УДК 517.587

В.М. Галкин, Е.К. Китаева, Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ L – ФУНКЦИЯХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Дается построение систем ортогональных многочленов, связанных с $L-$функциями Дирихле. При этом коэффициенты многочленов оказываются рациональными числами.

Ключевые слова: вес, ортогональность, непрерывная дробь, характер Дирихле.

Идущий от петербургской математической школы XIX в подход к изучению ортогональных многочленов основывается на разложении [2, 3]

$$\int_a^b \frac{f(t)dt}{x-t} = \cfrac{a_0}{x-b_1-\cfrac{a_1}{x-b_2-\cfrac{a_2}{x-\ldots}}}. \tag{1}$$

Подходящие дроби непрерывной дроби в правой части $\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}, \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}, \frac{Q_3(x)}{P_3(x)}, \ldots, \frac{Q_n(x)}{P_n(x)}, \ldots$ дают нужную систему ортогональных многочленов $P_0(x)=1, P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ на интервале $[a,b]$с весом $f(x)$. В частности, три последовательных многочлена связаны рекуррентным соотношением

$$. P_{n+1} = (x-b_n)P_n - a_n P_{n-1}, n \ge 1. \tag{2}$$

Классические ортогональные системы (Лежандра, Эрмита, Чебышева и др.) обладают следующими свойствами:

1. Коэффициенты многочленов есть рациональные числа.
2. Коэффициенты a_n, b_n в (2) также рациональны.
3. Вес $f(x)$ достаточно просто устроен.

Свойства пунктов 1 и 2 обеспечены, если в формальном разложении

$$\int_a^b \frac{f(t)dt}{x-t} = \frac{1}{x}M_0 + \frac{1}{x^2}M_1 + \frac{1}{x^3}M_2 + \ldots \tag{3}$$

моменты $M_k = \int_a^b t^k f(t)dt$ являются рациональными числами, разложение правой части (3) в непрерывную дробь из (1) производится с помощью простых алгебраических операций. Далее мы показываем, что легко обозримые весовые функции могут быть получены из рассмотрения так называемых $L-$функций Дирихле.

Приведем основные сведения о $L-$функциях [1]. При $\operatorname{Re} s > 1$ $L-$функция определяется сходящимся рядом $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$, в котором функция целочисленного аргумента $\chi(n)$, называемая характером Дирихле, обладает следующими свойствами:

1) функция $\chi(n)$периодическая с периодом k;

2) $\chi(nm) = \chi(m)\chi(n)$;

3) $\chi(n) = 0$, если nне взаимно просто с k. В частности, $\chi(1) = 1$.

Функция $L(s,\chi)$ аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного s, за исключением, быть может, точки $s=1$ и для действительно значных характеров удовлетворяет функциональному уравнению

$$L(1-s,\chi)=\begin{cases}2(2\pi)^{-s}k^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\cos\dfrac{\pi s}{2}L(s,\chi), \text{ если } \chi(-1)=1,\\ 2(2\pi)^{-s}k^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\sin\dfrac{\pi s}{2}L(s,\chi), \text{ если } \chi(-1)=-1.\end{cases} \tag{4}$$

Правда, характер $\chi(n)$ надо подчинить дополнительному условию – условию первообразности. Последнее технически громоздко определяется, но для стандартных теоретико-числовых функций оно выполняется. Под стандартными характерами мы далее понимаем функции $\chi_{-1}(n)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ с $k=4$, $\chi_2(n)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ с $k=8$, $\chi_p(n)=\left(\dfrac{n}{p}\right)$ с $k=p$, где $\left(\dfrac{n}{p}\right)$ – символ Лежандра [4], а также произведения предыдущих.

Напомним, что при n не взаимно простом с k правые части надо положить равными нулю. $L(s,\chi)$ при $\operatorname{Re} s>1$ допускает интегральное представление

$$L(s,\chi)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t,\chi)dt, \text{ где } \varphi(t,\chi)=\sum_{n=1}^\infty \chi(n)e^{-nt}. \tag{5}$$

Функция $\varphi(t,\chi)$ будет в дальнейшем служить «прототипом» весовой функции системы ортогональных многочленов.

