УДК. 515.126

В.М. Галкин, И.Н. Толкачев, Н.В. Юрова

ОДНА ЗАДАЧА ИЗ ФУРЬЕ-АНАЛИЗА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассматривается задача восстановления комплекснозначной функции действительного переменного по известным модулям функции и ее преобразования Фурье. Разбирается случай конечного преобразования Фурье, где показывается неоднозначность восстановления.

Ключевые слова: волновая функция, конечное преобразование Фурье, дифференцируемые отображения, соотношение неопределенности Гейзенберга.

Задача, рассматриваемая в этой работе, связана с обсуждением понятия волновой функции в квантовой механики. Для простоты ограничимся одномерным движением квантовой частицы. Это движение описывается комплекснозначной функцией $\psi(x)$, называемой *волновой* [1]. При нормировке $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2 dx=1$ плотности распределений вероятностей координаты и скорости частицы есть $|\psi(x)|^2$ и $|\psi^*(x)|^2$, где $\psi^*(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}\psi(x)dx$ – преобразование Фурье волновой функции.

Общепринято, что волновая функция не имеет физического смысла, а лишь является математической абстракцией, позволяющей вычислить различные вероятности физических процессов. Естественно все же поставить вопрос о восстановлении волновой функции по данным эксперимента, хотя бы и мысленно. Таковыми являются описанные ранее плотности вероятностей. Математически проблема формулируется следующим образом: с какой точностью восстанавливается комплекснозначная функция $f(x)$, если известны $|f(x)|$ и $|f^*(x)|$, где $f^*(x)$ – образ Фурье функции $f(x)$.

Очевидно, что вместе с решением $f(x)$ таковым будет и $e^{i\alpha}f(x)$, где α – действительная константа. «Фазовый» множитель $e^{i\alpha}$ несущественен при вычислениях в квантовой механике и весьма заманчивым является предложение, что этой неопределенностью в определении $f(x)$ дело и ограничивается. Если бы это было так, то в теории передачи сигналов сигнал $f(t)$ ($f(t)$ – действительная функция времени t) определялся бы по $|f(t)|$ и амплитудному спектру с точностью до знака. Авторам неизвестны какие-либо упоминания по поставленной задаче в литературе. Сама задача представляется достаточно трудной, повидимому более трудной, чем известная обратная задача теории рассеяния. Поэтому в этой работе рассматриваются более простой случай ***конечного*** преобразования Фурье, хотя и здесь задача представляется нетривиальной.

1. Конечное преобразование Фурье [2].

Пусть $z=(z_0,z_1,...,z_{n-1})$ – вектор из n-мерного комплексного линейного пространства V. Его преобразованием служит вектор $Z=(Z_0,Z_1,...,Z_{n-1})$, чьи компоненты определяются формулами:

$$
\begin{aligned}
&Z_0 = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1},\\
&Z_1 = z_0 + \zeta z_1 + \zeta^2 z_2 + \ldots + \zeta^{n-1} z_{n-1},\\
&Z_2 = z_0 + \zeta^2 z_1 + \zeta^4 z_2 + \ldots + \zeta^{2(n-1)} z_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_{n-1} = z_0 + \zeta^{n-1} z_1 + \zeta^{2(n-1)} z_2 + \ldots + \zeta^{(n-1)(n-1)} z_{n-1},
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $\zeta = e^{2\pi i/n}$.

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$
\begin{aligned}
&z_0 = \frac{1}{n}(Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_{n-1}),\\
&z_1 = \frac{1}{n}(Z_0 + \zeta^{-1} Z_1 + \ldots + \zeta^{-(n-1)} Z_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z_{n-1} = \frac{1}{n}(Z_0 + \zeta^{-(n-1)} Z_1 + \ldots + \zeta^{-(n-1)(n-1)} Z_{n-1}).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Имеет место равенство Парсеваля

$$
|Z_0|^2 + |Z_1|^2 + \ldots + |Z_{n-1}|^2 = n\left(|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_{n-1}|^2\right). \tag{3}
$$

Поставленная ранее задача теперь формулируется так: по данным $|z_k|^2$ и $|Z_k|^2$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ восстановить векторы z и Z.

Как обычно в математике, возникают вопросы существования и единственности решения. Необходимое условие существования решения можно указать сразу: модули изначально задаваемых векторов z и Z должны быть связаны равенством Парсеваля. Как мы увидим далее, оно не является достаточным. Единственность решения, если таковые существуют, также не выполняется: допустимо преобразование $z \to ze^{i\alpha}$ с фазовым множителем $e^{i\alpha}$. Решения, получающиеся друг из друга таким преобразованием, мы не будем считать различными. В частности, всегда можно считать z_0 – действительным при $z_0 \neq 0$.

