**УДК 519.6 + 517.983.54**

**О.В. Матысик**

# ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина

Рассматривается задача приближенного решения в гильбертовом пространстве некорректного операторного уравнения первого рода. Задача решается итерационным методом неявного типа. Доказана сходимость метода с априорным и апостериорным выбором числа итераций, получены оценка погрешности метода, априорный момент останова и оценка для апостериорного момента останова.

*Ключевые слова*: регуляризация, неявный итерационный метод, некорректная задача, гильбертово пространство, операторное уравнение первого рода, самосопряженный и несамосопряженный оператор, правило останова по поправкам.

## Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом $y$, $X$ и $Y$ – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

**Определение 1.** *Задачу отыскания решения* $x \in X$ *уравнения* (1) *называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части* $y = y_0 \in Y$ *уравнения* (1) *его решение*:

*а) существует в пространстве* $X$*;*

*б) определено в пространстве* $X$ *однозначно;*

*в) устойчиво в пространстве* $X$*, т. е. непрерывно зависит от правой части* $y \in Y$*. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.*

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора $A^{-1}$ на всем пространстве $Y$.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались.

Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения 1-го рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике $l_2$, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т.д.

Однако обычные методы, применяемые для решения корректных задач, невозможно было применить к некорректным задачам, поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. Это было сделано в 1943 году А. Н. Тихоновым [2].

**Определение 2.** *Задача отыскания решения уравнения* (1) *называется корректной, по Тихонову, на множестве* $M \subset X$ *, а множество* $M$ *– ее классом корректности, если:*

*а) точное решение задачи существует в классе* $M$ *;*

*б) в классе* $M$ *решение задачи единственно при любой правой части* $y \in F = AM \subset Y$ *;*

*в) принадлежащее множеству* $M$ *решение задачи устойчиво относительно правых частей* $y \in F$ *.*

Если $M = X$ и $F = Y$, то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А. Н. Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 50-х годах, но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М. М. Лаврентьева [3], А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина [4], В. К. Иванова, В. В. Васина и В. П. Тананы [5], О. А. Лисковца [6], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [7].

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А. Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики.

**Определение 3.** *Параметрическое семейство операторов* $\{R_\alpha\}$, *действующих из пространства правых частей* $Y$ *в пространство решений* $X$ *, называется регуляризующим (регуляризующим алгоритмом, или регуляризатором), если:*

1) *при любом* $\alpha > 0$ *оператор* $R_\alpha$ *определен на всем пространстве* $Y$ *;*

2) *если существует точное решение исходной задачи* $x \in X$ *, то для любого* $\delta > 0$ *существует* $\alpha(\delta)$ *такое, что для всех* $y_\delta \in Y$ *,* $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *имеет место соотношение* $\|R_{\alpha(\delta)} y_\delta - x\|_X \to 0,\ \ \delta \to 0.$ *Параметр* $\alpha$ *называется параметром регуляризации,* $x_{\alpha,\delta} = R_{\alpha(\delta)} y_\delta$ *– регуляризованными решениями.*

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных. В работе [8] А. Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это метод регуляризации решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В. К. Иванов в работе [9] излагает метод квазирешений. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и метод невязки, предложенный Д. Л. Филлипсом (D. L. Phillips) [10] и В. К. Ивановым [11].

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [12–23].

В настоящей статье предлагается неявный итерационный метод решения некорректных задач, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра $k$. Для рассматриваемого метода исследована сходимость в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова; обоснована возможность применения к методу правила останова по поправкам.

Выбор параметра $k$ и, следовательно, соответствующей схемы для решения некорректных задач, зависит от степени $s$ истокопредставимости точного решения ( $x = A^s z,\ s > 0$ ).

В работе показано, что для $s \le 5$ целесообразно использовать предложенный метод при $k = 1$, для $6 \le s \le 27$ при $k = 2$ и т.д.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным явным методом итераций [3, 7, 12–14, 16] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод [3, 7, 12–14, 16] предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинствам. В явном методе [3, 7, 12–14, 16] на параметр $\alpha$ накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемом неявном методе ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем, оптимальную оценку для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (томографии) [13, 18–19, 21–23].

