МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК. 539.3

В.Я. Козлов [1], А.Н. Паутов [2], И.Н. Толкачев [3]

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВЫРЕЗОМ

Вятский государственный технический университет [1],
НИИ Механики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского [2],
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева [3]

Рассматривается задача определения критической нагрузки для пластинки с эллиптическим вырезом, подкрепленным по краю ребром. Задача решается методом конечных элементов. Приводятся результаты расчетов для различных вариантов нагружения и параметров ребра и выреза.

Ключевые слова: устойчивость, метод конечных элементов, эллиптический вырез, пластина, ребро.

Одной из задач плоской теории упругости является анализ деформированного состояния пластин, имеющих вырезы, т.е. поверхность пластины представляет собой неодносвязную область. Под действием приложенной к границам области сил (если силы достаточно велики) пластина может потерять устойчивость, т.е. перестанет сохранять свою плоскую форму (образуется вспучивание).

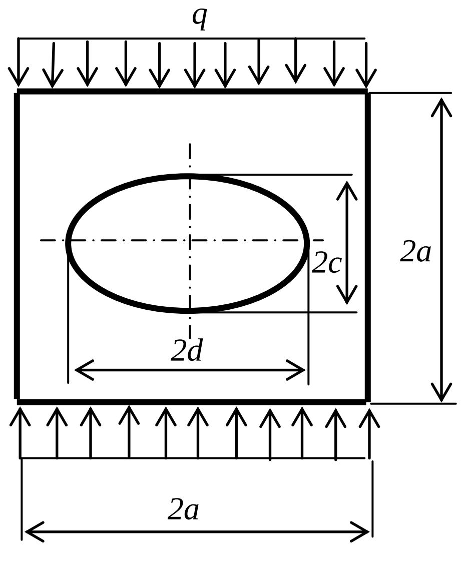

Рис. 1

Задача усложняется, если вырезы подкрепляются по краю ребрами. Ребро также может изменить свою первоначальную форму: может получить прогибы, а также закручивание.

В данной работе рассматривается квадратная пластина с центральным эллиптическим вырезом, подкрепленным ребром прямоугольного поперечного сечения (рис. 1). Пластина шарнирно оперта по наружному контуру и сжата в одном направлении равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q.

Под действием контурной нагрузки, задаваемой параметром q, пластина испытывает плоское напряженное состояние так, что при некоторых значениях нагрузки возможна потеря устойчивости ее плоской формы равновесия.

Принимаются обычные допущения теории тонких жестких пластин. Предполагается также, что:

1) пластина соприкасается с ребром по контуру его оси;

2) ребро рассматривается как тонкий криволинейный стержень, обладающий жесткостью на растяжение-сжатие, кручение и изгиб в двух плоскостях;

3) напряженно-деформированное состояние ребра определяется в рамках кинематической гипотезы Кирхгофа-Клебша.

При определении докритического (плоского напряженно-деформированного) состояния для пластины используется треугольный конечный элемент с шестью степенями свободы, подкрепляющее ребро аппроксимируется совокупностью балочных элементов [1]. Узловые точки элементов подкрепления совпадают с узловыми точками треугольных элементов пластины.

В задаче устойчивости для пластины используется треугольный конечный элемент с постоянными моментами [2]. За узловые неизвестные принимаются значения функции прогиба в вершинах и нормальные углы поворота в средних точках сторон треугольника. Для прямолинейного элемента ребра вдоль оси элемента принимается кубический закон изменения прогибов и кусочно-линейный закон изменения углов закручивания [3].

В результате задача устойчивости приводится к обобщенной проблеме собственных значений для системы линейных алгебраических уравнений:

$$[K_u]\{\overline{x}\} - \lambda[K_y]\{\overline{x}\} = 0,$$

где $[K_u]$ – матрица жесткости изгибаемой пластины с учетом жесткостных характеристик ребер;

$[K_y]$ – матрица устойчивости;

$\{\,\overline{x}\,\}$ – вектор узловых перемещений.

