МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 537.86

Е.М. Громов, В.В. Тютин

КВАЗИСОЛИТОНЫ В РАМКАХ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ВРИЗА ПРИ УЧЕТЕ ПОТЕРЬ И НЕОДНОРОДНОСТИ

Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики

Цель работы: Исследовано уравнение Кортевега-де-Вриза с линейными потерями и неоднородной по поперечной координате нелинейностью, описывающее распространение нелинейных гравитационных волн в неоднородной по высоте атмосфере.
Результат: Найдено точное решение модельного уравнения в виде диссипативной нелинейной локализованной волны, распространяющейся с постоянной скоростью. Полученное решение описывает квазисолитон, распространяющийся под малым углом к горизонту. Определена величина этого угла. Дисперсионное расплывание диссипативного квазисолитона компенсируется движением квазисолитона в более плотные слои атмосферы, приводящим к увеличению коэффициента нелинейности. Полученные результаты достаточно хорошо описывают натурные наблюдения акустических импульсов в ионосфере.
Научный подход: Исследование проведено как численно, так и аналитически.
Новизна: Результаты исследования новые и могут иметь приложение для исследования и описания нелинейных волновых пакетов внутренних гравитационных волн в верхних слоях атмосферы.

Ключевые слова: уравнение Кортевега-де-Вриза, затухающий солитон, квазисолитон, неоднородность, аналитическое решение, численный эксперимент.

Введение

Интерес к динамике солитонов обусловлен их способностью распространяться на значительные расстояния, сохраняя свою форму, и переносить энергию и информацию с малыми потерями. Солитонные решения возникают в нелинейных моделях различных областей физики при анализе интенсивных волновых полей в диспергирующих средах: гравитационных волн в атмосфере и ионосфере, поверхностных волн на воде, оптических импульсов и пучков в волоконных линиях связи и пространственных волноводах, электромагнитных и ленгмюровских волн в плазме [1-7].

Динамика низкочастотных (НЧ) волновых пакетов в нелинейных диспергирующих средах описывается уравнением Кортевега-де-Вриза (КдВ). В пренебрежении потерь и при постоянных коэффициентах нелинейности и дисперсии данное уравнение имеет хорошо известное солитонное решение, существование которого обусловлено балансом нелинейности и дисперсии. Учет потерь приводит к затуханию солитонов, которое сопровождается дисперсионным расплыванием. Пространственная неоднородность коэффициента нелинейности приводит к изменению параметров солитона: с увеличением нелинейности протяженность солитона уменьшается. Баланс этих эффектов может привести к возникновению диссипативных солитонов.

В данной работе исследуется распространение интенсивных НЧ волновых пакетов в рамках КдВ с линейными потерями и неоднородной по поперечной координате нелинейностью. Данное уравнение описывает в параксиальном приближении распространение гравитационных волн в неоднородной по вертикали атмосфере при малых углах вектора скорости относительно горизонта. Найдено солитонное решение в виде диссипативной нелинейной локализованной волны, распространяющейся с постоянной скоростью. Полученное решение описывает диссипативный квазисолитон, распространяющийся под малым углом к горизонту, величина которого пропорциональна коэффициенту линейных потерь, вертикальному масштабу неоднородности атмосферы и обратно пропорциональна скорости его движения. Дисперсионное расплывание диссипативного солитона компенсируется движением солитона в более плотные слои атмосферы, приводящим к увеличению коэффициента нелинейности.

1. Исходное уравнение. Интегральные соотношения

Рассмотрим динамику волнового поля $\psi = \psi(x, z, t)$ в нелинейной диспергирующей диссипативной среде с неоднородной по поперечной координате нелинейностью в рамках неконсервативного КдВ [4]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 3p(z)\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \nu\psi = 0\,, \tag{1}$$

где z - поперечная к x координата; $p(z)$ - коэффициент нелинейности среды; V_0 - скорость линейных волн; γ - коэффициент дисперсии; ν - коэффициент линейных потерь. Данное уравнение описывает в параксиальном приближении распространение нелинейных гравитационных волн при малых углах вектора скорости к горизонту в неоднородной по вертикали атмосфере с экспоненциальным профилем нелинейности

$$p(z) = \exp(-z/H), \tag{2}$$

где H - вертикальный масштаб неоднородности атмосферы. При отсутствии потерь и при постоянности коэффициента нелинейности, отвечающем горизонтальному распространении волновых пакетов, уравнение (1) имеет хорошо известное солитонное решение [1, 2]. В данной работе решение (1) будем искать в виде волны, распространяющейся со скорость $\vec{V}$ под малым углом α к оси x, приводящим к изменению в (2) высоты распространения солитона $z(t) = z_0 + \sin\alpha \int_0^t \left|\vec{V}(t')\right| dt'$. Удерживая величины порядка $\alpha << 1$ (пренебрегая членами порядка $\alpha^2 << \alpha$), с использованием замены

$$\psi = \Psi \exp(-\nu t - z_0/H) \tag{3}$$

уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + 3\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \exp\left(-\frac{\alpha}{H}\bar{x}(t) - \nu t\right) + \gamma \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} = 0\,. \tag{4}$$