Работа выполнена в рамках темы «Итерационные процедуры решения операторных уравнений первого рода» (зарегистрирована в Белорусском институте системного анализа от 20.09.2011 № 20113449) и соответствует приоритетному направлению научных исследований Республики Беларусь на 2011-2015 годы: *Методы математического и компьютерного моделирования, компьютерные технологии и интеллектуальные системы поддержки принятия решений.*

**1. Постановка задачи.** В действительном гильбертовом пространстве $H$ исследуется уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{2}$$

где $A$ – положительно определенный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора $A$, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части $y$ уравнение (2) имеет единственное решение $x$. Для отыскания этого решения предлагается неявная итерационная процедура

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \tag{3}$$

В случае приближенной правой части $y_\delta$ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (3) итерации примут вид

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \tag{4}$$

Далее, как обычно, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе $n$ и достаточно малых $\delta$. Иными словами, метод (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_n \left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right) = 0$.

**2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.**

**Сходимость при точной правой части.** Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряженного оператора $A$ и формулой (3), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1} \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n} dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, $E_\lambda$ – спектральная функция оператора $A$. Отсюда легко выводится сходимость итерационного процесса (3) при $n \to \infty$ для $\alpha > 0$.

**Сходимость при приближенной правой части.** Итерационный процесс (4) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций $n$ в зависимости от уровня погрешности $\delta$. Справедлива

**Теорема 1.** *Итерационный процесс* (4) *сходится при* $\alpha > 0$, *если выбирать число итераций* $n$ *в зависимости от* $\delta$ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [19, 21–22]. При этом, легко показывается оценка $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$

**Оценка погрешности.** Скорость сходимости метода (4) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения $x$ уравнения (2), т.е. $x = A^s z, s > 0.$ Тогда $y = A^{s+1}z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n} dE_\lambda z.$ Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\|.$

Таким образом, общая оценка погрешности метода (4) запишется в виде

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \|x - x_n\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}$ и оптимальную оценку погрешности

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \tag{5}$$

**Замечание 1.** *Оценка погрешности* (5) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [7], *он является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0.$

**Замечание 2.** *Оптимальная оценка* (5) *не зависит от* $\alpha$, *но от параметра* $\alpha$ *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать* $\alpha$, *удовлетворяющим условию* $\alpha > 0$ *и так, чтобы* $n_{опт} = 1.$ *Для этого достаточно выбрать* $\alpha_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}.$

Приведем погрешность метода (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (4), а $z_n$ – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления $\gamma_n$, т.е.

$$z_{n+1}=\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E-\alpha A^k\right)^2 z_n+2\alpha A^{k-1}y_\delta\right]+\alpha\gamma_n,\quad z_0=0.$$

Оценка погрешности метода (4) в этом случае имеет вид

$$\|x-z_n\|\le\|x-x_{n,\delta}\|+\|x_{n,\delta}-z_n\|\le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\|+2k(n\alpha)^{1/k}\delta+n\alpha\gamma,\quad n\ge1,$$

где $\gamma=\sup\limits_i|\gamma_i|$.

Оценку $\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по $k$. Для этого производную по $k$ от $\varphi(k)=(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}}e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}}e^{\frac{-s}{k(s+1)}}\cdot\frac{s}{k^2(s+1)}\cdot\left(k-\ln\frac{s}{k}\right)=0$. Отсюда видно, что оптимальное $k$ должно удовлетворять равенству $k=\ln\frac{s}{k}$. Но $k$ должно быть целым числом, поэтому, как показывают расчеты, для $s\le5$ $k_{\text{опт}}=1$, для $6\le s\le27$ $k_{\text{опт}}=2$.