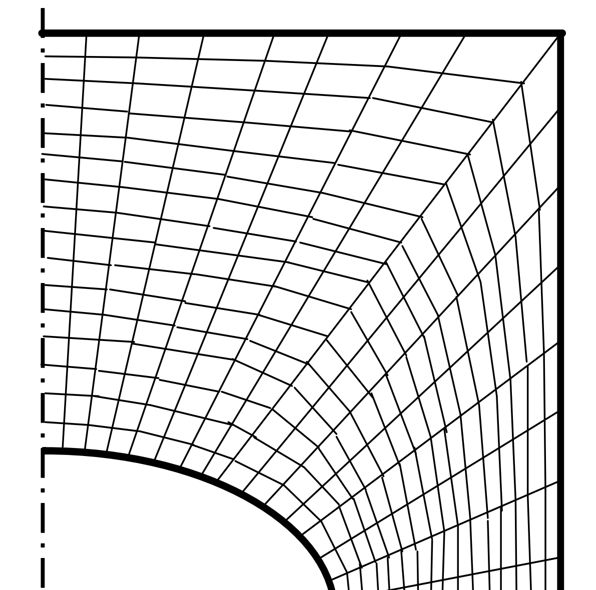

Рис. 2

Для решения обобщенной проблемы собственных значений предложен ряд алгоритмов как прямых, так и итерационных [4, 5]. В данной работе, в целях построения единой вычислительной схемы в плоской задаче и задаче устойчивости, для нахождения наименьшего критического значения параметра внешней нагрузки $\min\lambda_{кр}$ используется пошаговый процесс, заключающийся в последовательном вычислении значения определителя $\det|[K_u] - \lambda[K_y]|$ при заданных значениях λ до смены знака и последующего уточнения значения $\min\lambda_{кр}$ по методу хорд. Компоненты собственного вектора, соответствующего значению $\min\lambda_{кр}$ и характеризующего форму потери устойчивости, определяются обратным ходом матричной прогонки [6]. В целях уменьшения объема входной информации и получения решений задач с большим числом степеней свободы реализуется алгоритм подструктур (суперэлементов) [7].

Ввиду симметрии расчетной схемы рассматривается четверть подкрепленной пластины с сеткой элементов 16х16 (рис. 2).

Модуль упругости материала пластины и ребра E=1,96·10^3МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Для случая кругового выреза (при c/d=1) на рис. 3 приведены зависимости относительной критической нагрузки $\bar{q} = q/q_0$ (q – критическая нагрузка для пластины с вырезом, q_0 – для сплошной пластины) от отношения диаметра выреза к стороне пластины при различных значениях площади поперечного сечения ребра f: кривая *1* соответствует значению f = 0, кривая *2* – значению f = 0,5, кривая *3* – значению f = 1,0.

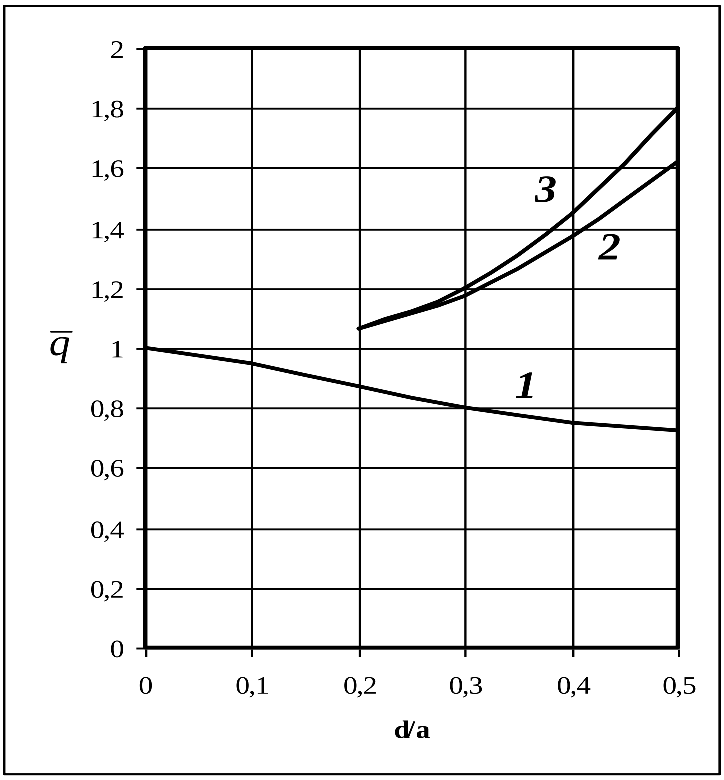

Рис. 3

Зависимости относительной критической нагрузки от отношения малой и большой полуосей эллипса при f = 0,5 показаны на рис. 4. Расчеты выполнены для двух вариантов нагрузок (кривые *1* и *3* соответствуют равномерному сжатию вдоль малой оси эллипса, кривые *2* и *4* – вдоль большой оси) и двух значений площади поперечного сечения ребра: $f = 0$ (кривые *1* и *2*), f = 1 (кривые *3* и *4*).

