,n+2}, \tag{5б}$$

характеризующие влияние возмущающих факторов $\mathbf{F}_k$ на весь сплайн. На рис. 3 построены восемь графиков факторных ВФ (нулевых интервальных ВФ показаний нет), соответствующих перекрывающемуся сплайну на рис. 2. С помощью вектора $\mathbf{L}(t)=[l_0(t)\ l_1(t)\ \ldots\ l_{n+2}(t)]^{\mathrm{T}}$ полный сплайн представляется в виде

$$\mathbf{p}(t)=\sum_{k=0}^{n+2} l_k(t)\mathbf{F}_k=\mathbf{FL}(t)\quad \forall t\in[0,n]. \tag{5в}$$

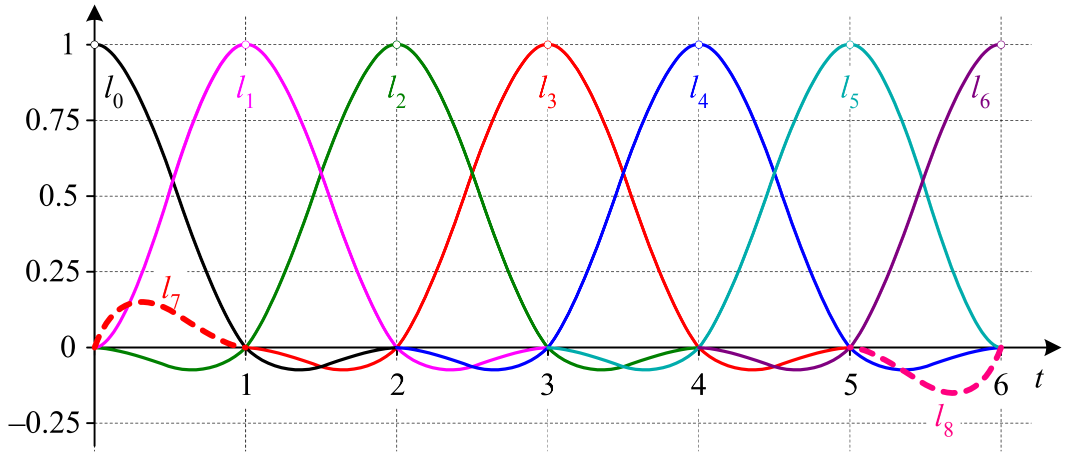


Рис. 3. Факторные весовые функции

Обобщим тему построением сегментов перекрывающегося сплайна $\mathbf{p}_i(t)$ на интервалах $t\in[a_i,b_i]$ с $b_i=a_i+d_i$ и произвольно выбранной параметризацией — локальной ($a_i=0$) либо сквозной ($b_i=a_{i+1}$), нормализованной ($d_i=1$) либо хордовой ($d_i=|\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i-1}|$), где d_i — длина i -го параметрического интервала.

Обобщением модели (1а) является линейная интерполяция

$$\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{l}_i(t)\frac{b_i-t}{d_i}+\mathbf{r}_i(t)\frac{t-a_i}{d_i}\quad \forall t\in[a_i,b_i],\ i=\overline{1,n} \tag{6а}$$

левой $\mathbf{l}_i(t)=\mathbf{L}_i\mathbf{T}_2(t)$ и правой $\mathbf{r}_i(t)=\mathbf{R}_i\mathbf{T}_2(t)$ парабол, у которых векторы коэффициентов независимы от краевых условий (см. рис. 1) и находятся обобщением (1в) как

$$\mathbf{L}_i=[\mathbf{P}_{i-2}\ \ \mathbf{P}_{i-1}\ \ \mathbf{P}_i][\mathbf{T}_2(a_i-d_{i-1})\ \ \mathbf{T}_2(a_i)\ \ \mathbf{T}_2(b_i)]^{-1}\quad \forall i=\overline{2,n},$$

$$\mathbf{R}_i=[\mathbf{P}_{i-1}\ \ \mathbf{P}_i\ \ \mathbf{P}_{i+1}][\mathbf{T}_2(a_i)\ \ \mathbf{T}_2(b_i)\ \ \mathbf{T}_2(b_i+d_{i+1})]^{-1}\quad \forall i=\overline{1,n-1}. \tag{6б}$$