2. Случай $n = 2$.

Он достаточно тривиален. Если комплексные числа интерпретировать как векторы на плоскости, то с $z = (z_0, z_1)$ и $Z = (Z_0, Z_1)$ связывается параллелограммом со сторонами z_0 и z_1 и диагоналями Z_0 и Z_1. Решение существует, если можно построить треугольники со сторонами $|z_0|, |z_1|, |Z_0|$ и $|z_0|, |z_1|, |Z_1|$. Решение определяется с точностью до поворота параллелограмма вокруг начала координат, т.е. с точностью до фазового множителя и отражения его относительно одной из сторон.

3. Случай $n = 3$.

Здесь задаются величины $|z_0| = a, |z_1| = b, |z_2| = c$ и $|Z_0| = A, |Z_1| = B, |Z_2| = C$ и нужно установить условия, при которых эти величины определяют векторы $z = (z_0, z_1, z_2)$ и $Z = (Z_0, Z_1, Z_2)$. Без ограничения общности можно считать $a \geq b \geq c$ и $z_0 = a$ – действительным. Равенство Парсеваля позволяет выразить C через остальные величины. Рассмотрим сначала случай, когда среди a, b, c есть нулевые значения:

а) пусть $a = b = c = 0$, тогда $Z_0 = Z_1 = Z_2$. Решение единственно и существует при $A = B = C = 0$;

б) пусть $b = c = 0,\ a > 0$, тогда $Z_0 = Z_1 = Z_2 = a.$ Вновь решение существует и единственно лишь при $A = B = C = a$;

в) пусть $c = 0,\ a$ и $b > 0$. Если положить $z_1 = be^{i\varphi}$, то уравнение $Z_0 = z_0 + z_1 + z_2$ дает $A^2 = a^2 + 2ab\cos\varphi + b^2$, т.е. A должно быть таким, чтобы из a, b, A можно построить треугольник. Если же треугольник вырожден, то $\varphi = 0$ или π, $A = a + b$ или $a - b.$ Если же треугольник невырожден, то z_1 определяется с точностью до комплексного сопряжения. При этом B не может быть произвольным и однозначно определено по A, a и $b.$

Далее предполагается, что $a \ge b \ge c > 0.$ Если положить $z_1 = be^{i\varphi_1}$, $z_2 = ce^{i\varphi_2}$, то уравнения (1) переписываются в виде

$$\begin{aligned} Z_0 &= a + be^{i\varphi_1} + ce^{i\varphi_2}, \\ Z_1 &= a + be^{i(\varphi_1 + 2\pi/3)} + ce^{i(\varphi_2 - 2\pi/3)}, \\ Z_3 &= a + be^{i(\varphi_1 - 2\pi/3)} + ce^{i(\varphi_2 + 2\pi/3)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Подсчет модулей комплексных чисел в левых частях этих уравнений дает уравнения для φ_1, φ_2:

$$\begin{aligned} A^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\varphi_1 + 2ac\cos\varphi_2 + 2bc\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ B^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(\varphi_1 + 2\pi/3) + 2ac\cos(\varphi_2 - 2\pi/3) + 2bc\cos(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi/3). \end{aligned} \tag{5}$$

Значения φ_1 и φ_2 позволяют восстановить $z_0,\ z_1,\ z_2$ и $Z_0, Z_1, Z_2.$

Поэтому достаточно исследовать систему уравнений (5), т.е. установить ее разрешимость относительно φ_1, φ_2 при подходящих значениях a, b, c и $A, B, C.$

Рассмотрим отображение

$$(\varphi_1, \varphi_2) \to (x, y), \tag{6}$$

где $x = A$ и $y = B$ из (5). Это отображение тора $T = \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ на плоскость R^2. При заданных a, b, c необходимые и достаточные условия разрешимости (5) заключаются в принадлежности точки (A, B) образу этого отображения. Поскольку тор компактен, а отображение (6) гладкое, то образ T также компактен и его граница состоит из особых точек отображения. Последние обращают в ноль якобиан $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi_1} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi_1} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi_2} \end{vmatrix}.$

После несложных преобразований условие $J = 0$ перепишется в виде

$$-a\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + b\sin(2\varphi_1 - \varphi_2) + c\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \tag{7}$$