**3. Апостериорный выбор числа итераций.**

Априорный выбор числа итераций $n$ получен в предположении, что точное решение $x$ уравнения (2) истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны и тем самым, приведенные в разделе 2 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (4) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по поправкам. Зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и момент $m$ останова метода итераций (4) определим условием [16, 19, 21–22]

$$\left.\begin{aligned}&\|z_n-z_{n+1}\|>\varepsilon,\quad (n<m),\\&\|z_m-z_{m+1}\|\le\varepsilon.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Решается уравнение (1) с несамосопряженным положительным ограниченным оператором. Предположим, что $y\in R(A)$, т. е. при точной правой части $y$ уравнение (1) имеет единственное решение $x$. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1}=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2x_n+2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y\right],\ x_0\in H,\alpha>0,k\in N.\quad(7)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y-y_\delta\|\le\delta,$ метод итераций (7) примет вид

$$\begin{aligned}z_{n+1}=&\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2z_n+2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right]+\\&+\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}u_n,\ z_0\in H,\ \alpha>0,k\in N,\end{aligned}\qquad(8)$$

где $u_n$ – ошибки в вычислении итераций, причем $\|u_n\|\le\beta.$ Обозначим $C=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2$, $B=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*.$ Тогда итерационный метод (8) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. Покажем, что метод (8) с правилом останова (6) сходится. Справедливы

**Лемма 1.** *Пусть приближение* $\omega_n$ *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0,\ \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n,\ n \ge 0. \tag{9}$$

*Тогда справедливо неравенство* $\sum\limits_{k=0}^{n} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$.

**Лемма 2.** *При* $\forall \omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Леммы 1–2 доказываются аналогично подобным из [21–22].

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* $\delta$ *и* $\beta$ *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* $u_n$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

*а) если* $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* $m$ *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* $y_\delta$ *и* $u_n$, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

*б) если* $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

*в) если, кроме того,* $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0$.

**Доказательство.** Используя индукцию, можно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{10}$$

Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1}By + u_{n-k-1}) = C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})By +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E - C)A^* y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y - A^{-1}(E - C^n)y + A^{-1}(E - C^n)y_\delta +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}\omega_0 - A^{-1}(E-C^{n+1})y + A^{-1}(E-C^{n+1})y - A^{-1}(E-C^{n+1})y_\delta -$$

$$-C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1}C^n(E-C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n B(y-y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \left\|C^n B(y-y_\delta)\right\|. \tag{11}$$

Обозначим $\sigma = B(y-y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^n B(y-y_\delta)\right\| = \left\|C^n\sigma\right\| = \left\|\int_0^{\|C\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|C\|}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\| \le \left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\| + q^n\|\sigma\| \to 0,\ n\to\infty,\ \varepsilon_0\to 0,$$

так как при $\alpha > 0,\ \lambda \in \left(0, \|C\|\right]$ имеем $\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^{2k}} \le q < 1.$ Поэтому (см. лемму 2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|z_n - z_{n+1}\| = \varlimsup\limits_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова $m$ определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y-y_\delta\| \le \delta$ и $u_n$, $\|u_n\| \le \beta.$

а. Рассмотрим последовательность (9) и определим момент останова $m'$ условием

$$\left.\begin{aligned}&\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,\ (n < m'),\\ &\|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из (11) следует, что $m \le m'.$ Из леммы 1 при $n = m'$ получим неравенство $\sum\limits_{k=0}^{m'}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо записать

$$\sum_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$

Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1}\left(\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta\right)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$

Так как по (12) при $n < m'$ имеем $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,$ то $m'\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2.$ Учитывая, что $\omega_0 = z_0$ и $m \le m',$ из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m \le m' \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

б. Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{13}$$

Предположим, что (13) верно, тогда $x - C^n x = B\left(E + C + C^2 + ... + C^{n-1}\right)y$, $(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y$, $(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} Ax$, $(E - C^n)x = (E - C^n)x.$ Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (13) доказана. Из (10) вычтем (13), получим

$$z_n - x = C^n (z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{14}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$.

Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n \Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \tag{15}$$

В частности, (15) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m \Delta_0\right\| \to 0,\ m \to \infty.$ Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0, \delta \to 0, \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,\ m \to \infty, \delta \to 0, \beta \to 0$.