Глядя на (6а), запишем обобщающие (1д) ВПК кубических сегментов $\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{S}_i\mathbf{T}_3(t)$:

$$\mathbf{S}_i=\frac{b_i[\mathbf{L}_i\ \ \mathbf{O}]-[\mathbf{O}\ \ \mathbf{L}_i]+[\mathbf{O}\ \ \mathbf{R}_i]-a_i[\mathbf{R}_i\ \ \mathbf{O}]}{d_i}\quad \forall i=\overline{1,n}. \tag{6в}$$

Модели параболических $\mathbf{l}_1(t)$, $\mathbf{r}_n(t)$ и кубических $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_n(t)$ сегментов зависят от краевых условий в точках $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_n$. Для ***первого*** эрмитова сегмента с заданным начальным направлением $\mathbf{V}_0$ (см. рис. 1,*б*) ВПК левой параболы находится обобщением (2а):

$$\mathbf{L}_1=[\mathbf{V}_0\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1][\mathbf{T}_2'(a_1)\ \ \mathbf{T}_2(a_1)\ \ \mathbf{T}_2(b_1)]^{-1}. \tag{7а}$$

Что касается краевого условия $\mathbf{p}_1''(a_1)=\mathbf{A}_0$ с заданным ускорением $\mathbf{A}_0$, то оно реализуется расчетом вектора

$$\mathbf{L}_1=[\mathbf{A}\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1][\mathbf{T}_2''(a_1)\ \ \mathbf{T}_2(a_1)\ \ \mathbf{T}_2(b_1)]^{-1} \tag{7б}$$

с таким вектором $\mathbf{A}$, который создает в начале сплайна ускорение $\mathbf{F}(\mathbf{A})=\mathbf{Z}+k\mathbf{A}$, равное $\mathbf{A}_0$. Подходящие вектор $\mathbf{Z}$ и скалярный коэффициент k этой линейной функции находим по двум выборкам:

- задаем нулевой вектор $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ и по (7б) находим вектор $\mathbf{L}_1$, а по (6в) вектор $\mathbf{S}_1\equiv[\mathbf{s}_0\ \mathbf{s}_1\ \mathbf{s}_2\ \mathbf{s}_3]$ коэффициентов кубического сегмента $\mathbf{s}_0+\mathbf{s}_1t+\mathbf{s}_2t^2+\mathbf{s}_3t^3$ и его начальное ускорение $\mathbf{F}(\mathbf{O})=2\mathbf{s}_2+6\mathbf{s}_3a_1$, равное $\mathbf{Z}$;
- задаем единичный вектор $\mathbf{A}=\mathbf{x}^{\mathrm{o}}$, ($\mathbf{x}^{\mathrm{o}}$ — единичный орт оси x) и по тем же формулам находим новые векторы $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{\mathrm{o}})=2\mathbf{s}_2+6\mathbf{s}_3a_1=\mathbf{Z}+k\mathbf{x}^{\mathrm{o}}$, откуда
$$k=\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}^{\mathrm{o}})-\mathbf{Z}\right)_x=F(\mathbf{x}^{\mathrm{o}})_x-\mathbf{Z}_x.$$

Теперь из условия $\mathbf{Z}+k\mathbf{A}=\mathbf{A}_0$ получаем искомое значение
$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}_0-\mathbf{Z}}{k}=\frac{\mathbf{A}_0-\mathbf{F}(\mathbf{O})}{\mathbf{F}(\mathbf{x}^{\mathrm{o}})_x-\mathbf{F}(\mathbf{O})_x}. \tag{7в}$$
Для создания у сплайна свободного левого конца берется вектор $\mathbf{A}_0=\mathbf{O}$.

