УДК 517.587

В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева, В.И. Сухов

ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА МНОГОЧЛЕНОВ С ВЕСОМ $\dfrac{x}{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}$

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Строится система ортогональных многочленов на интервале $(-\infty, +\infty)$ с весом $\varphi(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}$. Находятся производящая функция, рекуррентные соотношения. Указывается связь с непрерывными дробями.

Ключевые слова: вес, ортогональность, рекуррентное соотношение, непрерывная дробь

Настоящая статья, по существу, представляет одно целое с [1], где без доказательств были приведены сведения об ортогональных многочленах для веса $1/\operatorname{ch}\pi x$. Эти доказательства проводятся аналогично тому, как проделывается ниже для вводимых многочленов. Если многочлены из [1] имеют отношение к математической статистике, более точно к вероятностному распределению Коши, то мотивированием введения новых многочленов служит факт выражаемости через степени числа π сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2n-1)^{2k-1}}$ при $k = 1, 2, \ldots$.

1. Приведем необходимые для дальнейшего сведения из общей теории ортогональных многочленов ([2], [3]).

Последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$, где P_n имеет степень n, ортогональна на интервале $[a,b]$ с весом $\varphi(x) > 0$, если

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\varphi(x)dx = 0, \text{ при } n \neq m. \tag{1}$$

Существуют два подхода к изучению ортогональных многочленов. Один из них использует известный процесс ортогонализации Грама-Шмидта. С его помощью легко доказывается, что многочлены $P_n(x)$ определяется с точностью до числовых множителей. В частности, если потребовать равенства 1 старшего коэффициента у $P_n(x)$, то последний определяется однозначно.

Второй подход, применявшийся математиками петербургской школы (19 век), использует разложение в непрерывную дробь

$$\int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \cfrac{b_0}{x-a_0-\cfrac{b_1}{x-a_1-\cfrac{b_2}{x-a_2-\ldots}}}. \tag{2}$$

Знаменатели подходящих дробей в этом разложении дают нужную систему ортогональных многочленов. В этом подходе устанавливается наличие рекуррентного соотношения вида

$$P_{n+1} = (x-a_n)P_n - b_nP_{n-1}. \tag{3}$$

Оба подхода в общем случае не позволяют дать явные выражения соответствующих формул и при построении конкретных систем (например, классических систем Лежандра, Чебышева, Эрмита и др.) приходится применять различные искусственные приемы.

2. В системе, которая изучается в этой статье $\varphi(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}$, а интервал интегрирования в (1) есть $(-\infty,+\infty)$. Старший коэффициент в P_n фиксируем, полагая его равным 1.

Предложение 1. $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$, т.е. $P_n(x)$ – четная функция при четном n и нечетная при n нечетном. Рекуррентное соотношение (3) превращается в

$$P_{n+1}=xP_n-b_nP_{n-1}. \tag{4}$$

Для доказательства надо сделать замену $x\to -x$ в (1) и воспользоваться четностью $\varphi(x)$. То же надо проделать в (3).

Эффективное использование процесса Грама-Шмидта требует вычисления скалярных произведений

$$(f,q)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)q(x)\varphi(x)dx \tag{5}$$

для степенных функций f и q, т.е. вычисления моментов

$$M_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k\varphi(x)dx. \tag{6}$$

Эти вычисления можно провести двумя способами. Один из них основывается на формуле ([4]) $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin xt}{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2}}dt=\operatorname{th}x$, где $\sin xt$ и $\operatorname{th}x$ следует разложить в степенные ряды. Тогда M_k при четном k выражается через коэффициенты разложения $\operatorname{th}x$ и оказывается рациональным числом. При нечетном k M_k, очевидно, равен нулю. Связь M_k с рядами Дирихле, указанными ранее такова:

$$M_k=2\int_0^{\infty}\frac{x^{k+1}dx}{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}=2\int_0^{\infty}x^{k+1}\left(e^{-\frac{\pi x}{2}}+e^{-\frac{3\pi x}{2}}+e^{-\frac{5\pi x}{2}}+\ldots\right)=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+2}}\left(1+\frac{1}{3^{k+2}}+\frac{1}{5^{k+2}}+\ldots\right)$$

для четного k.