Здесь $\bar{x}(t) = \int_0^t V(t) dt'$, $V = \left|\vec{V}\right|$. Уравнение (4) имеет следующие соотношения для интегральных моментов волнового поля:

$$\frac{dN}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2 dx = 0\,, \tag{5}$$

$$N\frac{d\bar{x}}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^2dx=NV_0+2p(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^2dx-3\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2dx, \tag{6}$$

где $p(t)=\exp(-\alpha\bar{x}(t)/H-\nu t)$. Для анализа системы (5)-(6) решение будем искать в адиабатическом приближении, полагая динамику волнового пакета с сохранением sech-like формы

$$\Psi(\xi,t)=A(t)\text{sech}^2(x-\bar{x}(t)/\Delta(t)), \tag{7}$$

где $\Delta^2(t)=4\gamma/(p(t)A(t))$, $A(t)^2\Delta(t)=\text{const}$. Подставляя (7) в (6) и учитывая (5), получим для скорости движения солитона

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=V_0+A_0\exp\left(-\frac{\alpha}{H}\bar{x}(t)-\nu t\right). \tag{8}$$

Решением (8) является

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=V_0+\frac{A_0}{1+\frac{\alpha}{\alpha_*}\left[\exp\left(\frac{3}{2}\nu t\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_*}\right)\right)-1\right]}, \tag{9}$$

где $\alpha_*=-\nu H/(V_0+A_0)$.

2. Солитонное решение

При выполнении соотношения

$$\alpha=\alpha_*\equiv-\nu H/V \tag{10}$$

скорость солитона не меняется во времени $d\bar{x}/dt=V_0+A_0=\text{const}$. Так же постоянен и коэффициент нелинейности в (4): его уменьшение во времени, обусловленное потерями, компенсируется смещением солитона в области с большей нелинейностью. Уравнение (4) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+V_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}+3\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3}=0, \tag{11}$$

которое имеет точное решение в виде солитона:

$$\Psi(\xi,t)=A_0\text{sech}^2[(x-Vt)/\Delta], \tag{12}$$

где A_0 - амплитуда солитона; $\Delta=2\sqrt{\gamma/A_0}$ - его ширина; $V=V_0+A_0$ - его скорость. Решение в исходных переменных уравнения (1) с учетом (3) следующее:

$$\psi=A_0\text{sech}^2(x-Vt/\Delta)\exp(-\nu t+z_0/H).$$

Полученное решение описывает диссипативный квазисолитон, распространяющийся под малым отрицательным углом α_* относительно оси x с постоянной скоростью. Дисперсионное расплывание диссипативного солитона компенсируется его смещением в области с большей нелинейностью. Подобная динамика импульсов в ионосфере наблюдается регулярно [6]. Отметим, что в [7] были получены диссипативные высокочастотные солитоны в рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера с псевдоиндуцированным рамановским рассеянием, линейными потерями и пространственно неоднородной дисперсией. При $\alpha\neq\alpha_*$ скорость солитона и его амплитуда меняются во времени. На рис. 1 приведены результаты численного счета динамики начального волнового пакета $\Psi = \mathrm{sech}^2(x/2)$ в рамках (4) в системе отсчета, движущейся со скоростью начального волнового пакета $\xi = x - V_0 t$, при значениях параметров $\gamma = 1$, $\nu = 1/10$, $V_0 = 1$ и при различных значениях α/α_*.