У ***последнего*** эрмитова сегмента с заданным конечным направлением $\mathbf{V}_n$ вектор коэффициентов правой параболы находится как
$$\mathbf{R}_n=[\mathbf{P}_{n-1}\ \mathbf{P}_n\ \mathbf{V}_n][\mathbf{T}_2(a_n)\ \mathbf{T}_2(b_n)\ \mathbf{T}_2'(b_n)]^{-1}. \tag{8а}$$
Краевое условие $\mathbf{p}_n''(b_n)=\mathbf{A}_n$ с заданным ускорением $\mathbf{A}_n$ реализуется расчетом аналогичного (3в) вектора
$$\mathbf{R}_n=[\mathbf{P}_{n-1}\ \mathbf{P}_n\ \mathbf{A}][\mathbf{T}_2(a_n)\ \mathbf{T}_2(b_n)\ \mathbf{T}_2''(b_n)]^{-1} \tag{8б}$$
с найденным аналогично (7в) вектором $\mathbf{A}$, дающим концевое ускорение $\mathbf{A}_n$:
$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}_n-\mathbf{F}(\mathbf{O})}{\mathbf{F}(\mathbf{x}^{\mathrm{o}})_x-\mathbf{F}(\mathbf{O})_x}. \tag{8в}$$

Здесь значение $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ от произвольного вектора $\mathbf{A}$ находится расчетом по (8б) и (6в) векторов $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{S}_n\equiv[\mathbf{s}_0\ \mathbf{s}_1\ \mathbf{s}_2\ \mathbf{s}_3]$, после чего $\mathbf{F}(\mathbf{A})=2\mathbf{s}_2+6\mathbf{s}_3b_n$. Чтобы получить сплайн со свободным правым концом (см. рис. 1,*в*), нужно задать нулевой вектор $\mathbf{A}_n=\mathbf{O}$.

Обсудим вычислительную эффективность *интерактивного построения сегментов сплайна* при вариации узловых точек и краевых условий:

- использование сложных, но зато прямых формул (1г), (2б, г) и (3б, г) оказалось возможным только после их достаточно трудоемкого вывода и лишь в нормализованном локальном варианте параметризации, что ограничивает их универсальность;
- применение несложных интерполяционных формул (1а), (6а) либо параметрического разложения $\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{S}_i\mathbf{T}_3(t)$ требует пересчета векторов полиномиальных коэффициентов $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{R}_i$ и $\mathbf{S}_i$ при каждом изменении любого возмущающего фактора. Для ускорения отрисовки сплайна можно ценой небольшого усложнения программы пересчитывать не все ВПК, а, благодаря конечности сплайна, лишь зависимые от изменяемого фактора;
- наиболее сложными в выводе (и опять лишь в рамках нормализованной локальной параметризации) являются посегментное (5а) и общее (5б, в) узловые разложения, требующие тщательного программирования интервальных весовых функций (4).

С учетом сказанного разработаем метод расчета числовых матриц $\mathbf{H}_i$, с помощью которых интерактивный вывод сегментов по формуле бинарного разложения

$$\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{U}_i\mathbf{H}_i\mathbf{T}_3(t)\ \ \forall i=\overline{1,n}$$

происходит максимально быстро. К тому же при использовании нормализованной параметризации с равными значениями $d_i=1\ \ \forall i=\overline{1,n}$ все эти матрицы становятся независимыми от возмущающих факторов.

Введем операции двустороннего расширения матрицы $\mathbf{H}\in\mathrm{R}^{3\times3}$ нулевыми строками и столбцами согласно направлениям надсимвольных стрелок:

$$\overset{\Downarrow\Rightarrow}{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{H} & \mathbf{O}_{2\times1}\\ \mathbf{O}_{1\times2} & 0\end{bmatrix},\ \ \overset{\Leftarrow\Downarrow}{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{2\times1} & \mathbf{H}\\ 0 & \mathbf{O}_{1\times2}\end{bmatrix},\ \ \overset{\Uparrow\Rightarrow}{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{1\times2} & 0\\ \mathbf{H} & \mathbf{O}_{2\times1}\end{bmatrix},\ \ \overset{\Leftarrow\Uparrow}{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{O}_{1\times2}\\ \mathbf{O}_{2\times1} & \mathbf{H}\end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Сформируем из возмущающих факторов (узловых точек $\mathbf{P}_0\div\mathbf{P}_n$ и векторов концевых производных, например, $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{A}_n$) такой вектор