Значения нескольких первых моментов таковы:

$$M_0=2,\ M_2=4,\ M_4=32,\ M_6=544.$$

Их значения и процесс ортогонализации позволяет найти несколько первых многочленов (табл. 1). В равенстве (4) оказывается, что $b_1=2,\ b_2=6,\ b_3=12,\ b_4=20$. Это наводит на предположение, что $b_n=n(n+1)$ для произвольного n. Мы утверждаем, что это предположение истинно, т.е. имеет место.

Предложение 2. Многочлены $S_0(x), S_1(x),\ldots,S_n(x),\ldots$, удовлетворяющие условиям:

1) $S_{n+1}=xS_n-n(n+1)S_{n-1}$;

2) старший коэффициент S_n равен 1;

3) $S_0 = 1,\ S_1 = x$,

совпадают с многочленами $P_0,\ P_1,...,\ P_n,...$.

Предварительно докажем.

Предложение 3. Имеет место тождество

$$\frac{e^{x\,\mathrm{arctg}t}}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x)}{n!} t^n . \tag{7}$$

Доказательство. Из рекуррентного соотношения для $S_n(x)$ следует

$$\sum_1^{\infty} S_{n+1}\frac{t^n}{n!} = x\sum_1^{\infty} S_n\frac{t^n}{n!} - \sum_1^{\infty}\frac{n(n+1)}{n!} S_{n-1} t_n . \tag{8}$$

Если обозначить правую часть в (7) через $V = V(t)$, то (8) перепишется как

$$V' - x = x(V-1) - \left(t^2 V\right)'$$

или

$$\left(1+t^2\right)V' = (x-2t)V .$$

Интегрирование этого уравнения при начальном условии $V\big|_{t=0} = 1$ дает нужный результат, т.е. равенство (7). Левую часть в (7) принято называть производящей функцией многочленов $S_n(x)$.

Теперь, чтобы доказать предложение 2 достаточно установить ортогональность системы $\{S_n\}$.

Из (7) находим $\dfrac{S_n(x)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint \dfrac{e^{x\,\mathrm{arctg}t}}{1+t^2}\dfrac{dt}{t^{n+1}}$, где интегрирование ведется по достаточно малому контуру, охватывающему начало координат. Поэтому

$$\left(\frac{S_n(x)}{n!}, \frac{S_m(x)}{m!}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\oint \frac{x\,\mathrm{arctg}\,t}{1+t^2}\cdot\frac{e^{x\,\mathrm{arctg}s}}{1+s^2}\varphi(x)dx\,dtds . \tag{9}$$

Интегрирование по x внутри контурных интегралов выполняется с помощью формулы из [4]: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\,px}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2}}dx = \mathrm{tg}\,p$, которую следует продифференцировать по p.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x(\mathrm{arctg}t+\mathrm{arctg}s)}\varphi(x)dx = 2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}(x(\mathrm{arctg}\,t+\mathrm{arctg}\,s))}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2}}xdxs = 2\frac{\left(1+t^2\right)\left(1+s^2\right)}{(1-ts)^2}$$

и

$$\left(\frac{S_n}{n!}, \frac{S_m}{m!}\right) = 2\oint\oint\frac{(1-ts)^{-2}}{t^{n+1}s^{m+1}}dtds\,\frac{1}{(2m)^2}$$

равно удвоенному коэффициенту при $t^n s^m$ в разложении $(1-ts)^{-2} = 1 + 2ts + 3(ts)^2 + 4(ts)^3 + ...$. Очевидно, что этот коэффициент равен нулю при $n \neq m$ и S_n и S_m ортогональны. Предложение 2 доказано.