Несколько неожиданно, но (7) допускает явное решение, правда в параметрической форме. Оно получается следующим образом. Полагая $u = 2\varphi_1 - \varphi_2$, $v = 2\varphi_2 - \varphi_1$, перепишем (7) в виде $\sin u(b - a\cos v) + \sin v(c - a\cos u) = 0,$ откуда $\dfrac{\sin u}{c - a\cos u} = -\dfrac{\sin v}{b - a\cos v}.$ Если ввести параметр α так, чтобы обе части равенства были равны $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{a}$, то получим

$$\cos(u - \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha,\ \cos(v + \alpha) = \frac{b}{a} \text{ и } u = \alpha \ne \arccos\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right),\ v = -\alpha \ne \arccos\left(\frac{b}{a}\cos\alpha\right).$$

При этом $\varphi_1 = \dfrac{1}{3}(2u + v),\ \varphi_2 = \dfrac{1}{3}(u + 2v).$

Приведенные формулы (5)–(8) использовались при компьютерном счете, результаты которого некоторыми графиками.

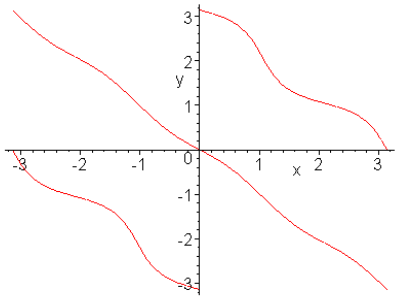


Рис. 1

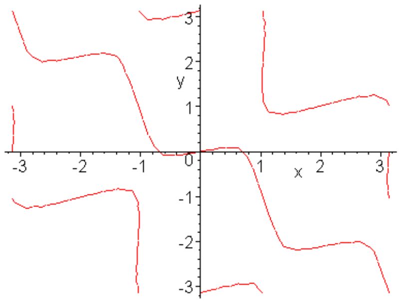


Рис. 2

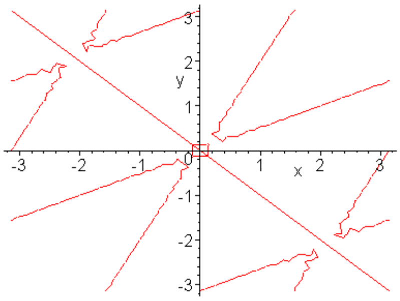


Рис. 3

Графики рис. 1–3 $(x=\varphi_1,\ y=\varphi_2)$ изображают особые точки отображения (6), т.е. точки на торе, для которых $J=0$. Значение a,b,c равны соответственно, 10, 4, 1; 5, 4,1; 4, 4,4.

При $a=b=c$ уравнения соответствующих линий допускают простую явную форму: $\varphi_2=-\varphi_1,\ \varphi_2=\dfrac{1}{2}\varphi_1\pm\pi,\ \varphi_1=\dfrac{1}{2}\varphi_2\pm\pi$ (рис. 3 неточен из-за компьютерных погрешностей).

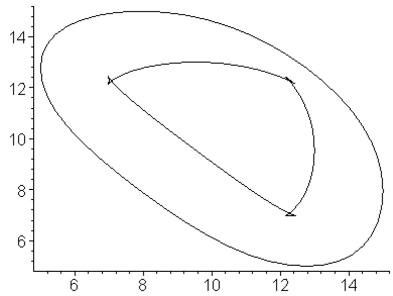


Рис. 4

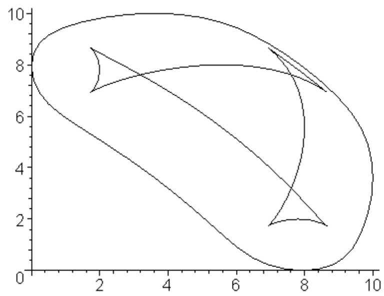
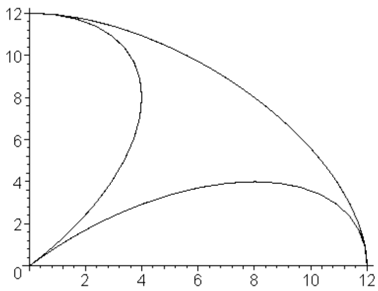


Рис. 5



Ри.с 6

Графики на рис. 4–6 изображают образы особых точек при отображении (6). Если $a=b=c$ не выполнено, то после удаления из тора особых точек он распадается на две компоненты, каждая из которых диффеоморфна внутренности кольца. При $a=b=c$ распадение уже происходит на 6 компонент. Каждая из них диффеоморфна внутренности круга.