$$\mathbf{F}=\left[\overbrace{\mathbf{V}_0\ \mathbf{P}_0\ \mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2}^{\mathbf{U}_1}\ \overbrace{\ }^{\mathbf{U}_3}\ \ldots\ \underbrace{\overbrace{\mathbf{P}_{n-2}\ \mathbf{P}_{n-1}\ \mathbf{P}_n}^{\mathbf{U}_{n-1}}\ \mathbf{A}_n}_{\mathbf{U}_n}\right],\qquad \underbrace{\mathbf{P}_0\ \mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3}_{\mathbf{U}_2}$$

чтобы по нему можно было перемещать слева направо четырехэлементный шаблон факторов i-го интервала $\mathbf{U}_i=[\overbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}^{\mathbf{U}_{\mathbf{L}i}}\!\!\!\!\underbrace{\ \ \bullet\ \bullet}_{\mathbf{U}_{\mathbf{R}i}}]$, содержащий перекрывающиеся трехэлементные узловые векторы $\mathbf{U}_{\mathbf{L}i}$ и $\mathbf{U}_{\mathbf{R}i}$ левой и правой парабол в (6а).

Записав ВПК этих парабол как $\mathbf{L}_i=\mathbf{U}_{\mathbf{L}i}\mathbf{H}_{\mathbf{L}i}$ и $\mathbf{R}_i=\mathbf{U}_{\mathbf{R}i}\mathbf{H}_{\mathbf{R}i}$ с элементами

$$\mathbf{U}_{\mathbf{L}i}=[\mathbf{P}_{i-2}\ \mathbf{P}_{i-1}\ \mathbf{P}_i],\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{L}i}=[\mathbf{T}_2(a_i-d_{i-1})\ \mathbf{T}_2(a_i)\ \mathbf{T}_2(b_i)]^{-1}\ \ \forall i=\overline{2,n},$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{R}i}=[\mathbf{P}_{i-1}\ \mathbf{P}_i\ \mathbf{P}_{i+1}],\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{R}i}=[\mathbf{T}_2(a_i)\ \mathbf{T}_2(b_i)\ \mathbf{T}_2(b_i+d_{i+1})]^{-1}\ \ \forall i=\overline{1,n-1},$$

получим бинарное разложение полинома i-го сегмента

$$\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{U}_{\mathbf{L}i}\mathbf{H}_{\mathbf{L}i}\frac{b_i-t}{d_i}\mathbf{T}_2(t)+\mathbf{U}_{\mathbf{R}i}\mathbf{H}_{\mathbf{R}i}\frac{t-a_i}{d_i}\mathbf{T}_2(t)=$$

$$=\frac{1}{d_i}\mathbf{U}_i\left(\begin{bmatrix}b_i\mathbf{H}_{\mathbf{L}i} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{H}_{\mathbf{L}i}\\ 0 & \mathbf{O}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{H}_{\mathbf{R}i}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{O} & 0\\ a_i\mathbf{H}_{\mathbf{R}i} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)\mathbf{T}_3(t)$$

со сформированной с помощью операций (9) матрицей

$$\mathbf{H}_i=d_i^{-1}\left(b_i\overset{\Downarrow\Rightarrow}{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}i}-\overset{\Leftarrow\Downarrow}{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}i}+\overset{\Leftarrow\Uparrow}{\mathbf{H}}_{\mathbf{R}i}-a_i\overset{\Uparrow\Rightarrow}{\mathbf{H}}_{\mathbf{R}i}\right)\ \ \forall i=\overline{1,n} \qquad (10)$$

В рамках локальной ($a_i=0$) нормализованной ($d_{i-1}=d_i=d_{i+1}=b_i=1$) параметризации с присутствующими в (1в) матрицами

$$\mathbf{H}_{\mathbf{L}i}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -0.5 & 0.5\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix},\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{R}i}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1.5 & 0.5\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