Из (14) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n (E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \tag{16}$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^{2k}\right)^{-1} \left(E - \alpha\left(A^* A\right)^k\right)^2$ принадлежит [0,1], то можно доказать, что $\left\|C^n (E - C)\right\| \le \dfrac{1}{n+1}$. Поэтому из (16) получим при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x)\right\| + \left\|C^{m-1} B(y_\delta - y)\right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$+ \left\|C\sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2}\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)\right\| \left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta +$$

$$+ \|C\|\beta\sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ [21–22].

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d > 1, p \in (0,1),$ то при всех достаточно малых $\delta, \beta$ выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$.

Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то $\varepsilon \le \dfrac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$. Отсюда получим, что $m \le \dfrac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \dfrac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$.

При $m \to \infty$ множитель $2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| \to 0$, а $\dfrac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$ ограничена при $\delta, \beta \to 0$. Поэтому $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0$, при $m \to \infty$, $\delta$, $\beta \to 0$. Отсюда и из неравенства (15) при $m \to \infty$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|\Delta_m\| = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m - x\| \le \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\left\|C^m\Delta_0\right\| + m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)\right) = 0.$$

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m - x\|$ при $m \to \infty$, т. е. метод итераций (8) с правилом останова по поправкам (6) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема 2 доказана.

### Библиографический список


1. **Hadamard, J.** Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris: Hermann et cie, 1932. – 542 p.
2. **Тихонов, А. Н.** Об устойчивости обратных задач // Доклады АН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 5. С. 195–198.
3. **Лаврентьев, М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
5. **Иванов, В. К.** Теория линейных некорректных задач и её приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
6. **Лисковец, О. А.** Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск: Наука и техника, 1981. – 342 с.
7. **Вайникко, Г. М.** Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука. – 1986. – 178 с.
8. **Тихонов, А. Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.

9. **Иванов, В. К.** О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61 (103). – № 2. – С. 211–223.
10. **Phillips, D. L.** A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // J. Accoc. Comput. Mach. 1962. – V. 9. – № 1. – P. 84–97.
11. **Иванов, В.К.** Теория приближённых методов и её применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В.К. Иванов. – Киев: Навук. думка, 1968. – 287 с.
12. **Константинова, Я. В.** Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестник Белорус. ун-та. Серия 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
13. **Самарский, А. А.** Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: УРСС, 2004. – 480 с.
14. **Денисов, А. М.** Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 207 с.
15. **Vogel, C. R.** Computational methods for inverse problems / C. R. Vogel. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.
16. **Емелин, И. В.** Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
17. **Gilyazov, S. F.** Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S. F. Gilyazov, N. L. Gol'dman. – Dordrecht ets.: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.
18. **Kabanikhin, S. I.** Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications / S. I. Kabanikhin. – Deutschland: De Gruyter, 2011. – 459 p.
19. **Савчук, В. Ф.** Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А.С. Пушкина, 2008. – 196 с.
20. **Matysik, O. V.** M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – V. 15. – N. 3. – P. 373–389.
21. **Матысик, О. В.** Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А.С. Пушкина, 2014. – 213 с.
22. **Матысик, О. В.** Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
23. **Верлань, А. Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев: Навук. думка, 1986. – 543 с.

*Дата поступления*
*в редакцию 14.10.2015*

**O.V. Matysik**

## OF THE ITERATION REGULARIZATION OF ILL-POSED EQUATIONS THE FIRST KIND

Brest State University n. a. A. S. Pushkin, Belarus

**Purpose:** Suggest a regularizing algorithm for ill-posed problems and to compare it with the previously known methods.
**Design/methodology/approach:** To construct the iteration method used is the most common of the currently known approaches to solving ill-posed problems - an approach based on the entered academician A.N. Tikhonov regularizer concept, as well as the general theory of ill-posed problems, the theory of functional analysis and computational mathematics.
**Findings:** Designed and studied effective implicit iteration method for ill-posed problems described by operator equations of the first kind.
**Research limitation/implication:** There are some unresolved questions - the study of convergence of the method in the case is not exactly given operator.
**Originality/value:** The research results can be applied for solving applied incorrect problems encountered in spectroscopy and tomography, geophysical, engineering and management.

*Key words*: Regularization, implicit iteration method, ill-posed problem, Hilbert-space, operator equation of the first kind, self-adjoint and non self-adjoint operator, stopping rule for amendments.