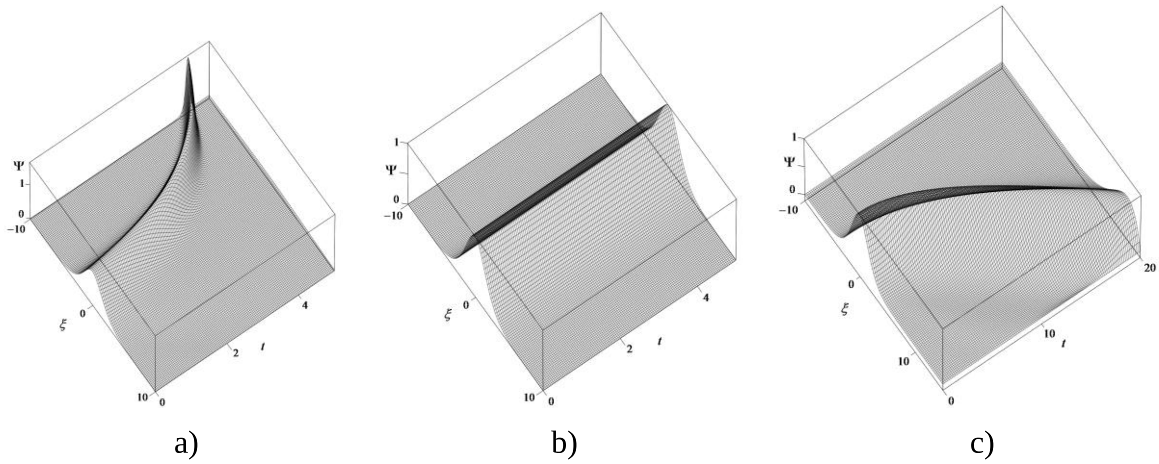

Рис. 1. Результаты численного счета (4) в системе, движущейся со скоростью начального солитона $\xi = x - (V_0 + A_0)t$ при $\nu = 1/10$ и различных значениях α/α_*.
[(a): $\alpha/\alpha_* = 2$; (b): $\alpha/\alpha_* = 1$; (c): $\alpha/\alpha_* = 1/2$]

Заключение

В работе исследована динамика интенсивных НЧ волновых пакетов в рамках уравнения КдВ с линейными потерями и неоднородной по поперечной координате нелинейностью. Данное уравнение в параксиальном приближении описывает распространение гравитационных волн в неоднородной по вертикали атмосфере при малых углах вектора скорости к горизонту.

Найдено решение этого уравнения в виде диссипативной нелинейной локализованной волны Полученное решение описывает диссипативный квазисолитон, распространяющийся под малым углом вектора скорости к горизонту. Величина угла пропорциональна коэффициенту линейных потерь, вертикальному масштабу неоднородности атмосферы и обратно пропорциональна скорости движения квазисолитона. Дисперсионное расплывание диссипативного квазисолитона компенсируется движением солитона в более плотные слои атмосферы, приводящим к увеличению коэффициента нелинейности.

Данная работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект РФФИ № 14–05–00565-а).

Библиографический список

1. **Кадомцев, Б.Б.** Коллективные явления в плазме / Б.Б. Кадомцев. – М.: Наука, 1988.
2. **Карпман, В.И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах / В.И. Карпман. – М.: Наука, 1973.
3. **Савина, О.Н.** О возможности существования уединенной внутренней гравитационной волны в безграничной изотермической атмосфере / О.Н. Савина, Л.М. Ерухимов // Геомагнетизм и аэрономия. 1981. Т. 21 (4). С. 679–682.
4. **Деминова, Г.Ф.** Об уединенной внутренней гравитационной волне в области F атмосферы / Г.Ф. Деминова [и др.] // Геомагнетизм и аэрономия. 1982. Т. 22 (2). С. 211–215.
5. **Tajima, K.** Compensation of soliton broadening in nonlinear optical fibers with loss // Opt.Lett. 1987. V.12. P. 54.

6. **Astafyeva, E.** Two-mode long-distance propagation of coseismic ionosphere disturbances / E. Astafyeva [et al.]// Journal of Geophysical Research. 2009. V. 114. A10307. doi:10.1029/2008JA013853.
7. **Gromov, E.M.** Damped solitons in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial stimulated Raman scattering and decreasing dispersion / E.M. Gromov, B.A. Malomed // Optics Communications. 2014. V. 320. P. 88–93.

Дата поступления
в редакцию 11.06.2015

E.M. Gromov, V.V. Tyutin

QUASI SOLITONS IN THE KORTEVEG-DE-VRISE EQUATION FRAME WITH TAKING INTO ACCOUNT THE LOSS AND HETEROGENEITY

National Investigate University Higher School of Economics

Purpose: The Korteveg-de-Vrise (KdV) equation with linear loss and non-uniform in the transverse coordinate nonlinearity was investigated. This equation describes the propagation of nonlinear gravitational waves in an height – inhomogeneous atmosphere.
Approach: The investigation was considered as analytically as numerically.
Findings: An exact solution of the model equation in the form of a dissipative nonlinear localized wave traveling with constant speed was obtained. The resulting solution describes quasisoliton propagating at a small angel to horizon. The angel's volume is determined. The dispersion decay of dissipative quasisoliton is compensated by it motion in to denser layers of the atmosphere, leading to nonlinearity coefficient increasing. The obtained results are in a good agreement with natural acoustic pulse observations in the ionosphere.

Key words: Korteveg-de-Vrise Equation, Dissipative Soliton, Quasisoliton, Heterogeneity, Analytical Solutions, Numerical Simulation.