по (10) получим матрицу

$$\mathbf{H}_i=\overset{\Downarrow\Rightarrow}{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}i}-\overset{\Leftarrow\Downarrow}{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}i}+\overset{\Leftarrow\Uparrow}{\mathbf{H}}_{\mathbf{R}i}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -0.5 & 0.5 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & -0.5 & 0.5\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -0.5 & 1 & -0.5\\ 1 & 0 & -2.5 & 1.5\\ 0 & 0.5 & 2 & -1.5\\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}.$$

Элементы моделей крайних сегментов, зависимых от краевых условий, имеют особый вид. Так, для ***первого*** сегмента с начальным направлением $\mathbf{V}_0$ из (7а) следует

$$\mathbf{U}_{\mathbf{L}1}=\left[\mathbf{V}_0\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1\right],\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{L}1}=\left[\mathbf{T}_2'(a_1)\ \mathbf{T}_2(a_1)\ \mathbf{T}_2(b_1)\right]^{-1}.$$

В случае локальной ($a_1=0$) нормализованной ($d_1=b_1=1$) параметризации с матрицами из (2а)

$$\mathbf{H}_{\mathbf{L}1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{R}1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1.5&0.5\\0&2&-1\\0&-0.5&0.5\end{bmatrix}$$

по (10) получим матрицу

$$\mathbf{H}_1=\overset{\Downarrow\Rightarrow}{\mathbf{H}_{\mathbf{L}1}}-\overset{\Leftarrow\Downarrow}{\mathbf{H}_{\mathbf{L}1}}+\overset{\Leftarrow\Uparrow}{\mathbf{H}_{\mathbf{R}1}}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\1&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1.5&0.5\\0&0&2&-1\\0&0&-0.5&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-2&1\\1&0&-2.5&1.5\\0&0&3&-2\\0&0&-0.5&0.5\end{bmatrix}.$$

Если же в начале сплайна задано ускорение $\mathbf{A}_0$, то, вычислив по (7в) вектор $\mathbf{A}$, формируем элементы бинарного разложения левой параболы

$$\mathbf{U}_{\mathbf{L}1}=\left[\mathbf{A}\ \ \mathbf{P}_0\ \ \mathbf{P}_1\right],\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{L}1}=\left[\mathbf{T}_2''(a_1)\ \mathbf{T}_2(a_1)\ \mathbf{T}_2(b_1)\right]^{-1}.$$

Для ***последнего*** сегмента с конечным направлением $\mathbf{V}_n$ из (8б) следует

$$\mathbf{U}_{\mathbf{R}n}=\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \mathbf{P}_n\ \ \mathbf{V}_n\right],\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{R}n}=\left[\mathbf{T}_2(a_n)\ \mathbf{T}_2(b_n)\ \mathbf{T}_2'(b_n)\right]^{-1}.$$

Если же в конце сплайна задано ускорение $\mathbf{A}_n$, то, вычислив по (8в) вектор $\mathbf{A}$, формируем элементы бинарного разложения правой параболы

$$\mathbf{U}_{\mathbf{R}n}=\left[\mathbf{P}_{n-1}\ \ \mathbf{P}_n\ \ \mathbf{A}\right],\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{R}n}=\left[\mathbf{T}_2(a_n)\ \mathbf{T}_2(b_n)\ \mathbf{T}_2''(b_n)\right]^{-1}.$$

В случае локальной $(a_n=0)$ нормализованной $(d_n=b_n=1)$ параметризации с присутствующими в (3а, в) матрицами

$$\mathbf{H}_{\mathbf{L}n}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-0.5&0.5\\1&0&-1\\0&0.5&0.5\end{bmatrix},\ \ \mathbf{H}_{\mathbf{R}n}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&-0.5&0.5\end{bmatrix}$$

по (10) получим матрицу

$$\mathbf{H}_n=\overset{\Downarrow\Rightarrow}{\mathbf{H}_{\mathbf{L}n}}-\overset{\Leftarrow\Downarrow}{\mathbf{H}_{\mathbf{L}n}}+\overset{\Leftarrow\Uparrow}{\mathbf{H}_{\mathbf{R}n}}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&-0.5&0.5&0\\1&0&-1&0\\0&0.5&0.5&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&-0.5&0.5\\0&1&0&-1\\0&0&0.5&0.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&-0.5&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.5&1&-0.5\\1&0&-2.5&1.5\\0&0&3&-2\\0&0&-0.5&0.5\end{bmatrix}.$$