Отметим, что при $n = m$ коэффициент равен $2(n+1)$, а $\|S_n\|^2 = (S_n, S_n) = 2(n+1)n!^2$.

Остановимся еще на разложении в непрерывную дробь. Для введенной системы многочленов (2) перепишется как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} \cdot \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}} = \cfrac{2}{x - \cfrac{1\cdot 2}{x - \cfrac{2\cdot 3}{x - \cfrac{3\cdot 4}{x - \ldots}}}}\,.$$

Левую часть можно преобразовать с помощью вычетов, и она оказывается равной

$$8\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{xn}{x^2 + (2n)^2} = \frac{M_0}{x} + \frac{M_2}{x^3} + \frac{M_4}{x^5} + \ldots. \tag{10}$$

Разложение (9) понимается в формально-алгебраическом смысле. Вопрос об области сходимости непрерывной дроби здесь не рассматривается.

Сформулируем одну задачу, связанную с введенными многочленами, а также с многочленами из [1]. Известно, что классические ортогональные многочлены удовлетворяют дифференциальным уравнениям 2-го порядка. Этот факт означает, что эти многочлены являются собственными функциями дифференциального (и даже эрмитова) оператора.

Возникает вопрос: нельзя ли найти подходящий оператор для наших многочленов? В такой формулировке ответ тривиален. Надо задать последовательность действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ и положить $L(P_n) = \lambda_n P_n$. Далее действие L распространяется на функции, разлагаемые в ряды по системе $\{P_n\}$.

Однако гораздо интереснее искать операторы, например, в базисе $1, x, x^2, \ldots$. По-видимому дифференциальным оператором L быть не может, но, возможно, имеются различные интегральные операторы типа Вольтерра или Фредгольма.

Таблица 1

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$x^2 - 2$
3	$x^3 - 8x$
4	$x^4 - 20x^2 + 24$
5	$x^5 - 40x^3 + 184x$
6	$x^6 - 70x^4 + 784x^2 - 720$
7	$x^7 - 112x^5 + 2464x^3 - 8448x$
8	$x^8 - 168x^6 + 6384x^4 - 52352x^2 + 40320$
9	$x^9 - 240x^7 + 14448x^5 - 229760x^3 + 648576x$
10	$x^{10} - 330x^8 + 29568x^6 - 804320x^4 + 536025x^2 - 3628800$
11	$x^{11} - 440x^9 + 55968x^7 - 2393600x^5 + 30633856x^3 - 74972160x$
12	$x^{12} - 572x^{10} + 99528x^8 - 6296576x^6 + 136804096x^4 - 782525952x^2 + 47900160($

Библиографический список

1. **Galkin, V.M.** Orthogonal polynomials associating with Cauchy distribution / V.M. Galkin, L.N. Erofeeva, S.V. Lescheva // Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития 2014: материалы межд. научно-практической конференции, сборник научных трудов SWorld, Вып. 3(36). Т. 2. С. 83–85, Одесса: С.В. Куприенко. 2014.

2. **Сегё, Г.** Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – М., 1962.
3. **Чебышев, П.Л.** Избранные математические труды / П.Л. Чебышев. – М.–Л., 1946.
4. **Рыжик, И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.М. Рыжик, И.С. Градштейн. – М.–Л., 1951.

Дата поступления
в редакцию 22.04.2015

V.V. Anikovsky, L.N. Erofeeva, S.V. Leshcheva

THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS SYSTEM WITH THE WEIGHT $\frac{x}{\mathrm{sh}\frac{\pi x}{2}}$

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: The construction of new orthogonal polynomials system is given. These polynomials are associated with some questions from mathematical statistics.
Design/methodology/approach: The recurrence relation is reconstructed that permit to apply the function theory methods.
Findings: The explicit expressions of the analogues of the classical formulas are derived.
Research limitation/ implications: There are some unresolved questions.
Originality/value: The connections with *L*–functions are founded.

Key words: Weight, orthogonality, recurrence, relation, continued fraction.