Периодичность $\chi(n)$ позволяет просуммировать ряд для $\varphi(t,\chi)$:

$$\varphi(t,\chi)=\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\chi(n)e^{-nt}}{\left(1-e^{-kt}\right)}.$$

Лемма. Функция $\varphi(t,\chi)$ четна при $\chi(-1)=-1$ и нечетна при $\chi(-1)=1$.

Доказательство мы опускаем, поскольку в конкретных примерах это свойство функции $\varphi(t,\chi)$ легко проверяется.

Если характер $\chi(n)$ первообразный, то $\sum\limits_{n=1}^{k-1}\chi(n)=0$ и $\varphi(t,\chi)$ регулярна в точке $t=0$, т.е. может быть разложена в степенной ряд. Более того, значения $\chi(n)$ есть $0,\pm1$, а потому степенной ряд имеет рациональные коэффициенты.

Эти коэффициенты выражаются через значения $L-$функций в силу следующего утверждения.

Предложение

$$\varphi(t,\chi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}L(-m,\chi)t^m. \tag{6}$$

Доказательство. Наиболее короткий путь состоит в использовании расходящихся рядов и суммирования их по Абелю [6], надо просто разложить экспоненту в $\varphi(t,\chi)$ в степенной ряд и после этого подсчитать коэффициент при t^m в $\varphi(t,\chi)$.

Перейдем теперь к построению ортогональных систем многочленов. Интервал, на котором определяется весовая функция, возьмем равным $(-\infty,+\infty)$. Весовую функцию $\theta(x,\chi)$ определяем равенствами

$$\theta(x,\chi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\varphi\left(\dfrac{2\pi}{k}x,\chi\right), \text{ для } \chi(-1)=-1,\\ \dfrac{x}{\sqrt{k}}\varphi\left(\dfrac{2\pi}{k}x,\chi\right), \text{ для } \chi(-1)=1.\end{cases}$$

Заметим, что в обоих случаях вес – четная функция, а потому моменты нечетного порядка равны нулю.

Вычисление моментов четного порядка проведем лишь для первого случая, когда $\chi(-1)=-1$. Для второго случая приведем только результат, поскольку, по существу, дублируются вычисления для первого случая.

Итак, пусть $\chi(-1)=-1$, т.е. $\varphi(x,\chi)$– четная функция. При m четном функциональное уравнение (4) дает

$$L(-m,\chi)=2(2\pi)^{-m-1}k^{m+\frac{1}{2}}\Gamma(m+1)\sin\frac{\pi(m+1)}{2}L(m+1,\chi).$$

Пользуясь равенством (5), преобразуем правую часть к виду

$$2\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-m-1}\frac{1}{\sqrt{k}}(-1)^{\frac{m}{2}}\int_0^\infty t^m\varphi(t,\chi)dt.$$

Замена переменной интегрирования $t=\frac{2\pi}{k}r$ дает тогда

$$L(-m,\chi)=2(-1)^{\frac{m}{2}}\int_0^\infty r^m\theta(r,\chi)dr=(-1)^{\frac{m}{2}}M_m.$$

Таким образом, моменты могут быть найдены из разложения (6).

В случае $\chi(-1)=1$, оказывается, что для m нечетного $L(-m,\chi)=(-1)^{\frac{m+1}{2}}M_{m-1}$, т.е. вновь моменты находятся из разложения (6).

В заключение приведем несколько примеров, иллюстрирующих изложенное. Предварительно отметим, что при четном весе и симметричном интервале интегрирования в (1) коэффициенты b_m обращаются в нуль и $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$[2]. Рекуррентное соотношение принимает вид

$$P_{n+1}(x)=xP_n(x)-a_nP_{n-1}(x),\ P_o=1,\ P_1=x.$$

Пример 1. $\chi=\chi_3, k=3$.

n	1	2	3
$\chi(n)$	1	-1	0

$$\varphi(x,\chi)=\frac{1}{1+2\operatorname{ch}x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{36}x^4-\frac{7}{1080}x^6+\frac{809}{54432}x^8-\dots.$$

Здесь первые члены последовательности $\{a_n\}$ таковы

$$\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{36}{7},\frac{572}{63},\frac{1400}{99},\frac{2907}{113},\dots$$

Полученные значения можно записать в виде $a_n=\frac{n^2(9n^2-1)}{4(4n^2-1)}$.