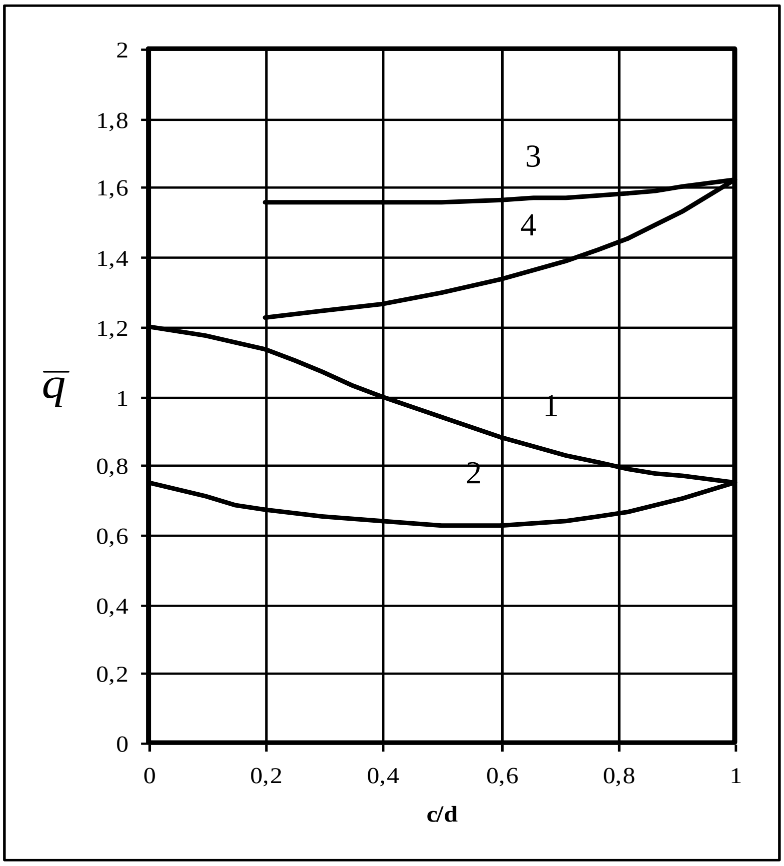

Рис. 4

Из анализа полученных результатов видно, что, как и следовало ожидать, ребро повышает критическую нагрузку, в известной степени компенсируя наличие выреза. Результаты расчетов получены в относительных единицах и могут быть использованы при анализе подобных элементов конструкций в различных областях машиностроения.

Библиографический список

1. **Козлов, В. Я.** Исследование плоского поля напряжений пластин с подкрепленными отверстиями методом конечных элементов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: сб. – Горький, ГГУ. 1976. Вып. 2. С. 134–137.
2. **Morley, L. S. D.** The constant moment plate–bending element // The Journal of Strain Analysis. N 1, 1971. V. 6. P. 20–24.
3. Козлов, В. Я. К решению задачи устойчивости пластин с ребрами жесткости на основе треугольных конечных элементов с постоянными моментами / В.Я. Козлов, А.Н. Паутов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: сб. – Горький: ГГУ, 1975. Вып. 2. С. 128–133.
4. **Волынский, М. И.** Алгоритм итерационного поиска собственных значений в задачах устойчивости упругих систем // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 3. С. 44–48.
5. **Фадеев, Д. К.** Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева // Записки научных семинаров ЛОМИ. – Л.: Наука, 1975. Т. 54. С. 3–228.
6. **Годунов, С. К.** Введение в теорию разностных схем / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: ФМ, 1962. – 340 с.
7. **Williams, F. W.** Comparison between sparse stiffnes matrix and sub – structure methods // Inf. J. Num. Meth. Engng. 1973. V. 5. N 3. P. 383–394.

Дата поступления
в редакцию 22.04.2015

V.J. Kozlov [1], A.N. Pautov[2], I.N. Tolkachev[1]

THE STUDY OF THE STABILITY OF THE ELASTIC SQUARE PLATE WITH SUPPORTED ELLIPTIC CUTOUT

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Vyatka State University»[1],
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod[2],
Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev[3]

Purpose: The stability problem of a deformed flat plate with cutout is investigated.
Design/methodology/approach: The finite elements method is used for the solving of this problem.
Findings: The effective calculation method of the flat plates with cutouts is proposed.
Research limitations/implications: There are some unresolved questions concerning the effects in the plastic theory.
Originality/value: The results can be used in the design of mechanical engineering.

Key words: stability, finite element method, elliptical, cutout, plate, edge.