Работу алгоритма синтеза перекрывающегося сплайна иллюстрирует рис. 4:

- плоский сплайн *1* со свободными концами построен методом хордовой параметризации на той же неравномерной сетке, что и обычный сплайн *2*, но демонстрирует более плотное прилегание к узловой сети;
- у трехмерного нормализованного сплайна *3* векторы краевых направлений $\mathbf{V}_0=10(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)$ и $\mathbf{V}_7=\mathbf{P}_7-\mathbf{P}_6$ заданы такими же, как у обычного эрмитова сплайна *4*, но отклонения от узловой сети также уменьшились;
- последний график *5* показывает богатые возможности свободного творчества, предоставляемые разработанным сплайном с конечным носителем.

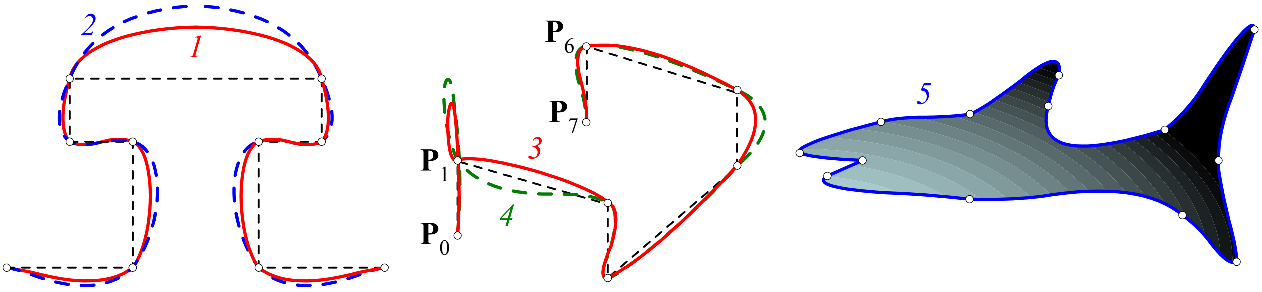


Рис. 4. Примеры реализации алгоритма

Таким образом, сплайны с перекрытием параболических сегментов показывают лучшее качество интерполирования в сравнении с типовыми кубическими сплайнами при меньшей вычислительной сложности, характеризуемой размерностями обращаемых матриц — 3×3 вместо $4n\times4n$ в [3, (8)], даже 4×4 в итеративном алгоритме [3, (9)].

Главным недостатком перекрывающегося сплайна является пониженная, но визуально незаметная, степень гладкости сопряжения его сегментов — первая вместо второй в [3, (6в)]. Это означает скачки ускорения в точках сшивки сегментов. С другой стороны, разрывность кривизны сплайновой линии можно обратить на пользу для создания в стыках сегментов точек перегиба и расширения возможностей конструирования сложных линий.

Библиографический список

1. **Роджерс, Д.** Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
2. **Никулин, Е.А.** Построение гладких составных линий с перекрытием сегментов // Труды НГТУ. 2006. Т. 58. Вып. 11. С. 5–12.
3. **Никулин, Е.А.** Прямой параметрический синтез сплайновых линий // Труды НГТУ. 2007. Т. 65. Вып. 14. С. 123–130.

Дата поступления
в редакцию 05.02.15

E.A. Nikulin

SYNTHESIS OF CUBIC SPLINES BY OVERLAPPING PARABOLAS METHOD

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Subject: Design of an algorithm for constructing cubic splines by method of overlapping parabolas.
Purpose: Development of matrix synthesis algorithms of polynomial curves and surfaces.
Methodology: Linear interpolation parabolic lines on the range of their overlap.
Originality: A method of implementing the boundary conditions is developed.
Findings: The algorithm of the synthesis of cubic splines overlapping with different boundary conditions is obtained.

Key words: spline, segment, polynome, boundary conditions.