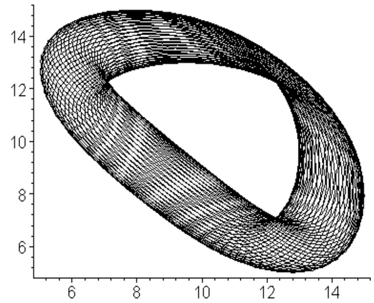


Рис. 7

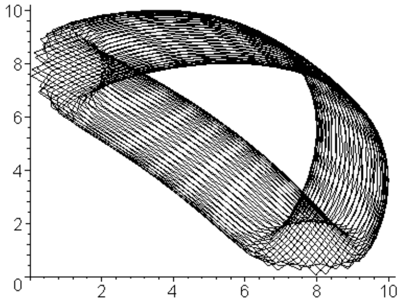


Рис. 8

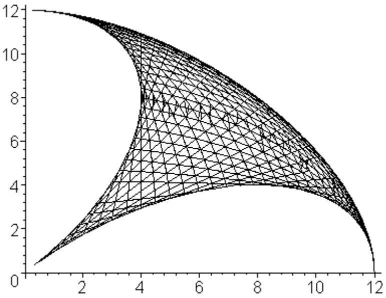


Рис. 9

Графики на рис. 7–9 изображают образы тора при отображении (6). Из них видно, что равенство Парсеваля не является достаточным условием существования решения исходной задачи. На них же можно видеть особенности отображения (6). В частности, области типа «ласточкин хвост» на рис. 7 и 8 соответствуют так называемым сборкам Уитни [3]. В областях вне особенностей число решений исходной задачи равно 2. Для рис. 9 число решений исходной задачи равно 6.

4. В заключение сделаем некоторые замечания для непрерывного случая, т.е. когда (волновая) функция $\psi(x)$ определена $(-\infty,+\infty)$. Хорошо известно, что $\psi(x)$ и $\psi^*(\omega)$ нельзя одновременно «локализовать», т.е. сделать их существенно отличными от нуля лишь в достаточно малых интервалах изменения аргументов. Это математическая интерпретация известного в квантовой механике «принципа неопределенности Гейзенберга».

Таким образом, и здесь выполнение равенства Парсеваля не является достаточным условием существования решения в задаче восстановления $\psi(x)$.

В исследовании вопроса о единственности решения, возможно, следующий пример представится достаточно поучительным. Пусть $\psi(x) = c_0\delta(x-x_0) + c_1\delta(x-x_1)$, где c_0, c_1 – комплексные константы, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Хотя говорить здесь о $|\psi(x)|$ затруднительно, но естественно считать заданным $|c_0|$ и $|c_1|$. Фурье-преобразование дает $\psi^*(\omega) = c_0 e^{i\omega x_0} + c_1 e^{i\omega x_1}$ и $|\psi^*(\omega)|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + 2|c_0||c_1|\cos(\omega(x_0 - x_1) + \varphi_0 - \varphi_1)$, где φ_0, φ_1 – аргументы в c_0 и c_1.

Ясно, что задание $|\psi^*(x)|$ вполне определяет разность $\varphi_0 - \varphi_1$, откуда немедленно следует, что c_0 и c_1 определяются с точностью до «фазового» множителя. Этот результат вселяет некоторый оптимизм в отношении ситуации общего случая.

Библиографический список

1. **Ландау, Л. Д.** Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М.: Наука, 1989.
2. **Сергиенко, Д.Б.** Цифровая обработка сигналов / Д.Б. Сергиенко. – СПб., 2006.
3. **Арнольд, В. И**. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, Л.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. – М.: Наука, 1982. Т. 1.

Дата поступления
в редакцию 05.02.2015

V.M. Galkin, I.N. Tolkachev, N.V. Yurova

A PROBLEM FROM FOURIER ANALYSIS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: The article raises the problem of reconstruction of the wave function of a quantum particle on probabilistic distributions of its coordinates and velocities.
Design/methodology/approach: We study the model associated with the discrete Fourier transform. It is established that the Parseval equality is not a sufficient condition for the existence of solutions.
Findings: It is established the solutions of the problem in the model is not unique.
Research limitations/implications: Generally speaking this article entails some new interesting questions in analysis and physics.
Originality/value All results are new.

Key words: wave function, discrete Fourier transform, differentiable mappings, incertitude relation.