Пример 2. $\chi=\chi_{-1}, k=4$.

n	1	2	3	4
$\chi(n)$	1	0	-1	0

$$\varphi(x,\chi)=\frac{1}{2chx}.$$

В [7] показано, что $a_n=\frac{n^2}{4}$.

Пример 3. $\chi = \chi_5,\ k = 5$.

n	1	2	3	4	5
$\chi(n)$	1	-1	-1	1	0

$$\varphi(x,\chi) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,x}{1 + 2\,\mathrm{ch}\,x + 2\,\mathrm{ch}\,2x}.$$

Здесь первые члены последовательности $\{a_n\}$ таковы

$$1,5,\ \frac{42}{5}, \frac{108}{5}, \frac{88}{3}, \frac{152}{3}, \frac{5967}{95}, \frac{8758}{95}, \frac{476520}{4379}, \frac{640125}{4379}, \frac{5237284}{31295}, \ldots.$$

Пример 4. $\chi = \chi_2,\ k = 8$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\chi(n)$	1	0	-1	0	-1	0	1	0

$$\varphi(x,\chi) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,2x}.$$

Первые члены последовательности $\{a_n\}$имеют вид

$$11,\ \frac{240}{11}, \frac{585}{11}, \frac{4928}{65}, \frac{8267}{65}, \frac{1338480}{8267}, \frac{1926985}{8267}, \frac{107933952}{385397}, \frac{142959495}{385387}, \ldots.$$

Пример. 5 $\chi = \chi_{-2},\ k = 8$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\chi(n)$	1	0	1	0	-1	0	-1	0

$$\varphi(x,\chi) = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,2x}.$$

Для $\{a_n\}$ получены значения $3,\ 16, 35, 64, 99, 144, 255, 324, \ldots$.

По-видимому $a_n = \begin{cases} 4n^2 - 1, & \text{при } n \text{ нечетном}, \\ 4n^2, & \text{при } n \text{ четном}. \end{cases}$

Сделаем некоторые замечания по приведенным примерам.

В примерах 3 и 4 авторам не удалось даже установить закон образования членов последовательности.

В примерах 1, 2 и 5 закон подобрать удалось, но строгим доказательством авторы располагают лишь для примера 2. С его структурой можно ознакомиться в [7], где разбираются многочлены с весом $\dfrac{x}{\mathrm{sh}\dfrac{\pi x}{2}}$.

Библиографический список

1. **Чудаков, Н.Г.** Введение в теорию L – функций Дирихле / Н.Г.Чудаков. – М.: ОГИЗ, 1947.
2. **Сегё, Г.** Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – М., 1962.
3. **Чебышев, П.Л.** Избранные математические труды / П.Л. Чебышев. – М.–Л., 1946.
4. **Хассе, Г.** Лекции по теории чисел / Г. Хассе. – М., 1953.
5. **Харди, Г**. Расходящиеся ряды / Г. Харди. – ИЛ, М. 1951.
6. **Galkin, V.M.** Orthogonal polynomials associating with Cauchy distribution / V.M. Galkin, L.N. Erofeeva, S.V. Lescheva // Научные исследования и их практическое применение // Современное состояние и пути развития 2014: материалы Межд. научно-практической конференции: сб. науч. тр. SWorld. 2014. Вып. 3(36). Т. 2. С. 83–85.

7. **Галкин, В.М.** Ортогогальная система многочленов с весом $\frac{x}{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}$ / В.М. Галкин [и др.] // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2015. №2(109). С. 256–260,

Дата поступления
в редакцию 13.10.2016

V.M. Galkin, E.K. Kitaeva, S.V. Lescheva, L.N. Erofeeva

A NOTE ON *L*-FUNCTIONS AND THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: The series of systems of orthogonal polynomials are constructed. The coefficients of these polynomials are integers.
Design/methodology/approach: For a building taken approach based on application of the continued fraction and theory of moments.
Findings: The built polynomials are new. There some natural questions that require further researches.
Research/limitations/implications: There are some unresolved questions.
Originality/value: Unexpected connections with the analytic number theory are found out.

*Key words***:** weight, orthogonality, continued fraction, Dirichlet character.